



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Pós-graduação em Física Aplicada

**Estudo Fenomenológico dos  
Supercondutores Ferromagnéticos**

JOSÉ SELTON DE OLIVEIRA LIMA

Dissertação de Mestrado

RECIFE - PE

25 de fevereiro de 2019

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

JOSÉ SELTON DE OLIVEIRA LIMA

**Estudo Fenomenológico dos Supercondutores  
Ferromagnéticos**

*Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação  
em Física Aplicada do DEPARTAMENTO DE FÍSICA da  
UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre  
em Física Aplicada.*

Orientador: *Prof. Dr. Antonio Rodrigues de Castro Romaguera*

RECIFE - PE

25 de fevereiro de 2019

# **Agradecimentos**

Depois de alguns longos anos, finalmente chegou a hora de agradecer a todos que participaram direta e indiretamente na realização deste trabalho. Lembrando que isto significa apenas o fim de apenas uma etapa de minha vida e o início de outra. Agradeço em especial:

Ao professor Dr. Antonio Romaguera pela orientação durante o mestrado.

*Eu preciso que você leve a sério, porque dessa forma eu não tenho que  
fazer isso.*

—CAYDE-6

# Resumo

Este trabalho apresenta um estudo dos diagramas de fase dos supercondutores ferromagnéticos. A presença de uma fase magnética na estrutura destes materiais é o que os diferencia dos supercondutores convencionais. A explicação para essa coexistência entre supercondutividade e ferromagnetismo são os elétrons da camada eletrônica  $5f$ , os quais são responsáveis pelos dois fenômenos. Nosso estudo parte de um funcional de energia livre que descreve a energia do sistema e sua relação com quantidades externas. Introduzimos um parâmetro de ordem supercondutor, como um spinor de duas componentes, na descrição da energia livre; junto com três componentes da magnetização, a descrição do comportamento magnético-supercondutor requer a determinação de seis variáveis. Dessa forma, o equivalente a primeira equação de Ginzburg-Landau nos supercondutores convencionais é um sistema com seis equações nos supercondutores ferromagnéticos. Nesse contexto, estudamos numericamente o diagrama de fase construído a partir das soluções do sistema de equações, onde identificamos as fases puramente supercondutoras, puramente ferromagnéticas e as condições para que a fase magnética coexista com a supercondutora.

**Palavras-chave:** Supercondutividade; Ferromagnetismo; Spin tripleto.

# Abstract

This work presents a study of the phase diagram of the ferromagnetic superconductors. The presence of a magnetic phase in the structure of these materials is what differentiates it from the conventional superconductors. The explanation for this coexistence between superconductivity and magnetism relies on the 5f electrons. Starting from a free energy functional that describes the energy system and its relation to the external quantities. We introduce an order parameter with two complex components in the description of free energy. Forward with the components of magnetization, a description of the magnetic superconductor behavior requires a determination of six variables. Thus, the equivalent of the first Ginzburg-Landau equation for conventional superconductors is a system with six equations in the ferromagnetic superconductors. In this context, we study numerically the phase diagram built from the solutions of the system of equations, where we identify purely superconducting, purely magnetic phases and the conditions for a magnetic phase to coexist with a superconductor.

**Keywords:** Superconductivity; Ferromagnetism; Spin-triplet.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Conceitos Teóricos</b>	<b>4</b>
2.1	Revisão Histórica	4
2.2	Efeito Meissner	9
2.3	Teoria de London	10
2.4	Teoria de Ginzburg-Landau	14
2.4.1	Energia na Ausência de Campo Magnético	16
2.4.2	As Equações de Ginzburg-Landau	17
2.4.3	Comprimentos Característicos	19
2.4.3.1	Comprimento de Penetração	19
2.4.3.2	Comprimento de Coerência	20
2.4.4	Parâmetro de GL	23
2.5	Campo Crítico	23
<b>3</b>	<b>Supercondutores Ferromagnéticos</b>	<b>26</b>
3.1	Conceitos Iniciais	26
3.2	Modelo Fenomenológico	31
3.3	Diagrama de Fases	37
3.3.1	Fase Supercondutora	39
3.3.2	Fase Ferromagnética	40
3.3.3	Fase Supercondutora Ferromagnética	42
	Caso 2	42
	Caso 3	44

## SUMÁRIO

viii

Caso 4	52
Caso 8	58
Caso 18	61
<b>4 Conclusões</b>	<b>74</b>



# Lista de Figuras

- 2.1 Resistividade em função da temperatura absoluta. Este resultado marcou a descoberta da supercondutividade. O mercúrio, sofre queda em sua resistividade próximo a  $4,2K$ . [22] 5
- 2.2 Comportamento de alguns materiais estudados por Onnes. Para a Platina, a resistência se tornou independente da temperatura. O ouro também apresentou resistência constante, e sua resistência não foi para zero mesmo na amostra pura. A linha pontilhada apresenta uma curva hipotética para o ouro puro. A curva do Mercúrio apresenta uma queda abrupta na resistência. [14] 6
- 2.3 A esquerda, o campo magnético penetra a amostra que se encontra a uma temperatura acima da  $T_c$ . A direita, a amostra está abaixo da temperatura crítica expulsando o campo magnético externo. Este fenômeno é denominado de Efeito Meissner. 9
- 2.4 Fluxo magnético normalizado pelo campo externo em função da posição, em unidades de  $\lambda$ , no vácuo ( $x < 0$ ) e em supercondutor ( $x > 0$ ) [22]. 14
- 2.5 Variação da densidade de energia livre entre o estado supercondutor e o normal em função de  $\psi$ , para os parâmetros fenomenológicos  $\alpha > 0$  e  $\alpha < 0$ , assumindo que não há campos e gradientes e que  $\psi$  varia lentamente no espaço [22]. 18
- 2.6 Comportamento da função  $n_s(x)$  dentro do material supercondutor. Ela parte de zero na parede do material e cresce até o valor máximo  $\psi_0^2 = \psi_{max}^2$  no interior do material, onde a supercondutividade é máxima [16]. 22
- 2.7 Campos críticos em função da temperatura para supercondutores do tipo-I(esquerda) e do tipo-II(direita) [22]. 25

- 3.1 Diagrama de fase *temperatura versus pressão* para o composto  $UGe_2$ , onde  $T_f$  denota a temperatura de Curie, enquanto que  $T_c$  corresponde à temperatura de transição supercondutora. A região delimitada pelos quadrados corresponde a fase de coexistência supercondutora ferromagnética e os triângulos correspondem a linha de transição da fase normal para a ferromagnética. No diagrama,  $T_c$  está multiplicada por um fator 10 [19]. 30
- 3.2 Em condições normais, nós encontramos supercondutividade no terceiro e quarto quadrante; enquanto a fase magnética está presente no segundo e terceiro. 37
- 3.3 Representação gráfica de 3.15 em função parâmetro  $\phi$ , mostrando dois mínimos e um máximo. 39
- 3.4 Diagrama de fases Temperatura - pressão ( $r - t$ ), mostrando a densidade de energia para o estado supercondutor. É possível observar que a densidade de energia para fase supercondutora depende apenas do eixo  $r$  que é dependente da temperatura crítica. Para valores de  $r > 0$  a temperatura crítica  $T_c$  seria maior que a temperatura  $T$ . 40
- 3.5 Representação gráfica de 3.17 em função da magnetização  $m$ , mostrando dois mínimos e um máximo de acordo com a teoria de Landau. 41
- 3.6 Representação do diagrama de fases temperatura - pressão ( $r - t$ ) para a fase ferromagnética. Onde é possível observar que a fase ferromagnética se encontra no domínio para  $r < 0$ . 41
- 3.7 (a) Representa o diagrama do módulo do parâmetro supercondutor  $|\phi|^2$  em relação a variável termodinâmica de pressão e temperatura  $t$  e  $r$ , respectivamente. Onde é possível observar que no domínio ferromagnético para  $r > 0$ , a supercondutividade está presente. (b) Representa o domínio ferromagnético para  $t < 0$ . 43
- 3.8 Os dois primeiros diagramas (a) e (b) representam a densidade do parâmetro supercondutor  $\phi_1^2$  e  $\phi_2^2$  em função de  $r$  e  $t$ . O diagrama (c) representa a densidade da magnetização  $m$  em função de  $r$  e  $t$ . 45

- 3.9 Os dois primeiros diagramas (a) e (b) representam a densidade do parâmetro supercondutor  $\phi_1^2$  e  $\phi_2^2$  em função de  $r$  e  $t$ . O diagrama . Onde  $\phi_1 \neq \phi_2 \neq 0$ ,  $m_1 = m_2 = m_3 = m$  e  $\theta_{12} = \pi$ . 46
- 3.10 Os diagrama (a) representa a densidade da energia para o caso 3.2. (b) a derivada de da energia  $\bar{f}$  em relação a  $r$  onde observamos ferromagnetismo no domínio supercondutor  $t > 0$ . (b) representa a derivada da energia em relação a  $t$ . 47
- 3.11 Os diagramas (a) e (b) representam a densidade do parâmetro supercondutor  $\phi_1^2$  e  $\phi_2^2$  em função de  $r$  e  $t$ . Onde  $\phi_1 \neq \phi_2 \neq 0$ ,  $m_1 = m_2 = m_3 = m$  e  $\theta_{12} = \pi$ . 48
- 3.12 A figura representa o diagrama de densidade de energia em função de  $r$  e  $t$ . também apresenta o diagrama  $ft$  que representa o mínimo de energia em relação a  $t$  e o diagrama  $fr$  nos mostra o mínimo da energia em relação a  $r$ . 49
- 3.13 Os diagramas (a) e (b) representam a densidade do parâmetro supercondutor  $\phi_1^2$  e  $\phi_2^2$  em função de  $r$  e  $t$ . 50
- 3.14 A figura representa o diagrama de densidade de energia em função de  $r$  e  $t$ . também apresenta o diagrama  $ft$  que representa o mínimo de energia em relação a  $t$  e o diagrama  $fr$  nos mostra o mínimo da energia em relação a  $r$ . 51
- 3.15 O diagrama representa o diagrama de fase da densidade  $|\phi|^2$  em função de  $r$  e  $t$  associados. 52
- 3.16 A figura (a) representa o diagrama de densidade de energia em função de  $r$  e  $t$ . também apresenta o diagrama (b) que representa o mínimo de energia em relação a  $t$  e o diagrama (c) que nos mostra o mínimo da energia em relação a  $r$ . 53
- 3.17 O diagrama a esquerda representa  $\phi^2$  e o da direita representa  $m$  em função de  $r$  e  $t$  associados 4.2 54
- 3.18 A figura representa o diagrama de densidade de energia em função de  $r$  e  $t$ . também apresenta o diagrama (b) que representa o mínimo de energia em relação a  $t$  e o diagrama (c) que nos mostra o mínimo da energia em relação a  $r$ . 55
- 3.19 O diagrama representa  $\phi^2$  em função de  $r$  e  $t$  associados 4.3. Neste diagrama a supercondutividade não aparece na fase ferromagnética. 56

- 3.20 A figura representa o diagrama de densidade de energia em função de  $r$  e  $t$ . também apresenta o diagrama (b) que representa o mínimo de energia em relação a  $t$  e o diagrama (c) que nos mostra o mínimo da energia em relação a  $r$ . 57
- 3.21 O diagrama a seguir representa  $|\phi|^2$  em função de  $r$  e  $t$  associados ao caso 8.1 ta Tabela 3.3.3 58
- 3.22 O diagrama a seguir representa  $|m|^2$  em função de  $r$  e  $t$  associados ao caso 8.1 ta Tabela 3.3.3 59
- 3.23 A figura representa o diagrama de densidade de energia em função de  $r$  e  $t$ . também apresenta o diagrama (a) que representa o mínimo de energia em relação a  $t$  e o diagrama (b) nos mostra o mínimo da energia em relação a  $r$ . 60
- 3.24 Os diagramas (a) e (b) representam  $\phi_1^2$  e  $\phi_2^2$  respectivamente, enquanto os diagramas (c) e (d) representam  $m_1$  e  $m_2$  em função de  $r$  e  $t$ . Todos estão associados ao caso 18.2 61

# Lista de Tabelas

2.1	Alguns elementos supercondutores e sua respectiva temperatura crítica [1]	8
3.1	Materiais que apresentam propriedades supercondutoras ferromagnéticas. $T_f$ , temperatura de Curie; $T_c$ , temperatura crítica	28
3.2	Parâmetros físicos e fenomenológicos presentes nas equações de densidade de energia e seus respectivos significados	35
3.3	Paridade das densidades de energias	62
3.4	A segunda coluna mostra os valores assumidos por $\psi_1$ , $\psi_2$ , $\psi_3$ , $\mathbf{M}$ e $\theta_{12}$ enquanto a terceira coluna nos mostra a densidade de energia livre normalizada para cada condição proposta.	65

## CAPÍTULO 1

# Introdução

A supercondutividade é uma propriedade intrínseca que certos materiais apresentam quando resfriados abaixo de uma temperatura crítica. Suas principais características são resistividade nula e diamagnetismo perfeito [1]. A existência da supercondutividade depende de alguns fatores, são eles: a temperatura crítica, a corrente crítica e o campo magnético crítico. Esses fatores vem sendo estudados nas últimas décadas com o objetivo de uma melhor manipulação e aplicações dos materiais supercondutores. O melhor exemplo que mostra o avanço no estudo dos supercondutores, que está relacionado à temperatura crítica, é a descoberta dos supercondutores de alta temperatura em 1986 [1, 26].

Até algumas décadas atrás, a supercondutividade só era observada abaixo de temperaturas da ordem de 25 K. Entretanto, a descoberta de novos materiais supercondutores, como os *óxidos cerâmicos*, os fulerenos, os borocarbeto e o composto intermetálico  $MgB_2$ , tem despertado um enorme interesse na comunidade científica. Esse interesse nos supercondutores se dá devido o seu grande potencial tecnológico, mas não apenas isso, a compreensão dos seus mecanismos para a física básica é de fundamental importância. Talvez por esta razão, uma teoria final para explicar o fenômeno da supercondutividade é buscada no mundo inteiro por cientistas e pesquisadores [16].

Os materiais supercondutores são aqueles que não oferecem resistência alguma à passagem de corrente elétrica. A corrente elétrica que atravessa um meio diminui rapidamente com o aumento da temperatura devido à resistência nos condutores normais (não-supercondutores), pois uma parte da corrente é convertida em calor, como descrito no efeito Joule. Uma corrente induzida em um supercondutor persiste por anos sem diminuir sua intensidade, já que nenhuma resistência está presente na amostra supercondutora [16, 5]. Algumas teorias tentam explicar a variação da resistência oferecida a passagem de corrente elétrica em função da temperatura. Algumas dessas teorias são apresentadas a seguir:

- A teoria do Dewar afirma que a resistência aproximaria a zero enquanto a temperatura também caia para o zero absoluto, mas pela razão do zero absoluto ser impossível, a resistência zero seria inviável [6].
- A teoria de Kelvin afirmava que a resistência diminui, e depois aumenta a medida que a temperatura baixa. Acreditava-se que os elétrons se congelariam aos átomos enquanto a temperatura baixava, tornan-os incapazes de se moverem livremente [15].
- A teoria de Drude e de Lorentz diz que a resistência ao movimento dos elétrons é maior quanto mais elevada for a temperatura, devido a agitação dos átomos. Ou seja, acreditava-se em baixa resistividade em baixas temperaturas e esta seria devido às imperfeições no arranjo da rede cristalina [15].
- A teoria BCS alega que os elétrons formam pares de Cooper, um primeiro elétron move-se atraindo os núcleos dos átomos e o segundo elétron será atraído pelos núcleos positivamente carregados, desta forma os dois elétrons se mantêm correlacionados enquanto se movimentam no material supercondutor.

A supercondutividade ainda tem muito a ser estudada, sua contribuição para a ciência é indiscutível. Os supercondutores de alta temperatura crítica e os supercondutores ferromagnéticos são apenas dois exemplos de fenômenos descobertos recentemente que ainda são objetos de numerosos estudos. A coexistência da supercondutividade e magnetismo é o principal fenômeno estudado neste trabalho. Estudamos os diagramas de fases (pressão-temperatura) de um supercondutor ferromagnético para diferentes condições propostas [7].

Inicialmente supercondutividade e magnetismo são conhecidos como fenômenos opostos, já que o magnetismo destrói supercondutividade. Porém, Ginzburg apontou uma possível coexistência entre materiais ferromagnéticos itinerantes e supercondutividade não-convencional. Os supercondutores ferromagnéticos se diferenciam dos supercondutores convencionais por apresentarem estruturalmente a presença de uma fase magnética [20]. Várias dessas propriedades foram observadas experimentalmente em compostos contendo urânio (compostos uranoídes, ou *férmions pesados*) como o  $UGe_2$ ,  $URuGe$ ,  $UCoGe$  e  $URhGe$  entre outros [7, 19, 20].

O ponto de partida para o estudo dos supercondutores ferromagnéticos é um funcional de energia livre, que será apresentado nos próximos capítulos, grandeza que descreve a energia do sistema e sua relação com parâmetros externas (campos e correntes aplicadas) e internas (comprimento de penetração e comprimento de coerência).

Nosso estudo se baseia na comparação dos diagramas de fase  $P - V$  obtidos com os dados experimentais dos compostos  $UGe_2$ ,  $URuGe$ ,  $UCoGe$  e  $URhGe$ . Nesses compostos os elétrons estão no nível de Fermi na camada  $5f$  e são os responsáveis tanto pela supercondutividade quanto pelo ferromagnetismo. Nós introduzimos um parâmetro de ordem supercondutor  $\Psi$  de duas componentes complexas na descrição da energia livre. Junto com três componentes do vetor magnetização  $\mathbf{M}$ , a descrição do comportamento magnético-supercondutor requer a determinação de seis variáveis. Dessa forma, o equivalente a primeira equação de Ginzburg-Landau nos supercondutores convencionais é um sistema com seis equações de estado para os supercondutores ferromagnéticos. Nesse contexto, estudamos numericamente o diagrama de fases construído a partir das soluções do sistema com sete equações, onde identificamos as fases puramente supercondutora, puramente magnética e as condições para que a fase magnética coexista com a supercondutora. Esta dissertação apresentará a seguinte organização:

No **Capítulo 2** fazemos uma introdução teórica sobre os supercondutores, onde apresentamos o desenvolvimento histórico, descrevemos o efeito Meissner, desenvolvemos a teoria de London e ainda abordamos a teoria de Ginzburg-Landau.

No **Capítulo 3** tratamos dos supercondutores ferromagnéticos, onde discutimos as correlações entre supercondutividade e magnetismo. Apresentamos os diagramas de fases obtidos e discutimos os resultados.

Por fim temos o **Capítulo 4**, onde apresentamos a conclusão deste trabalho.



## CAPÍTULO 2

# Conceitos Teóricos

Iniciamos este capítulo com uma introdução a supercondutividade, fazemos um apanhado histórico do descobrimento dos materiais supercondutores. Introduzimos a propriedade fundamental dos supercondutores conhecida como efeito Meissner-Ochsenfeld, fazemos uma introdução a teoria de London e finalmente introduzimos a teoria de Ginzburg-Landau.

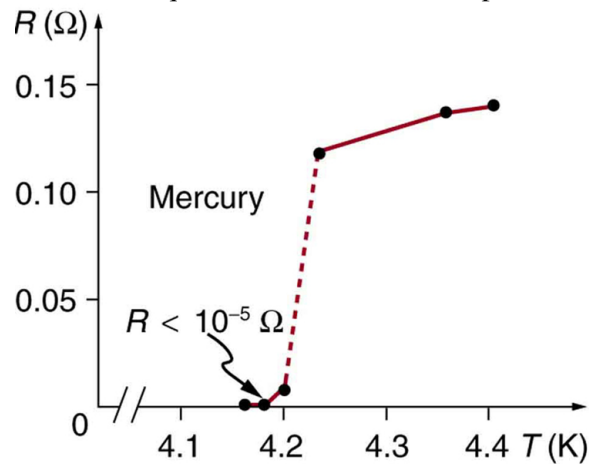
### 2.1 Revisão Histórica

No século XIX, a busca pelo zero absoluto era algo bem disputado e isto motivou cientistas em todo o mundo a tentarem alcançar temperaturas cada vez menores. H. Kammerling Onnes (1853-1926) obteve êxito ao liquefazer o gás Hélio em 10 de Julho de 1908, em seu laboratório na Universidade de Leiden, mantendo o monopólio desta técnica pelos próximos 15 anos. Ape subsequentes, apenas após a liquefação do gás Hélio, foi possível alcançar temperaturas baixas próximo ao zero absoluto.

Em um estudo sobre a resistividade dos materiais em baixas temperaturas, Onnes percebeu que a resistência elétrica caía abruptamente abaixo de uma determinada temperatura [11], denominada mais tarde de temperatura crítica ( $T_c$ ) e a corrente fluía livremente. Assim, a supercondutividade foi observada por Onnes em 1911 enquanto pesquisava a resistividade elétrica do mercúrio, que perdia completa e abruptamente sua resistividade a uma temperatura igual ou inferior a 4,2 Kelvin ( $K$ ) ou  $-268,8^\circ$  Celsius ( $^\circ C$ ). Na Figura 2.1 é possível observar a transição para a fase supercondutora do Mercúrio, quando o mesmo está próximo de sua temperatura crítica.

Onnes não estava apenas estudando a resistividade dos materiais para por fim ao mistério da resistividade a baixa temperatura [16]. Sua motivação era responder a controversas teorias

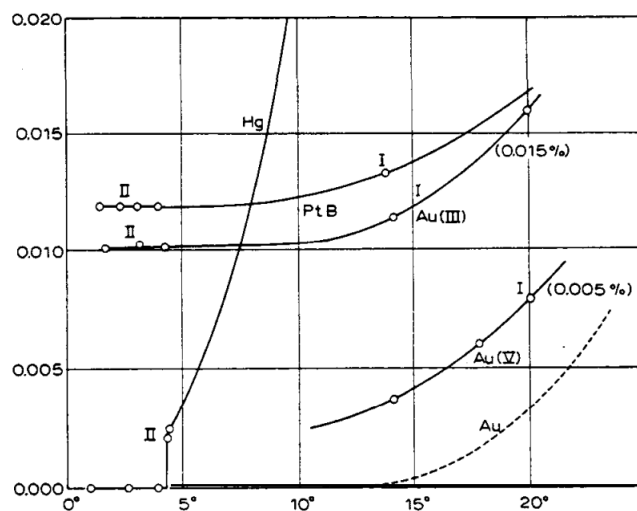
**Figura 2.1** Resistividade em função da temperatura absoluta. Este resultado marcou a descoberta da supercondutividade. O mercúrio, sofre queda em sua resistividade próximo a  $4,2K$ . [22]



relacionadas a resistividade em baixas temperaturas. Uma dessas teorias é a teoria de Drude, que afirma que o espalhamento de elétrons seria ineficiente e a resistividade cairia a zero em baixas temperaturas. Uma segunda teoria, a teoria de Lord Kelvin, afirma que a resistividade deveria aumentar em baixas temperaturas devido o congelamento dos elétrons do material [26]. Para detalhes sobre essas teorias da resistividade dos materiais, recomendamos que o leitor consulte a referência [12].

Liquefazer o gás Hélio foi fundamental para alcançar temperaturas tão baixas e possibilitar o fenômeno da supercondutividade, estas duas importantes descobertas despertaram o interesse de inúmeros cientistas no mundo e lhe rendeu o Nobel da Física em 1913 [14]. Podemos observar na Figura 2.2, publicada por Onnes em sua palestra do nobel, o comportamento de alguns materiais (*Au*, *Hg* e *Pt*) estudados por ele em seu laboratório em Leiden [14]. Ele também discutiu sobre alguns métodos para alcançar as propriedades supercondutoras que foram realizados em seu laboratório.

Em 1933 os físicos alemães W. Meissner e R. Ochenfeld descobriram o fenômeno que hoje é conhecido como efeito Meissner, quando um material é submetido a um campo magnético, este penetra no mesmo, ainda que o valor em seu interior seja, de um modo geral, diferente do valor do campo aplicado. Nos supercondutores, em campos suficientemente pequenos, o valor do campo magnético no interior do material é zero, ou seja, os supercondutores expõem



**Figura 2.2** Comportamento de alguns materiais estudados por Onnes. Para a Platina, a resistência se tornou independente da temperatura. O ouro também apresentou resistência constante, e sua resistência não foi para zero mesmo na amostra pura. A linha pontilhada apresenta uma curva hipotética para o ouro puro. A curva do Mercúrio apresenta uma queda abrupta na resistência. [14]

o campo magnético. Eles constataram que os supercondutores são na verdade diamagnetos perfeitos.

Tal descoberta deixou muitos pesquisadores desorientados, mas deixou claro que supercondutor não é simplesmente um metal com resistividade zero, já que resistividade nula não implica em diamagnetismo perfeito. O efeito Meissner ainda permitiu estabelecer que a transição do estado normal para o supercondutor é termodinamicamente reversível.

Anos após a descoberta da supercondutividade, a primeira teoria que tenta explicar a supercondutividade foi desenvolvida pelos irmãos Fritz e Heinz London em 1935 [16], conhecida atualmente como teoria de London. Apesar desta teoria ser apresentada como uma teoria fenomenológica, descreve bem o comportamento eletrodinâmico dos supercondutores. A teoria de London é baseada no modelo de dois fluidos que assume a existência de elétrons normais e elétrons responsáveis pela supercondutividade, os super elétrons. O modelo de dois fluidos considera que apenas uma fração dos elétrons de condução se encontra no estado supercondutor.

Tomando as equações de Maxwell do eletromagnetismo como base, discorre um modelo que descreve a ausência do campo magnético no interior da amostra supercondutora na pre-

sença de um campo externo [16, 5]. Porém, a teoria de London falha quando não há campo magnético presente, sendo que o fenômeno da supercondutividade deveria existir mesmo na ausência do campo.

Vitaly Ginzburg e Lev Landau propuseram uma segunda teoria fenomenológica em 1950 [16], conhecida como a teoria de Ginzburg-Landau e vamos nos referir a esta teoria aqui usando apenas o termo GL. A teoria de GL é uma adaptação a teoria de Landau para as transições de fase de segunda ordem [16, 5] e apoiada em observações experimentais que descreve todas as propriedades dos supercondutores. Embora explicasse as propriedades supercondutoras, a teoria não recebeu a devida atenção na época. Apenas quando L.P. Gor'kov demonstrou, em 1959, que a expansão de GL poderia ser obtida como caso limite de uma teoria microscópica, baseado na mecânica quântica, na região crítica. Mais especificamente, por meio da teoria BCS, a teoria de GL ganhou maior credibilidade [16, 15].

A descoberta das propriedades dos materiais supercondutores, resistência elétrica zero e expulsão de campos magnéticos, só foi possível graças a liquefação do gás Hélio, que foi de grande importância à época. Foi aí então que em 1911 os supercondutores foram descobertos por Onnes em seu laboratório, localizado em Leiden, Holanda. Onnes também observou o fenômeno em outros materiais como o Cádmiio (0,52 K), Alumínio (1,18 K), Titânio (2,38 K), Estanho (3,72 K), Chumbo (7,2 K), Nióbio (9,25 K) e em ligas como  $Nb_3Sn$  (18,1 K) [16]. Alguns materiais supercondutores e suas respectivas temperaturas críticas podem ser observados na tabela 2.1.

Apesar de cativante e possivelmente rentável, os materiais supercondutores exigem um alto custo até que a temperatura crítica seja alcançada. Isto afastou a simpatia de muitos por alguns anos, quando, então, o interesse pela supercondutividade foi vivificado com a descoberta dos supercondutores de alta temperatura crítica em 1982. Foram observados em alguns compostos uma temperatura crítica elevada, como o  $YBaCuO$ , que apresenta uma temperatura crítica de 93K e o  $HgCaBaCuO$  (153K) descoberto por C. W. Chu em 1993 [16]. Esses compostos foram chamados de supercondutores de alta temperatura crítica.

Depois de uma breve introdução histórica, retratamos ao leitor as duas principais características dos materiais supercondutores. *Condutividade perfeita*, o grande marco da supercon-

Substancia	$T_c$ (K)	
Al	1,2	
Hg	4,1	Primeiro supercondutor descoberto
Nb	9,3	Maior $T_c$ em pressão normal
Pb	7,2	
Sn	3,7	
V	5,3	
Zn	0,88	
Fe	2	
$La_{2-x}Sr_xCuO_4$	35	Primeiro supercondutor de alta temperatura
$MgB_2$	38	Anunciado em Janeiro de 2001
$YBa_2Ca_2Cu_3O_{7-\delta}$	92	Primeiro supercondutor acima de 77 K
$UPt_3$	0,5	Supercondutor exótico (Férmions pesados)
$HgBa_2Ca_2Cu_3O_{8+\delta}$	135-165	meior $T_c$ registrada

Tabela 2.1: Alguns elementos supercondutores e sua respectiva temperatura crítica [1]

atividade representado pela resistividade nula. *Diamagnetismo perfeito*, foi observado em 1933 por W. Meissner e R. Ochsenfeld que, abaixo da temperatura crítica o material supercondutor expulsa o campo magnético de seu interior. Esta segunda característica fundamental dos supercondutores é conhecida como efeito Meissner, apresentando o supercondutor como diamagnético perfeito [15].

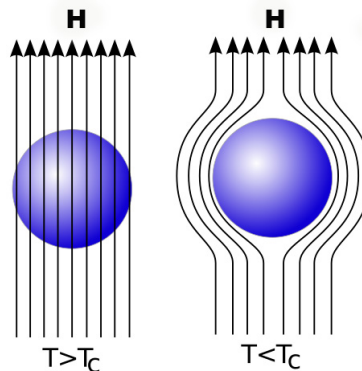
Aproveitando que já comentamos a definição do efeito Meissner, podemos falar agora sobre campo crítico. A supercondutividade não é destruída apenas por temperaturas acima de  $T_c$ . Campos magnéticos também podem anular o efeito da supercondutividade nos materiais. Assim, cada material supercondutor apresenta seu valor para o que denominamos campo crítico termodinâmico  $H_c$ .

Até este ponto podemos concluir que a supercondutividade nos mostra os efeitos quânticos em uma escala macroscópica. As duas teorias fenomenológicas citadas anteriormente foram tratadas como efeitos macroscópicos. Uma nova teoria capaz de descrever os princípios da supercondutividade e explicar sua origem microscópica foi proposta por J. Bardeen, L.N. Cooper e J.R. Schrieffer, em 1957, conhecida como teoria BCS, a qual será discutido nas seções que seguem.

## 2.2 Efeito Meissner

Alguns anos após a descoberta da supercondutividade, os físicos alemães W. Meissner e R. Ochsenfeld verificaram que os materiais com propriedades supercondutoras apresentam diamagnetismo perfeito [15]. Quando submetidos a campos magnéticos pequenos, constatou-se que os materiais supercondutores não permitem a penetração do campo magnético, Figura 2.3. Esse fenômeno foi chamado de Efeito Meissner Ochsenfeld em homenagem a seus descobridores. A partir deste momento a supercondutividade recebeu o título de novo estado da matéria, e não de um simples metal com resistividade zero, já que resistividade nula não acarreta diamagnetismo perfeito [16].

**Figura 2.3** A esquerda, o campo magnético penetra a amostra que se encontra a uma temperatura acima da  $T_c$ . A direita, a amostra está abaixo da temperatura crítica expulsando o campo magnético externo. Este fenômeno é denominado de Efeito Meissner.



Ao submeter um material a presença de um campo magnético externo  $\mathbf{H}$ , este campo penetrará no mesmo. A resposta a presença deste campo aplicado é a magnetização  $\mathbf{M}$ . A indução magnética  $\mathbf{B}$  se relaciona com a magnetização e o campo aplicado através da equação  $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$  [16]. Porém, Meissner e Ochsenfeld descobriram que em temperaturas abaixo de  $T_c$ , certos materiais excluíam as linhas de fluxo magnético do próprio interior, fazendo com que  $\mathbf{B} = 0$ . Esse comportamento recebeu o nome de efeito Meissner.

A descoberta do efeito Meissner foi uma surpresa para os pesquisadores, já que um motor elétrico funciona fundamentado na indução magnética descoberto por Michael Faraday em 1831 [9]. Os materiais supercondutores expulsam o campo externo como se fossem um espelho magnético, podendo até levitar um ímã devido a força magnética [15].

Com a descoberta do efeito Meissner, os materiais supercondutores passaram a ser classificados como diamagnético perfeito. Para explicar por que os supercondutores podem ser considerados diamagnéticos perfeitos, podemos fazer uma comparação com os condutores ideais. Distinguímos primeiramente campo magnético aplicado e campo magnético dentro do material. O campo magnético no interior da amostra se ajusta de acordo com  $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ , onde  $\mathbf{B}$  é o campo dentro do material ou indução magnética,  $\mathbf{H}$  é o campo aplicado e  $\mathbf{M}$  é a magnetização do corpo. Num condutor ideal, de acordo com a lei de Faraday, quando um campo é aplicado aparecerá correntes induzidas de tal maneira a criar um campo dentro da amostra que seja oposto ao aplicado. Essa corrente induzida não apresenta resistividade e por isso são persistentes, também chamadas de *corrente de blindagem*. Nos materiais diamagnéticos perfeitos, o material impede que o fluxo de campo externo penetre na amostra e não há densidade de fluxo no interior durante a aplicação do campo externo [15].

O fato de um material apresentar resistividade nula não implica que este seja supercondutor, o efeito Meissner-Ochsenfeld é a prova fundamental da ocorrência da supercondutividade [1, 16]. Os materiais que apresentam propriedades supercondutoras se tornam diamagnéticos a baixas temperaturas e o campo magnético dentro da amostra supercondutora sempre será zero, na presença de campos pequenos [1]. Se a intensidade do campo externo aumenta, o material pode perder suas propriedades supercondutoras. Mais adiante introduziremos o comprimento de penetração que está relacionado com a variação espacial do campo magnético aplicado.

### 2.3 Teoria de London

A descoberta do efeito Meissner levou os irmãos London a propor equações com o intuito de explicar a expulsão do campo magnético aplicado e prever até que ponto esse campo externo pode penetrar em um supercondutor [18]. A teoria de London assume que uma fração dos elétrons no material é responsável pela supercondutividade enquanto o resto permanece normal, reconhecendo que os elétrons normais ainda dissipam energia enquanto os superelétrons fluem sem resistividade. Trata-se de uma teoria fenomenológica que descreve o estado supercondutor

e introduz o comprimento de penetração de London ( $\lambda$ ), usado nas teorias subsequentes [22, 1].

Para descrever o movimento dos elétrons, partimos do modelo de Drude para a condutividade elétrica [?]

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E} - m \frac{\mathbf{v}}{\tau} \quad (2.1)$$

onde  $\mathbf{v}$  é a velocidade de deriva,  $m$  a massa,  $q$  a carga dos portadores ( $q = -e$  para condutores) e  $\tau$  um tempo de relaxação fenomenológico que está associado ao tempo em que a dispersão dos defeitos conduziria a velocidade de deriva dos elétrons a zero. No caso de um metal normal com velocidade de deriva constante, sujeito a um campo elétrico uniforme e constante no tempo, a solução estacionária da Eq. 2.1 resulta em  $\mathbf{v} = e\mathbf{E}\tau/m$ . Sendo  $n$  o número de elétrons condutores por unidade de volume, escrevemos a densidade de corrente como

$$\mathbf{j} = nq\mathbf{v} = \frac{ne^2\tau}{m}\mathbf{E} = \sigma\mathbf{E} = \frac{1}{\rho}\mathbf{E} \quad (2.2)$$

onde  $\sigma$  é a condutividade do metal e  $\rho$  é a resistividade [?, 22].

Para representar os elétrons supercondutores apresentados na teoria de London, o segundo termo da Eq. 2.2 deve ser igual a zero. com isso teremos

$$m^* \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} = q^*\mathbf{E} = -e^*\mathbf{E}, \quad (2.3)$$

onde  $m^*$ ,  $\mathbf{v}_s$  e  $q^*$  são, respectivamente, a massa efetiva, a velocidade e a carga efetiva dos portadores de carga. Assumindo a densidade dos elétrons supercondutores como  $n_s$ , definimos uma densidade de supercorrente  $\mathbf{j}_s = -e^*n_s\mathbf{v}_s$ . Admitindo a derivada em relação ao tempo, obtemos

$$\frac{d\mathbf{j}_s}{dt} = -e^*n_s \frac{d\mathbf{v}_s}{dt}, \quad (2.4)$$

substituindo a Eq. 2.3 em Eq. 2.4, encontramos

$$\mathbf{E} = \mu_0 \frac{d}{dt} (\lambda^2 \mathbf{j}_s), \quad (2.5)$$



onde

$$\lambda = \left[ \frac{m^*}{\mu_0 n_s (e^*)^2} \right]^{1/2}, \quad (2.6)$$

sendo chamado de comprimento de penetração, parâmetro fenomenológico que fornece a distância em que campos magnéticos penetram no supercondutor. A Eq. 2.6 é conhecida como a primeira equação de London.

A segunda equação de London descreve o efeito Meissner, podemos encontra-la a partir da lei de Faraday-Lenz ( $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{h} / \partial t$ ), da primeira equação de London e um campo magnético local  $\mathbf{h}$ . Assim temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \nabla \times \mathbf{j}_s + \frac{\mathbf{h}}{\mu_0 \lambda^2} \right) = 0 \quad (2.7)$$

para valores de  $\mathbf{j}_s$  e  $\mathbf{h}$  constantes no tempo. Porém, a Eq. 2.7 não garante a ocorrência do efeito Meissner, uma vez que um campo aplicado à amostra no seu estado normal permanecerá em seu interior mesmo quando passar para o estado supercondutor. Para garantir a expulsão do campo magnético do interior do supercondutor, estabelecemos que

$$\nabla \times \mathbf{j}_s + \frac{\mathbf{h}}{\mu_0 \lambda^2} = 0. \quad (2.8)$$

Empregando a lei de Ampère-Maxwell ( $\nabla \times \mathbf{h} = \mu_0 \mathbf{j}_s$ ) e usando o rotacional, obtemos

$$\nabla^2 \mathbf{h} = \frac{\mathbf{h}}{\lambda^2}. \quad (2.9)$$

Temos então as Eq. 2.8 e 2.9 que são conhecidas como a segunda equação de London. A partir do calibre de London, podemos escrever a segunda equação em termos do potencial vetor  $\mathbf{A}$ :

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (2.10)$$

$$\mathbf{A} \cdot \hat{n} |_{s=0} = 0, \quad (2.11)$$

assim a segunda equação de London se apresenta na seguinte forma:

$$\mathbf{A} = -\mu_0 \lambda^2 \mathbf{j}_s, \quad (2.12)$$

resultando em

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_s = 0; \quad (2.13)$$

$$\mathbf{j} \cdot \hat{n} |_s = 0. \quad (2.14)$$

A partir da Eq. 2.12 podemos obter a 1ª equação de London quando derivamos em relação ao tempo, e a 2ª equação se tomarmos o rotacional.

Agora vamos mostrar que a equação de London resulta em um decaimento exponencial no interior do supercondutor. Partimos de uma amostra semi-infinita supercondutora que se estende de  $x = 0$  até o infinito, em um sistema cartesiano. Sendo o campo magnético aplicado paralelo a superfície  $\mathbf{h} = h\hat{k}$ , e empregando as condições de contorno  $h(x = 0) = h_0$  e  $h(x \rightarrow \infty) = 0$ . A Eq. 2.9 apresenta a seguinte solução:

$$h(x) = \begin{cases} h_0, & x < 0 \\ h_0 e^{-x/\lambda}, & x \geq 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

Onde é possível observar que o fluxo magnético decresce consideravelmente numa distância da ordem de  $\lambda$ .

A Eq. 2.15 mostra a atenuação do campo magnético no interior da amostra, Figura 2.4. Fora da amostra temos o campo magnético  $\mathbf{h}_0$ . Dentro do material ele decai exponencialmente de um valor  $h_0$  até desaparecer por completo.  $\lambda$  é o comprimento que representa essa atenuação. Isto explica a exclusão das linhas de campo magnético no interior do material supercondutor, representado pelo efeito Meissner-Ochsenfeld [16].

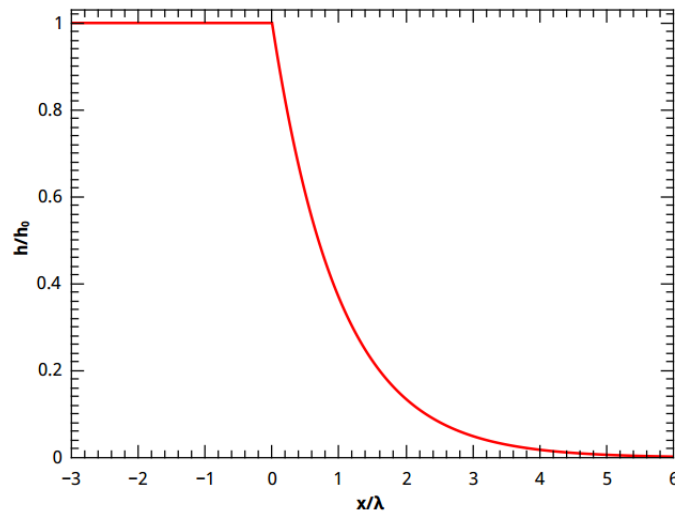
O comprimento de penetração possui uma dependência da densidade de elétrons supercondutores, assim podemos afirmar que também existe uma dependência com a temperatura. Então expressamos  $\lambda$  como:

$$\lambda(T) \approx \lambda(0) \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^4 \right]^{-1/2}, \quad (2.16)$$

onde

$$\lambda(0) = \left[ \frac{m^*}{\mu_0 n_s (e^*)^2} \right]^{1/2}. \quad (2.17)$$

A teoria de London tem sucesso ao explicar, satisfatoriamente, a condutividade perfeita e o



**Figura 2.4** Fluxo magnético normalizado pelo campo externo em função da posição, em unidades de  $\lambda$ , no vácuo ( $x < 0$ ) e em supercondutor ( $x > 0$ ) [22].

efeito Meissner em supercondutores do tipo-I, mas não prevê a destruição da supercondutividade por um campo crítico e uma densidade de corrente crítica. Trata-se de um modelo clássico para descrever a ausência de campo magnético no interior de um material supercondutor na presença de um campo externo. A teoria ainda falha ao tentar explicar o estado supercondutor quando não há campo magnético presente. Foi então que apareceu uma teoria fenomenológica de Ginzburg-Landau, baseada em observações experimentais e algumas suposições que não podiam ser demonstradas de primeiros princípios na época, mas que descreve todas as propriedades dos supercondutores [16].

## 2.4 Teoria de Ginzburg-Landau

A teoria de Ginzburg-Landau é uma teoria fenomenológica que descreve a transição de fase supercondutora a partir de um ponto de vista termodinâmico, tendo como variáveis relevantes  $P$ - pressão e  $V$ - volume. A teoria quântica é usada para descrever os efeitos do campo magnético. Então partimos de alguns pressupostos implicando que alguns valores tem de ser aceitos e são apenas quantificados quando comparado com experimentos [1]. Também é importante

mencionar que essa teoria foi desenvolvida antes de qualquer teoria microscópica (teoria BCS).

A noção de parâmetro de ordem superconductor é a concepção central da teoria de GL. Já que a teoria de London caracteriza o estado superconductor como um estado quântico macroscópico, onde a densidade dos elétrons supercondutores,  $n_s$ , está associada ao comprimento de penetração [22]. Ginzburg e Landau consideram que partículas carregadas podem ser descritas por uma pseudofunção de onda  $\psi(r) = |\psi|e^{i\phi(r)}$  [22], onde

$$n_s(r) = |\psi(r)|^2 = \psi^*(r)\psi(r), \quad (2.18)$$

diferentemente da teoria de London,  $n_s$  pode depender de  $r$  na teoria de GL [22], já que na superfície do material a supercondutividade deve se anular e ser máxima em seu interior.

O parâmetro de ordem  $\psi(r)$ , o principal instrumento de estudo, que de um ponto de vista da mecânica quântica, representa o estado superconductor, pode ser uma função complexa que é nula se  $T > T_c$ , onde  $T_c$  é definido como a temperatura crítica. A densidade de energia livre é representada por uma expansão em uma série de potência de  $\psi(r)$  para temperaturas próximas de  $T_c$  [22]. Com isso, representamos a energia livre de um superconductor, em função de  $\psi$  e do potencial vetor  $\mathbf{A}$ , como sendo

$$f_s[\psi, \mathbf{A}] = f_n + \int d^3r \left[ \alpha |\psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi|^4 + \frac{1}{2m^*} |(-i\hbar\nabla - e^*\mathbf{A})\psi|^2 + \frac{\mu_0}{2} \mathbf{h}^2 \right]. \quad (2.19)$$

A equação acima, também conhecida como energia livre de Helmholtz, descreve a energia para materiais supercondutores. O termo  $f_n$  correspondente a densidade de energia livre para o estado normal.  $\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros fenomenológicos do material que dependem da temperatura [16].  $\mathbf{A}$ , presente no quarto termo da equação, representa um potencial vetor no caso de haver um campo magnético externo.  $\mathbf{h} = \nabla \times \mathbf{A}$  é o campo magnético local [22].  $m^*$  e  $e^*$  são referentes a massa e a carga dos super elétrons, respectivamente.  $\hbar$  é a constante de Plank dividido por  $2\pi$ .  $c$  é a velocidade da luz no vácuo [5].

Agora que já introduzimos todos os termos presente na equação da densidade de energia livre, Eq. 2.19, podemos fazer uma análise física de cada termo: O primeiro termo, representa a energia do estado normal. Os dois vizinhos seguintes representam a energia de condensação

do estado supercondutor, o quarto condiz com a energia cinética do estado supercondutor, e o último termo corresponde à energia do campo magnético dentro e fora do material; relacionado ao aumento na energia necessária para manter o fluxo fora do supercondutor, garantindo assim o efeito Meissner [16, 22].

O parâmetro de ordem  $\psi$  atende a condição de que se a temperatura é maior que  $T_c$ , o parâmetro supercondutor será igual a zero. No caso da temperatura estar abaixo de  $T_c$ , o parâmetro supercondutor será diferente de zero e a densidade de energia livre  $f$  muda radicalmente com a presença dos termos proporcionais a  $\psi$  [16]

$$\begin{aligned}\psi(r) &= 0, & \text{se } T > T_c; \\ \psi(r) &\neq 0, & \text{se } T < T_c.\end{aligned}\tag{2.20}$$

Na presença de campo magnético externo  $\mathbf{H}$  sobre o material, o termo  $\mu_0\mathbf{h}^2/2$  que está presente no final da Eq. 2.19 é o que apresenta contribuição para a energia livre. O material reage a presença deste campo magnético externo através do potencial vetor magnético  $\mathbf{A}$  [16]. Também sabemos que se  $\psi = 0$  (teoria BCS), então a energia do sistema na presença de campo magnético será a energia do estado normal  $f_s$ , somado a energia magnética  $\mu_0\mathbf{h}^2/2$ .

#### 2.4.1 Energia na Ausência de Campo Magnético

Considerando o caso em que não há campos e gradientes, além de pequenas variações espaciais de  $\psi(r)$ . A equação da densidade de energia para os supercondutores toma a seguinte forma [22]

$$f_s = f_n + \alpha|\psi|^2 + \frac{1}{2}\beta|\psi|^4.\tag{2.21}$$

O parâmetro  $\beta$  deve ser sempre positivo, independente da temperatura, para garantir que a densidade de energia livre tenha um mínimo e que também seja fisicamente possível. Caso contrário, se  $\beta < 0$ , o mínimo ocorreria para valores grandes do parâmetro de ordem [22].

Podemos então ter  $\alpha(T > T_c) > 0$  ou  $\alpha(T < T_c) < 0$ , já que  $\beta > 0$ . O parâmetro  $\alpha$ , de acordo com Landau e Ginzburg, é positivo para temperaturas acima da  $T_c$ , garantindo assim

que estado seja normal e apresente um mínimo de energia  $\psi = 0$ . O parâmetro  $\alpha$  negativo para temperaturas abaixo de  $T_c$ , correspondendo ao estado supercondutor [1, 22] com dois mínimos de energia em  $|\psi_\infty|^2 = -\alpha/\beta$ . A Figura 2.5 mostra a variação da densidade de energia livre entre o estado supercondutor e o normal em função de  $\psi$ . Definimos  $\psi_\infty$  como sendo o parâmetro de ordem em um supercondutor infinito em campo nulo. Resumindo, nós temos:

$$\beta > 0, \quad (2.22)$$

$$\alpha > 0, \quad \text{se } T > T_c, \quad (2.23)$$

$$\alpha < 0, \quad \text{se } T < T_c. \quad (2.24)$$

Ainda podemos reescrever esses parâmetros como:

$$\alpha(T) = \alpha_0(T - T_c) \quad \text{e} \quad \beta(T) = \beta_0, \quad (2.25)$$

sendo  $\alpha_0 > 0$  e  $\beta_0 > 0$ , as duas constantes fenomenológicas da teoria. Ainda podemos observar que a diferença de densidade de energia entre os estados normal e supercondutor, na ausência de campo, depende apenas de  $\alpha$  e  $\beta$ .

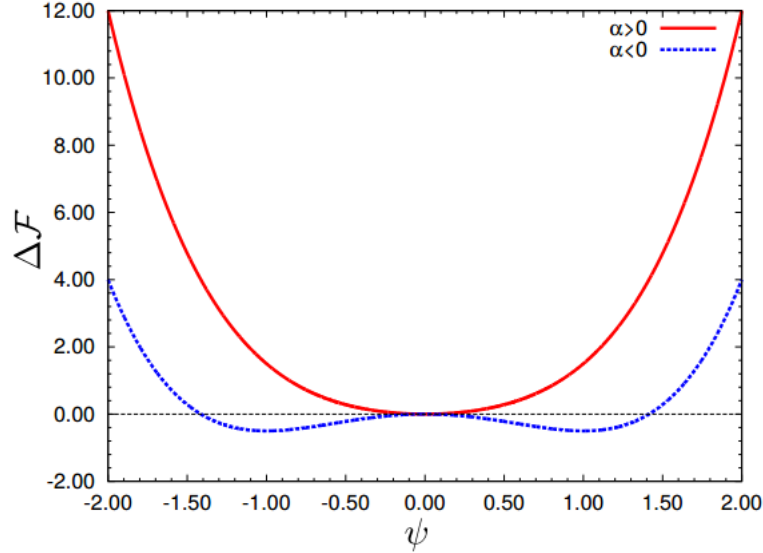
$$f_s - f_n = -\frac{\alpha^2}{2\beta}, \quad (2.26)$$

### 2.4.2 As Equações de Ginzburg-Landau

Nesta seção vamos obter as duas equações de GL. Partindo para a essência da teoria de GL, precisamos encontrar  $\psi$  e  $\mathbf{A}$  que minimizem a energia livre Eq. 2.19 [5]. Quando minimizamos a Eq. 2.19 em relação a  $\psi$ , obtemos:

$$\alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi - \frac{\hbar}{2m^*} \left( \nabla - \frac{ie^*}{\hbar c} \mathbf{A} \right)^2 \psi = 0. \quad (2.27)$$

**Figura 2.5** Variação da densidade de energia livre entre o estado supercondutor e o normal em função de  $\psi$ , para os parâmetros fenomenológicos  $\alpha > 0$  e  $\alpha < 0$ , assumindo que não há campos e gradientes e que  $\psi$  varia lentamente no espaço [22].



Enquanto que a minimização em termos de  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{J} = \frac{i\hbar e^*}{2m^*} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - \frac{e^{*2}}{m^* c} |\psi|^2 \mathbf{A}, \quad (2.28)$$

onde  $\mathbf{J}$  é a densidade de corrente no estado supercondutor.

Podemos notar a similaridade da Eq. 2.27 com a equação de Schrodinger, exceto pelo termo não linear. Temos  $-\alpha$  como o auto valor de energia e  $\psi$  como o parâmetro de ordem. Então, para as equações de GL, devemos introduzir determinadas condições de contorno para a interface supercondutora [1]. Para o supercondutor no vácuo, temos a seguinte equação:

$$\mathbf{n} \cdot \left( -i\hbar \nabla - \frac{e^{*2}}{c} \mathbf{A} \right) \psi = 0, \quad (2.29)$$

onde  $\mathbf{n}$  é o vetor normal à superfície. Com esta condição, certificamos que a interface do supercondutor não é atravessada por correntes. A Eq. 2.19 é o ponto de partida para qualquer cálculo que segue na teoria de GL da supercondutividade. Concluimos então que a equação de GL é representada pelas expressões 2.27 e 2.28.

### 2.4.3 Comprimentos Característicos

A teoria de Ginzburg-Landau ainda estabelece dois comprimentos característicos: o comprimento de penetração  $\lambda(T)$  e o comprimento de coerência  $\xi(T)$ . O comprimento de penetração está relacionado com a atenuação do campo magnético no interior da amostra, dado pela Eq. 2.16. O comprimento de coerência está associado à variação do parâmetro de ordem.

#### 2.4.3.1 Comprimento de Penetração

Partindo da Eq. 2.28, da corrente de elétrons supercondutores, supomos que há um campo magnético no interior do material que está relacionado ao potencial vetor  $\mathbf{A}$  através de  $\mathbf{h} = \nabla \times \mathbf{A}$ . Também supomos que não há variação da função  $\psi$ ,  $\nabla\psi = 0$ , uma vez que quando o material está em uma temperatura muito abaixo de sua temperatura crítica a supercondutividade é máxima e  $\psi_{max}$  é quase constante [22]. A partir dessas duas suposições a Eq. 2.28 se torna:

$$\mathbf{J} = -\frac{e^{*2}}{m^{*}c}\psi^{*}\psi\mathbf{A}, \quad (2.30)$$

aplicando o rotacional dos dois lados, usando a lei de Ampère  $\nabla \times \mathbf{h} = \mu_0\mathbf{J}$  e a definição de potencial vetor

$$\nabla \times \mathbf{J} = -\frac{e^{*2}}{m^{*}c}\psi^{*}\psi\nabla \times \mathbf{A}, \quad (2.31)$$

obtemos a segunda equação de London:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{h} = -\frac{e^{*2}\mu_0|\psi|^2}{m^{*}c}\mathbf{h}. \quad (2.32)$$

A primeira equação de London não é necessária para esta formulação de GL, ela é usada na formulação clássica. Os elétrons supercondutores devem satisfazer a primeira equação de London já que não obedecem a lei de Ohm. Isto pode ser visto no artigo de Ostermann [15], que faz esse desenvolvimento classicamente.

Lembrando a identidade vetorial  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{h} = -\nabla^2\mathbf{h} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{h})$  e usando a lei de Gauss



$\nabla \cdot \mathbf{h} = 0$ , temos:

$$\nabla^2 \mathbf{h} - \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{h} = 0. \quad (2.33)$$

Considerando um caso unidimensional, o qual analisamos quando definimos as equações de London. Sendo uma equação diferencial ordinária de segunda ordem

$$\frac{d^2 h}{dx^2} - \frac{1}{\lambda^2} h = 0, \quad (2.34)$$

aplicando para uma amostra semi-infinita supercondutora, que se estende de  $x = 0$  até o infinito, em um sistema cartesiano. Aplicando um campo magnético paralelo à superfície, e usando as condições de contorno,  $h(x = 0) = h_0$  e  $h(x \rightarrow \infty) = 0$  [22], teremos como solução da Eq. 2.34

$$h(x) = \begin{cases} h_0, & \text{se } x < 0, \\ h_0 e^{-\frac{x}{\lambda}}, & \text{se } x > 0. \end{cases} \quad (2.35)$$

onde definimos o parâmetro  $\lambda$

$$\lambda = \sqrt{\frac{m^* c}{|\psi|^2 \mu_0 e^{*2}}}. \quad (2.36)$$

#### 2.4.3.2 Comprimento de Coerência

O comprimento de coerência é uma relação encontrada quando consideramos, em um caso simplificado, que não há presença de campo ou corrente aplicada ao supercondutor [22] e que não existe variação do parâmetro de ordem supercondutor. Então, a Eq. 2.27 se torna:

$$\alpha \psi + \beta |\psi|^2 \psi - \frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2 \psi = 0, \quad (2.37)$$

sendo  $\psi = cte$ , no interior do supercondutor, recuperamos o resultado  $\psi^2 = -\alpha/\beta$ .

Se o parâmetro  $\psi$  varia espacialmente, fazemos uma análise unidimensional, afim de obter uma equação para a função de onda normalizada  $f(x) = \psi/\psi_{max}$  e  $\xi^2 = \hbar^2/2m^*|\alpha|$  [22]. Supondo que  $\psi(r) = \psi_{max}f(x)$ , sendo  $f(x)$  função real e  $\psi_{max}$  o valor do parâmetro de ordem

longe da superfície [1], podemos reescrever a Eq. 2.37 da seguinte forma:

$$\xi^2 \frac{d^2 f}{dx^2} - f^3 + f = 0. \quad (2.38)$$

Assim definimos a seguinte equação para o comprimento de coerência:

$$\xi(T) = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m^*|\alpha(T)|}}, \quad (2.39)$$

a qual indica as variações do parâmetro de ordem  $\psi(r)$ .

A Eq. 2.38 apresenta como solução,

$$f(x) = \tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2}\xi}\right), \quad (2.40)$$

concluimos que, se  $x = 0$ , a equação anterior se anula e tende a unidade quando  $x \rightarrow \infty$ . Esse comportamento é o que acontece nos supercondutores, que tem supercondutividade anulada na parede do material e apresenta o valor máximo em seu interior [16]. Na forma como está, a Eq.2.40 não é muito útil para entendermos  $\xi$ , então retornamos a Eq. 2.38 e escrevemos  $f(x)$  de uma forma retificada como [4, 16]:

$$f(x) = 1 - g, \quad (2.41)$$

assim saberemos a partir de  $g(x)$ , o quanto  $f(x)$  está longe de 1, ou seja, saberemos o quanto  $\psi$  difere de  $\psi_{max}$ . Substituindo a Eq. 2.41 na Eq. 2.38, adquirimos então

$$\xi^2 \frac{d^2 g}{dx^2} - (1 - g(X))^3 + (1 - g) = 0, \quad (2.42)$$

para  $g(x) \ll 1$ , podemos linearizar a Eq. 2.42, obtendo:

$$\frac{d^2 g(x)}{dx^2} = \frac{2}{\xi^2} g(x), \quad (2.43)$$

esta equação satisfeita por  $g(x)$  tem a seguinte solução,

$$g(x) = e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{\xi}\right)x}, \quad x \gg 0 \quad (2.44)$$

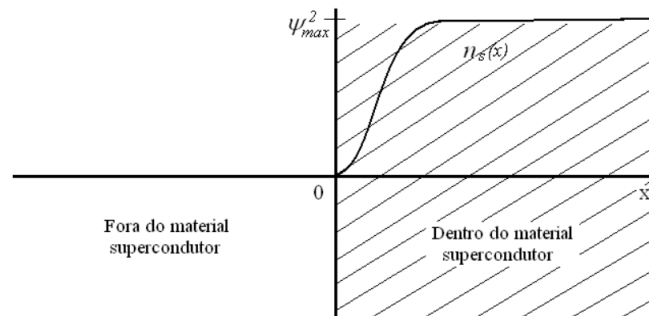
mostrando que o parâmetro  $\xi$  equivale ao comprimento característico que exhibe o quanto  $f(x)$  difere de seu valor máximo 1 (um).

Voltando a definição da densidade de elétrons Eq. 2.18, vamos mostrar a variação da quantidade de elétrons dentro do condutor. Usando a função normalizada  $f(x)$  na Eq. 2.40, a variação da densidade de elétrons se apresenta como:

$$n_s(x) = \psi_0^2 \left[ \tanh \left( \frac{x}{\sqrt{2}\xi} \right) \right]^2. \quad (2.45)$$

O comportamento da função 2.45 é mostrado na Figura 2.6 onde podemos notar que para  $x = 0$  e  $x < 0$  (parte externa do material), a densidade é nula, não há efeito supercondutor [16]. Para  $x > 0$ , dentro do material, a densidade aumenta para o valor máximo como expresso na Eq. 2.45.

**Figura 2.6** Comportamento da função  $n_s(x)$  dentro do material supercondutor. Ela parte de zero na parede do material e cresce até o valor máximo  $\psi_0^2 = \psi_{max}^2$  no interior do material, onde a supercondutividade é máxima [16].



### 2.4.4 Parâmetro de GL

Nas seções anteriores introduzimos o conceito de comprimento de penetração  $\lambda$  e comprimento de coerência  $\xi$ , a partir dos mesmos podemos definir o parâmetro de Ginzburg-Landau,  $\kappa$ .

$$\kappa = \frac{\lambda}{\xi}, \quad (2.46)$$

o qual nos permite identificar e classificar materiais supercondutores tipo-I e do tipo-II. O valor  $\kappa = 1/\sqrt{2}$  delimita o tipo de supercondutor:

$$\kappa < \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \text{tipo - I} \quad (2.47)$$

$$\kappa > \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \text{tipo - II} \quad (2.48)$$

Na seção que segue fazemos uma rápida abordagem sobre campo crítico e sua relação com os supercondutores tipo-I e tipo-II.

## 2.5 Campo Crítico

Campo magnético crítico ( $H_c$ ) é mais uma das principais propriedades dos supercondutores. A presença de um campo magnético de intensidade acima de um valor crítico destrói a supercondutividade assim como temperaturas acima da temperatura crítica ( $T_c$ ). Nesta seção deduziremos essa característica destes materiais.

Voltando a uma das primeiras equações, a definição da densidade de energia livre Eq. 2.19, gostaríamos de chamar a atenção para a energia livre do estado normal e do estado supercondutor. Na Eq. 2.19, parece que a energia do estado supercondutor é maior que a energia do estado normal. Mas devemos lembrar da relação 2.25, onde  $\alpha$  deve sempre ser negativo e  $\beta$  sempre positivo no estado supercondutor. Então, considerando a ausência do campo magnético e sendo a supercondutividade máxima,  $\psi = \psi_{max}$ , obtemos a Eq. 2.26, a partir da densidade de energia livre.

Está claro que quando não há campo magnético a energia do estado supercondutor é menor que a do estado normal. Agora consideramos a aplicação de um campo magnético externo  $\mathbf{H}$  que está aumentando gradativamente. No interior do material o campo é nulo, devido ao efeito Meissner, e a contribuição à energia livre devido ao potencial vetor  $\mathbf{A}$  também é nula [16]. Para expelir o campo magnético ou mantê-lo do lado externo de um supercondutor, é necessária uma energia magnética de  $\mu_0 h^2/2$ , onde  $h$  é o campo local. Então temos a seguinte equação:

$$f_s = f_n - \frac{\alpha^2}{2\beta} + \frac{1}{2}\mu_0 h^2, \quad (2.49)$$

a medida que  $\mathbf{H}$  aumenta, percebemos que em algum momento a energia do estado supercondutor ficará maior que a do estado normal, o que destruirá a supercondutividade.

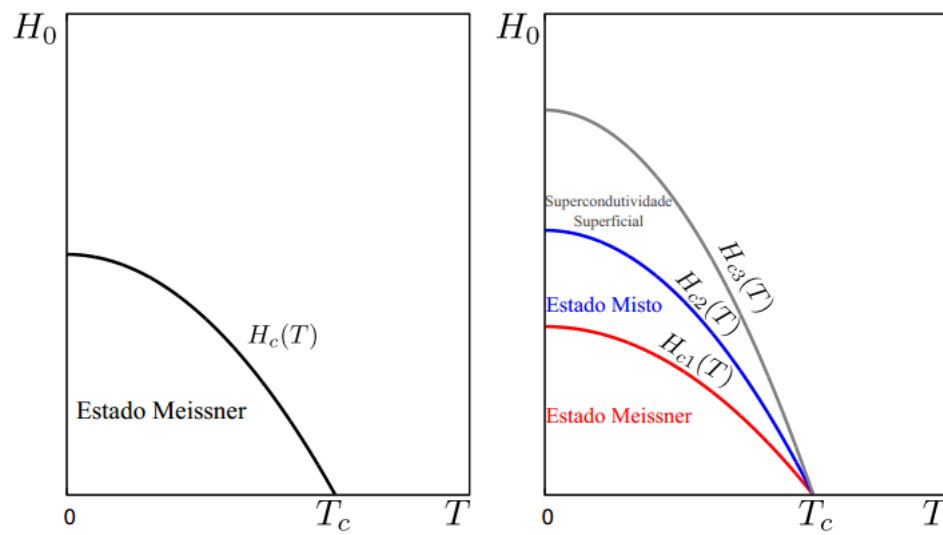
O valor crítico alcançado por  $\mathbf{H}$  é dado por:

$$H_c = \sqrt{\frac{\alpha^2}{\mu_0 \beta}}. \quad (2.50)$$

Valores maiores ou iguais a  $H_c$  destroem a supercondutividade para os supercondutores tipo-I. Essa transição da fase supercondutora para o estado normal ocorre de forma repentina [22] quando o campo magnético aplicado é aumentado.

Os supercondutores tipo-II apresentam dois campos críticos, campo crítico inferior  $H_{c1}$  e campo crítico superior  $H_{c2}$ . O efeito Meissner é observado enquanto o campo aplicado for menor que o campo crítico,  $H < H_{c1}$ . Quando  $H_{c1} < H < H_{c2}$ , temos o estado misto onde há penetração parcial do campo aplicado. A região  $H_{c2} < H < H_{c3}$  apresenta estado normal no interior da amostra e a supercondutividade é observada numa camada na borda do supercondutor [22], Figura 2.7, conhecida como supercondutividade superficial.

**Figura 2.7** Campos críticos em função da temperatura para supercondutores do tipo-I(esquerda) e do tipo-II(direita) [22].



# Supercondutores Ferromagnéticos

Neste capítulo apresentamos a parte central deste trabalho, onde exploramos os supercondutores ferromagnéticos com mais detalhes. Começamos introduzindo alguns conceitos iniciais que podem ajudar a nos situar no problema fenomenológico que vem logo a seguir. Desenvolvemos a teoria de Ginzburg-Landau para os supercondutores ferromagnéticos e em seguida apresentamos e discutimos os resultados e os diagramas de fase obtidos.

## 3.1 Conceitos Iniciais

Muitas pesquisas em supercondutividade destinam-se ao estudo do comportamento de sistemas supercondutores sob ação de um campo magnético. Já sabemos que a resposta a aplicação de campo magnético é o diamagnetismo que todo material supercondutor apresenta. A procura pelo entendimento da supercondutividade tem levado a descobertas cada vez mais intrigantes, tal como os supercondutores de alta temperatura crítica e os supercondutores ferromagnéticos [8].

Os supercondutores clássicos são todos do tipo *s-wave* e consistem em elementos puros, ligas metálicas, compostos intermetálicos e iônicos. Suas propriedades são explicadas pela teoria BCS. Os supercondutores de alta temperatura crítica apresentam o par de Cooper do tipo *d-wave* e possuem propriedades anisotrópicas. Ainda há outros tipos de materiais que são classificados como supercondutores não convencionais e exóticos [23].

A ocorrência do par de Cooper acontece quando elétrons fluem na rede cristalina, isso cria uma deformação atrativa na rede, comumente chamada de fônon, causando uma concentração de ions positivos que atrai um elétron em direção a esta deformação, e o novo elétron acelera em direção a rede. Normalmente, dois elétrons não podem se aproximar um do outro por causa

da forte repulsão coulombiana. No entanto, Leon Cooper sugeriu em 1956 que, dentro de um sólido metálico, dois elétrons poderiam vencer essa repulsão mútua com a ajuda de uma excitação da rede cristalina do material.

Em 1972, supercondutividade não-convencional devido a  $p$ -wave (triplete de spin) par de Cooper foi descoberto experimentalmente num alcance de temperatura extremamente baixo (na ordem de  $mK$ ), em contraste com a teoria convencional dos supercondutores, onde pares de elétrons eram formados pela interação elétron-elétron devido uma troca virtual de fônon.

De uma forma geral, a supercondutividade e o magnetismo se tratam de fenômenos competitivos, reciprocamente excludentes. O interesse por este efeito entre os fenômenos aqui estudados, foi de estima de Ginzburg, que em 1957 foi o primeiro a ressaltar o caráter oposto desses dois fenômenos em um trabalho sobre ferromagnetismo e supercondutividade [11]. Ginzburg concluiu que apesar das dificuldades observadas decorrentes da coexistência da supercondutividade e ferromagnetismo, o estado supercondutor pode existir mesmo na presença de magnetismo.

Afim de entender a complexidade entre a interação da fase supercondutora e ferromagnética, recordamos que uma pequena quantidade de impurezas destrói a supercondutores convencionais ( $s$ -wave) quebrando o par de elétrons de Cooper o qual possuem spins opostos (efeito de impureza paramagnética). Desta mesma forma, a fase ferromagnética destrói supercondutividade convencional devido a presença de uma magnetização espontânea  $\mathbf{M}$ , onde os elétrons do par de Cooper se orientam na direção de  $\mathbf{M}$  a fim de diminuir a energia de Zeeman. A magnetização  $\mathbf{M}$  induz um campo de indução magnética menor que o campo crítico [11], mesmo na ausência de campo externo. Portanto, ferromagnetismo dificilmente coexiste com supercondutores convencionais.

A descoberta de supercondutividade em metais ferromagnéticos fracos, tal como  $UGe_2$ ,  $URhGe$  e  $ZrZn_2$  tem despertado bastante interesse no estudo da coexistência entre supercondutividade e ferromagnetismo. A explicação para essa coexistência é atribuída aos elétrons de condução nesses compostos [27]. Sabemos que em materiais ferromagnéticos os spins estão alinhados paralelamente, enquanto nos supercondutores convencionais os elétrons estão condensados em pares de Cooper com spin alinhados antiparalelamente, ficando claro que pa-



reamento singleto de spin não é consistente com ferromagnetismo. Assim, entendemos que os elétrons nos supercondutores ferromagnéticos formam pares de Cooper spin tripleto, permitindo momentos magnéticos uniformes [3, 27].

<b>Material</b>	<b>Estrutura</b>	$T_f$ (K)	$T_c$ (K)
<i>UGe<sub>2</sub></i>	ortorrômbica	53	1
<i>URhGe</i>	ortorrômbica	9,5	0,25
<i>UCoGe</i>	ortorrômbica	3	0,6

Tabela 3.1: Materiais que apresentam propriedades supercondutoras ferromagnéticas.  $T_f$ , temperatura de Curie;  $T_c$ , temperatura crítica

Neste trabalho descrevemos apenas aspectos da coexistência de ferromagnetismo e supercondutividade não-convencional, baseado em resultados experimentais [19, 7] nos compostos *UGe<sub>2</sub>*, *URhGe* e *UCoGe*; os quais apresentam diagrama de fase  $P - V$  com a fase supercondutora coexistindo com a ferromagnética. Esses compostos apresentam diferentes diagramas de fases, porém a supercondutividade ocorre no domínio da fase ferromagnética para os três compostos [20, 7]. A presença de supercondutividade nesses materiais é um fenômeno não trivial e difícil de explicar a partir de teorias já existentes, então foi necessário recorrermos a conceitos de interpretação de dados experimentais.

Nos materiais estudados, a supercondutividade é produzida e deve coexistir com o ferromagnetismo. Os mesmo elétrons que criam a banda ferromagnética são os responsáveis pela supercondutividade [24, 23], entendido como fenômeno tripleto ao contrário do pareamento spin-singleto. Todos os compostos mencionados são ferromagnetos itinerantes onde a temperatura de transição de fase (temperatura de Curie  $T_f$ ) ferromagnética é muito maior que a temperatura de transição (temperatura crítica da supercondutividade  $T_{FS}$ ) do ferromagnetismo para o estado de coexistência [20, 7]. Descrever o comportamento dessa banda de elétrons num nível microscópica pode ser investigado a partir da teoria de flutuações de spin e *heavy fermion* supercondutores [23]. Apesar da importância em estudar esses compostos microscopicamente, é mais prático confinar nossa investigação no nível fenomenológico.

A partir de experimentos [19], é possível concluir com base nos dados do comprimento de coerência e do gap supercondutor que o par de Cooper é spin tripleto nesses compostos,

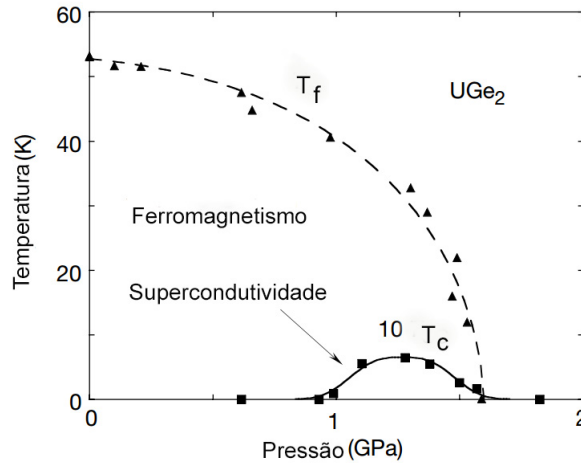
embora o mecanismo desse pareamento ainda não seja claro. Também concluímos a partir dos experimentos que a supercondutividade só pode ser observada no domínio ferromagnético e em baixas temperaturas, uma vez que a supercondutividade aparece devido o parâmetro de ordem ferromagnético  $\mathbf{M}$  e não existiria sem o mesmo. Essa coexistência é possível para par de Cooper spin tripleto, onde os spins estão paralelamente apontados em relação ao outro e seu giro ao longo do vetor da magnetização espontânea  $\mathbf{M}$  não causa a quebra do par, mas estabiliza eles estimulando sua criação.

A partir dos compostos estudados, sabe-se que os elétrons da camada  $5f$  são os responsáveis por apresentarem o comportamento ferromagnético e supercondutor, uma vez que são altamente localizados [13]. Ginzburg ainda afirma [11] que este comportamento antagônico ocorre se os íons magnéticos estão distantes dos pares de Cooper. Alegando que os elétrons da camada interna estão associados ao ferromagnetismo enquanto a supercondutividade é responsável pelas camadas mais externas da estrutura eletrônica de um sólido [10]. Porém, verificou-se [19] que em alguns compostos binários ( $UGe_2$ ), os mesmos elétrons são responsáveis pelas propriedades magnéticas e supercondutoras.

Em meados do ano 2000, a existência do estado supercondutor spin tripleto no composto  $UGe_2$  foi observada. Onde a supercondutividade é estabilizada dentro da fase ferromagnética, com temperatura crítica próximo de  $1K$ , em altas pressões; e temperatura de Curie em torno de  $53K$  para pressão ambiente [17]. O diagrama de fase, temperatura versus pressão, da estrutura  $UGe_2$  está representado na Figura 3.1; mostrando que, na presença de pressão, a temperatura de transição ferromagnética diminui até a fase ferromagnética ser totalmente suprimida. O fato interessante nesta figura é a observação da supercondutividade em temperaturas inferiores a  $1K$  ainda na presença da fase ferromagnética, podendo ser observado o “ domo ” supercondutor. Concluiu-se que a magnetização espontânea da fase ferromagnética estimula a supercondutividade, estando presente a fase ferromagnética em temperaturas maiores que a fase supercondutora e coexistindo com a supercondutividade em todo domínio abaixo de  $T \approx 1K$  [21, 3].

Outros dois supercondutores ferromagnéticos descobertos,  $URuGe$  e  $UCoGe$ , apresentam temperatura de Curie  $T_f$  aproximadamente iguais a  $9,5K$  e  $3K$ , respectivamente; são considerados materiais ferromagnéticos fracos e a fase supercondutora aparece em pressão ambiente.

**Figura 3.1** Diagrama de fase *temperatura versus pressão* para o composto  $UGe_2$ , onde  $T_f$  denota a temperatura de Curie, enquanto que  $T_c$  corresponde à temperatura de transição supercondutora. A região delimitada pelos quadrados corresponde a fase de coexistência supercondutora ferromagnética e os triângulos correspondem a linha de transição da fase normal para a ferromagnética. No diagrama,  $T_c$  está multiplicada por um fator 10 [19].



Com o aumento da pressão, o colapso da supercondutividade ocorre em torno de  $4\text{GPa}$  para o  $URuGe$  enquanto a linha de transição de fase do  $UCoGe$  cresce até  $1,1\text{GPa}$  [20], causando o colapso da ordem ferromagnética enquanto a supercondutividade está presente na região paramagnética. Diferentemente do  $UGe_2$  que a supercondutividade desaparece quando está na fase paramagnética, existindo apenas na fase ferromagnética [2]. Todos esses três compostos apresentam estrutura cristalina ortorrômbica caracterizada por três eixos cristalográficos mutuamente perpendiculares, mas cada um com um comprimento, Tabela 3.1.

Em resumo, os compostos estudados pertencem a classe dos materiais denominados *férmions pesados*, ou compostos uranoides. Essa classe de materiais apresenta compostos intermetálicos que possuem os elementos químicos com as camadas  $f$  não-estáveis, polarização de elétrons, dando origem ao magnetismo pelos elétrons de banda de condução. Nos férmions pesados, são esses elétrons os responsáveis tanto pelo fenômeno da supercondutividade quanto pelo ferromagnetismo [22], sendo um fenômeno presente em toda a amostra. Isto deve ser considerado para as formulações microscópicas ou fenomenológicas. Ainda vale ressaltar que os férmions pesados possuem uma forte interação spin-órbita, responsável pela propriedade magnética anisotrópica [10]. As bandas de energia estão separadas em *spin up* e *spin down* devido

a este forte campo de troca gerado. Isso implica que há uma grande diferença de energia nos elétrons de spin opostos, tornando improvável o pareamento no estado singleto. O que nos leva a confirmar que a supercondutividade se dá pelo pareamento no estado tripleto [19, 2].

### 3.2 Modelo Fenomenológico

Em nosso estudo fazemos uma análise termodinâmica de sistemas de ordem ferromagnética itinerante e supercondutora devido o pareamento de Cooper *spin-triplet* da mesma banda de elétrons, os quais são responsáveis pela magnetização espontânea. Mostramos o diagrama de fases  $T - P$  e demonstramos dois tipos de comportamento termodinâmico. Propomos um modelo onde os parâmetros da energia livre possuem dependência de  $P$ , estando os resultados em conformidade com as previsões teóricas na forma do diagrama de fases.

Nossa análise é feita pela teoria de transição de fase. Análise dos efeitos de flutuações e correlações quânticas não são consideradas. Porém, já é sabido que a teoria de Ginzburg-Landau é baseada nas propriedades macroscópicas de um sistema, reproduz propriedades microscópicas e podemos obter as equações de London para os supercondutores a partir da mesma. A teoria de GL é modificada, uma vez que desejamos obter um funcional coerente com a simetria do sistema, devido a presença da magnetização. Os termos que descrevem a energia do estado magnético e a interação da magnetização com o parâmetro supercondutor devem ser considerados já que a transição supercondutora se dá na presença de ferromagnetismo [10].

Uma vez que a energia livre é obtida sobre toda a amostra, temos a forma geral da energia livre de Ginzburg-Landau

$$F[\Psi, \mathbf{M}] = \int d^3x f(\Psi, \mathbf{M}), \quad (3.1)$$

sendo o parâmetro de ordem supercondutor,  $\Psi = \{\psi_j; j = 1, 2\}$ , um espinor de duas componentes; e  $\mathbf{M} = (m_1, m_2, m_3)$  é a magnetização, um vetor com três componentes.

A forma geral da energia livre de Ginzburg-Landau (ou funcional de energia livre) para os

supercondutores ferromagnéticos se apresenta como a soma dos seguintes termos:

$$f(\Psi, \mathbf{M}) = f_S(\Psi) + f_F(\mathbf{M}) + f_I(\Psi, \mathbf{M}) + \frac{1}{2}\mu_0 \mathbf{h}^2, \quad (3.2)$$

temos que  $\mathbf{H}$  é o campo magnético externo e está relacionado com a indução magnética  $\mathbf{B}$  através da relação  $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ . O último termo de Eq. 3.2 é comumente utilizado para descrever efeitos paramagnéticos e diamagnéticos no supercondutor [10].

O primeiro termo da Eq. 3.2,  $f_S$ , é referente a densidade de energia livre para os supercondutores na ausência de magnetização e campo magnético externo [20], podendo ser expresso como uma expansão até a quarta ordem no parâmetro supercondutor  $\Psi$ , incluindo os termos de anisotropia.

$$f_S(\Psi) = f_{ks} + a_s |\Psi|^2 + \frac{b_s}{2} |\Psi|^4 + \frac{u_s}{2} |\Psi^2|^2 + \frac{v_s}{2} (|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) + \bar{\eta}_s (\Psi^\dagger \sigma_z \Psi)^2. \quad (3.3)$$

A energia livre acima,  $f_S$ , para um sistema supercondutor, é obtida seguindo a classificação do estado supercondutor para o pareamento tripleto de spin, deduzido a partir de uma abordagem geral de simetria de grupo [20].

O termo  $f_{ks}$ , o primeiro termo da Eq. 3.3, se refere a dependência espacial do parâmetro de ordem supercondutor [20] e tem a seguinte forma:

$$f_{ks}(\Psi) = K_1 (D_i \psi_j)^* (D_i \psi_j) + K_2 [(D_i \psi_i)^* (D_j \psi_j) + (D_i \psi_j)^* (D_j \psi_i)] + K_3 (D_i \psi_i)^* (D_i \psi_i), \quad (3.4)$$

onde  $K_j$  está relacionado ao tensor de massa efetiva dos pares de Cooper anisotrópicos e  $D_j$  é a derivada covariante  $D_j = -i\hbar\partial/\partial x_i + 2|e|/cA_j$  denotada pela repetição dos índices [?, 10].

Os parâmetros fenomenológicas  $a_s$  e  $b_s$ , em Eq. 3.3, equivalem a  $\alpha$  e  $\beta$  respectivamente; os quais já foram comentados no capítulo anterior quando introduzimos a teoria de Ginzburg-Landau. Serão representados como  $a_s = \alpha_s [T - T_c(P)]$  e  $b_s > 0$ ; sendo  $T_c(P)$  a temperatura crítica para o sistema no supercondutor puro. Os parâmetros  $u_s$  e  $v_s$  descrevem respectivamente as anisotropias do par de Cooper e da rede cristalina, sendo considerados como constantes não determinadas do material em específico, podendo ser obtidas experimentalmente. O termo

$\bar{\eta}_s = \eta_s(P - P_c)$  é referente a interação para a ordem hastática e  $\sigma$  representa a matriz de Pauli.

A densidade de energia ferromagnética,  $f_F$ , é representada por uma expansão de quarta ordem de  $\mathbf{M}$

$$f_F(\mathbf{M}) = c_f \sum_{j=1}^3 |\nabla_j M_j|^2 + a_f |\mathbf{M}|^2 + \frac{b_f}{2} |\mathbf{M}|^4, \quad (3.5)$$

onde temos o parâmetro  $a_f = \alpha_f [T^n - T_f^n(P)]$ , com  $\alpha_f > 0$ ;  $n = 1$  para  $a_f$  na forma usual de Landau e  $n = 2$  para teoria de flutuações de spin. Em nossos cálculos consideramos apenas  $n = 1$ . Temos a temperatura  $T$  e a temperatura de Curie  $T_f(P)$  em pressão  $P$  [20].

A supercondutividade ferromagnética nos compostos  $UGe_2$ ,  $UCoGe$  e  $URhGe$  é dependente da pressão e isso é levado em conta pela dependência da temperatura Curie do sistema ferromagnético puro na pressão  $P$  [20]. Consideramos uma dependência linear da temperatura crítica com a pressão no modelo estudado [7] e deixamos que magnetização seja uniforme para que  $\nabla_j M_j = 0$ .

O terceiro termo da Eq. 3.2, é responsável pelos parâmetros de interação entre a ordem supercondutora e ferromagnética [20, 24, 23], sendo representado pela equação a seguir:

$$f_I(\Psi, \mathbf{M}) = \gamma_0 \mathbf{M} \cdot (\psi^\dagger \sigma \psi^*) + \delta \mathbf{M}^2 |\Psi|^2. \quad (3.6)$$

A interação entre o vetor magnetização  $\mathbf{M}$  e o parâmetro de ordem supercondutor  $\psi$  se dá a partir dos dois termos de  $f_I$ . O termo  $\gamma_0$  garante que a supercondutividade ocorra e é dominante nesta equação, sendo representado como  $\gamma_0 \approx J$  ( $J > 0$ , parâmetro de exchange ferromagnético) [20]. Apenas no caso de acoplamento de sistema forte o termo quadrático da Eq. 3.6 é relevante [10]. O  $\delta$  torna o modelo mais realístico no limite de acoplamento [21].

Neste trabalho estudamos fases uniformes na ausência de campo magnético externo,  $\mathbf{H} = 0$ . Além disso, o vetor magnetização  $\mathbf{M}$  pode produzir vortex na fase supercondutora no caso dos supercondutores tipo-II. A investigação do estado de vortex, ou estado não uniforme, levaria em consideração as variações espaciais do parâmetro de ordem  $\psi$  e isto está além de nosso estudo. Focamos no estado fundamental, nas fases uniformes, sobre a possível fase estável supercondutora a qual coexiste com a fase ferromagnética. Assim, os parâmetros da ordem supercondutora e magnética dependerão apenas da temperatura e da pressão [20, 19]. Neste

trabalho também eliminamos a dependência do vetor espacial  $\mathbf{x} \in V$ . Para nosso estudo, a energia livre 3.2 é conveniente.

A forma geral do funcional de energia livre, depois que introduzimos cada termo da equação, se apresenta como

$$f(\Psi, \mathbf{M}) = a_s |\Psi|^2 + \frac{b_s}{2} |\Psi|^4 + \frac{u_s}{2} |\Psi^2|^2 + \frac{v_s}{2} (|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) + a_f |\mathbf{M}|^2 + \frac{b_f}{2} |\mathbf{M}|^4 + i\gamma_0 \mathbf{M} \cdot (\boldsymbol{\psi} \times \boldsymbol{\psi}^*) + \delta \mathbf{M}^2 |\boldsymbol{\psi}|^2. \quad (3.7)$$

Afim de reduzir o número de parâmetros e facilitar as considerações que serão feitas [20, 7], apresentamos as componentes do parâmetro de ordem supercondutor como

$$\psi_j = \phi_j e^{i\theta_j}, \quad (3.8)$$

na representação da forma polar de um número complexo, temos que  $|\psi_j| = \phi_j$  para  $\phi_j \geq 0$ .

Resolvendo os termos  $|\Psi|^2$ ,  $|\Psi|^4$  e  $|\Psi^2|^2$ , teremos

- $|\Psi|^2 = \Psi^\dagger \cdot \Psi = \begin{pmatrix} \psi_1^* & \psi_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 = \phi_1^2 + \phi_2^2;$
- $|\Psi|^4 = |\Psi|^2 \cdot |\Psi|^2 = (\phi_1^2 + \phi_2^2)^2;$
- $|\Psi^2|^2 = (\Psi^\dagger \cdot \Psi) \cdot (\Psi^\dagger \cdot \Psi)^* = (\psi_1^{2*} + \psi_2^{2*}) (\psi_1^2 + \psi_2^2) = \phi_1^4 + \phi_2^4 + 2\phi_1^2 \phi_2^2 [\cos^2(\theta_{12}) - \sin^2(\theta_{12})].$

Onde  $\theta_{12}$  é a fase entre os parâmetros  $\phi_1$  e  $\phi_2$ .

Tornamos a parte uniforme da densidade de energia livre  $f$  adimensional, a partir das relações abaixo [20, 7]:

$$\bar{f} = \frac{f}{b_f M_0^4}, \quad (3.9)$$

$M_0$  é o valor de  $M$  correspondente ao sistema magnético puro ( $\Psi = 0$ ) em  $T = P = 0$ , representado como  $M_0 = [\alpha_f T_{f0}/b_f]^{1/2}$  [20, 7]. Os parâmetros de ordem, em suas formas adimen-

sionais, se tornam:

$$M_j = \frac{1}{b_f^{1/4}} m_j, \quad (3.10)$$

$$\phi_j = \frac{|\psi_i|}{b^{1/4}}, \quad (3.11)$$

$b$  será representado como  $b = b_s + u_s + v_s$ ; e  $a_s$ , presente no segundo termo da Eq. 3.3, numa forma adimensional se torna  $r = a_s/\sqrt{b}$  [7]. O parâmetro adimensional da anisotropia do par Cooper  $\omega = u_s/b$  e a anisotropia do cristal  $v = v_s/b$  [20, 7], podem assumir valores positivos ou negativos. O parâmetro termodinâmico  $a_f$  se torna  $t = a_f/\sqrt{b_f}$ . Os dois parâmetros presentes na Eq. 3.6, responsáveis pela interação entre supercondutividade e ferromagnetismo, assumem as seguintes formas adimensionais:  $\gamma = \gamma_0/\sqrt[4]{4\sqrt{b}}$  e  $\gamma_1 = \delta/(\sqrt{bb_f})$ . Todos os parâmetros estão representados em sua forma adimensional na Tabela 3.2.

Parâmetros	Normalização	Significado
$r$	$a_s/\sqrt{b}$	Variável termodinâmica de temperatura
$t$	$a_f/\sqrt{b_f}$	Variável termodinâmica de pressão
$\omega$	$u_s/b$	Anisotropia da rede ortorrômbica e cúbica
$\gamma$	$\gamma_0/\sqrt[4]{4\sqrt{b}}$	Constante de acoplamento da supercondutividade com magnetismo
$\gamma_1$	$\delta/(\sqrt{bb_f})$	Parâmetro estabilizador de modelo
$v_s$	$v_b$	Anisotropia da rede cristalina
$a_s$	$\alpha_s [T - T_c(P)]$	
$a_f$	$\alpha_f [T - T_f(P)]$	
$b$	$b_s + u_s + v_s$	

Tabela 3.2: Parâmetros físicos e fenomenológicos presentes nas equações de densidade de energia e seus respectivos significados

Após apresentar todos os parâmetros numa forma adimensional, usamos as definições 3.10, 3.11 e todas as outras citadas para representar a densidade de energia livre como:

$$\begin{aligned} \bar{f} = & \eta (\phi_1^2 - \phi_2^2)^2 - 2\omega\phi_1^2\phi_2^2 \sin^2(\theta_{12}) - 2\gamma m_2\phi_1\phi_2 \sin(\theta_{12}) + 2\gamma m_1\phi_1\phi_2 \cos(\theta_{12}) \\ & + \gamma_1 (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) (\phi_1^2 + \phi_2^2) + \gamma m_3 (\phi_1^2 - \phi_2^2) + (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) t \\ & + \frac{1}{2} (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2)^2 + r (\phi_1^2 + \phi_2^2) - v\phi_1^2\phi_2^2 + \frac{1}{2} (\phi_1^2 + \phi_2^2)^2. \end{aligned} \quad (3.12)$$



A partir da densidade de energia Eq. 3.12 vamos obter os diagramas de fase  $r - t$  ( $T - P$ ) em unidades normalizadas. O problema de descrever os diferentes diagramas de fase da Eq. 3.12 requer encontrar o ponto crítico que faz a energia livre um mínimo. Isso significa calcular os pontos estacionários usando o princípio variacional através da seguinte equação

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} = 0, \quad (3.13)$$

para  $\{x_i\} = (\phi_1, \phi_2, m_1, m_2, m_3, \theta_{12})$ . Determinamos a estabilidade das fases obtidas a partir da matriz:

$$A_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (3.14)$$

onde a matriz Hessiana precisa ser positiva e definida no ponto crítico.

Neste trabalho não discutimos todas as fases descritas pela Eq. 3.12. Porém, algumas casos mais gerais serão discutidos na seção que segue. Com o objetivo de obter diferentes densidades de energia a partir de Eq. 3.12, atribuímos todas as condições possíveis para os parâmetros físicos  $\phi$  e  $\mathbf{M}$  para então eliminar as expressões equivalentes, com o objetivo de estudar diferentes condições e possibilidades para a ocorrência dos supercondutores ferromagnéticos.

Pode ser observado na Tabela 3.3.3, no final deste capítulo, que cada expressão de densidade de energia apresenta a mesma conjuntura para o parâmetro fenomenológico e supercondutor, diferenciando apenas na diferença da fase  $\theta_{12}$ , a qual classificamos como subcasos. Na coluna direita da Tabela 3.3.3 temos a densidade de energia livre referente a cada condição proposta na primeira coluna a esquerda. Alguns casos não possui os quatro subcasos possíveis, isso ocorre pois aquela densidade de energia já é equivalente a alguma outra de diferente caso, assim pudemos otimizar o trabalho realizado.

As constantes fenomenológicas tem seus valores determinados a partir do material a ser estudado. Esses parâmetros fenomenológicos são definidos como sendo fixos  $\lambda = (\omega, \nu, \gamma, \gamma_1)$ , o significado de cada termo pode ser consultado na tabela 3.2. Os valores atribuídos para os parâmetros fenomenológicos são;  $\nu = -0,18$ ,  $\omega = -0,29$ ,  $\gamma = 0,51$ , e  $\gamma_1 = 0,49$  [20, 19, 23]. A diferença de fases entre  $\theta_1$  e  $\theta_2$  será representado apenas como  $\theta_{12}$ , uma vez que obteríamos os mesmos resultados para  $\theta_1 - \theta_2$  e  $\theta_2 - \theta_1$ . Assim diminuimos o número de equações de sete

para seis.

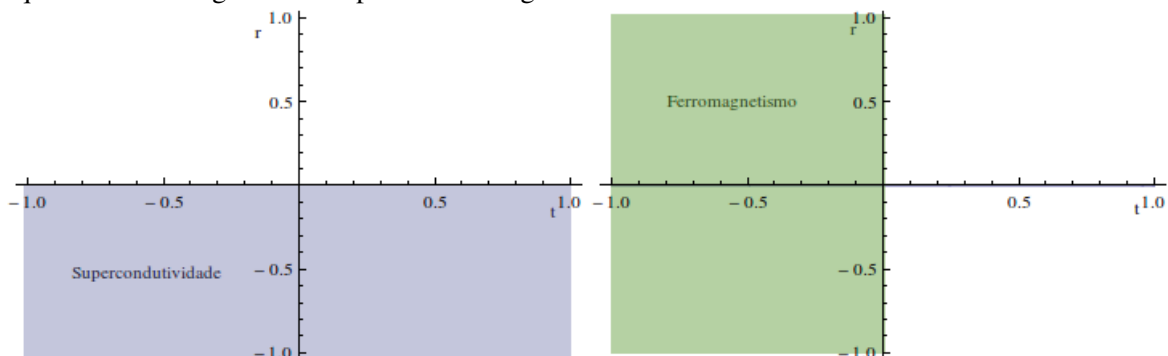
Uma vez que não é fácil estudar a termodinâmica descrita por Eq. 3.2, então as simplificações realizadas foram necessárias com o objetivo de diminuir o número de termos [10].

### 3.3 Diagrama de Fases

Nesta seção mostramos alguns diagramas de fases ( $T - P$ )  $r - t$  em unidades reduzidas. Onde  $r$  e  $t$  representam uma variável termodinâmica de temperatura e pressão, respectivamente; para analisar qualitativamente o regime de validade das fases. Inicialmente, a partir da densidade de energia normalizada Eq. 3.12, para os parâmetros  $\{x_i\} = (\phi_1, \phi_2, m_1, m_2, m_3, \theta_{12})$ , obtivemos um sistema de equações. O problema de descrever os diferentes diagramas de fase da Eq. 3.12 requer encontrar o ponto crítico que torna a energia livre um mínimo. Isso significa calcular os pontos estacionários usando o princípio variacional e avaliar a positividade da matriz Hessiana.

Nos gráficos ilustrativos, Figura 3.2, esperamos explicar o que será possível observar em cada quadrante no diagrama de fases da densidade de energia em função da pressão e temperatura. No diagrama da esquerda temos a representação da fase supercondutora ( $M = 0$ ) para  $r < 0$  e a fase normal para  $r > 0$ . No diagrama da direita, observamos a fase puramente ferromagnética ( $\psi = 0$ ) para  $t < 0$  e a fase normal para  $t > 0$ .

**Figura 3.2** Em condições normais, nós encontramos supercondutividade no terceiro e quarto quadrante; enquanto a fase magnética está presente no segundo e terceiro.



Mantemos nossa atenção voltada ao segundo quadrante, onde é esperado observar a coexistência de supercondutividade e do ferromagnetismo. Os termos de interações  $\gamma$  e  $\gamma_1$ , presentes

na energia livre mantém a supercondutividade acima de sua temperatura crítica, o que nos permite observar a fase supercondutora no segundo quadrante. Para o estudo dos supercondutores ferromagnéticos, assumiremos que a temperatura de Curie  $T_f$  é maior que a temperatura crítica  $T_c$  [21], como discutido anteriormente.

Voltando a atenção para o diagrama ilustrativo da Figura 3.2 onde  $r > 0$ , podemos identificar três fases estáveis. A fase normal, onde  $\psi = M = 0$  e  $t > 0$ . A fase puramente ferromagnética, onde  $\psi = 0$ , para a condição de  $t < 0$ . A terceira fase possível, e nosso objeto de estudo, os supercondutores ferromagnéticos, que devem respeitar as condições:  $\psi_j \neq 0$  e  $M \neq 0$ .

A expressão 3.12 para a energia livre não é tão simples e tem um grande número de soluções para as equações de estado 3.13. Neste trabalho, estudaremos a coexistência em situações simplificadas quando aplicamos algumas condições para os parâmetros. Nas seções a seguir exploramos em detalhes a fase puramente supercondutora, puramente ferromagnética e alguns casos da fase de coexistência. Lembramos que em todos os diagramas de fases obtidos nós fixamos os parâmetros  $\nu = -1,18$ ,  $\omega = -0,29$ ,  $\gamma = 0,51$ ,  $\gamma_1 = 0,49$  e  $\eta = 1$ ; os quais são valores obtidos a partir de dados experimentais [1, 19].

Alguns casos apresentam similaridades no diagrama de fases. A Tabela 3.3 apresenta a paridade das densidades de energias encontradas, o que pode explicar esta similaridade nos casos. Também é possível afirmar a partir da paridade do funcional de energia livre, se a supercondutividade coexiste com o ferromagnetismo. Em nosso estudo, notamos que se todos os parâmetros de uma determinada energia são par, não haverá coexistência causado pela ausência do constante de acoplamento  $\gamma$  (em unidades reduzidas).

*Softwares* computacionais, tal como o *Wolfram Mathematica* e o *MATLAB*, foram os principais instrumentos utilizados para obtenção de resultados numéricos e dos diagramas de fases. Uma aproximação numérica é usada para resolver o sistema de equações e encontrar o mínimo da densidade de energia livre. Foram usadas ferramentas de otimização, como *fminunc*, *fmincon* e funções *fminsearch* do Matlab.

### 3.3.1 Fase Supercondutora

No primeiro modelo simplificado que mostraremos aqui, a magnetização é nula  $\mathbf{M} = 0$ , os parâmetros de ordem supercondutor equivalem a  $\phi_1 = \phi_2 = \phi$  e a diferença de fase  $\theta_{12} = 2\pi$ . A partir destas condições, temos a seguinte densidade de energia para o supercondutor puro:

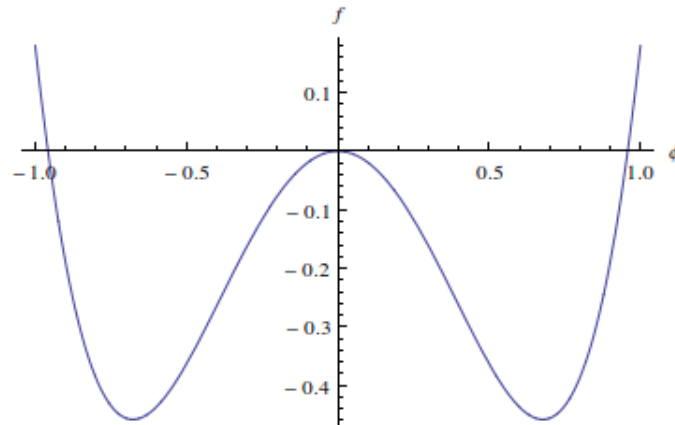
$$\bar{f} = 2r\phi^2 - v\phi^4 + 2\phi^4 = (2r - v\psi^2 + 2\psi^2)\psi^2. \quad (3.15)$$

A Figura 3.4 mostra o gráfico de  $\bar{f}$  em função de  $\phi$ , indicando o estado supercondutor, apresentando um máximo e dois mínimos.

$$\phi = 0, \quad \phi = -\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{v-2}} \quad \text{e} \quad \phi = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{v-2}}. \quad (3.16)$$

Nós temos três pontos críticos, o primeiro é trivial e corresponde ao estado normal. O segundo e terceiro são as raízes do mesmo ponto crítico. O valor de  $r$  deve ser negativo para que haja transição de fase. O denominador das raízes deve ser imaginário ou pelo contrário o parâmetro de ordem não será definido ou será igual a zero (estado normal).

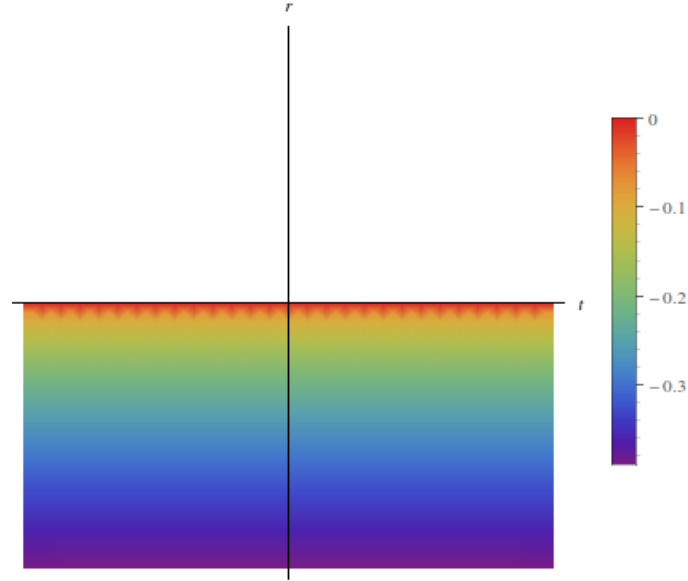
**Figura 3.3** Representação gráfica de 3.15 em função parâmetro  $\phi$ , mostrando dois mínimos e um máximo.



Nos supercondutores, o diagrama de fase apresentará a densidade de energia apenas no terceiro e quarto quadrantes, onde a supercondutividade está usualmente presente, respeitando a condição de que a temperatura nos supercondutores puros deve ser menor que  $T_c$ . Assim,

$r < 0$  já que  $r = \beta(T - T_c)/T_{f0}$  para  $\beta = \alpha\sqrt{b_f/b}/\alpha_f$ .

**Figura 3.4** Diagrama de fases Temperatura - pressão ( $r - t$ ), mostrando a densidade de energia para o estado supercondutor. É possível observar que a densidade de energia para fase supercondutora depende apenas do eixo  $r$  que é dependente da temperatura crítica. Para valores de  $r > 0$  a temperatura crítica  $T_c$  seria maior que a temperatura  $T$ .



### 3.3.2 Fase Ferromagnética

Ainda podemos discutir um caso em que o parâmetro de ordem supercondutor seja nulo,  $\Psi = 0$ , onde há apenas a fase ferromagnética  $\mathbf{M} \neq 0$  e  $\theta_{12} = 2\pi$ . A densidade de energia livre ferromagnética se apresenta como:

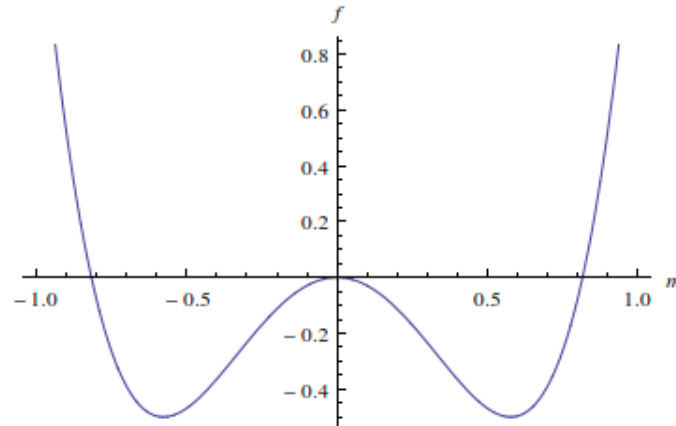
$$\bar{f} = \frac{9m^4}{2} + 3m^2t = \left(\frac{9m^2}{2} + 3t\right)m^2. \quad (3.17)$$

A partir da Eq. 3.17, encontramos os pontos críticos

$$m = 0, \quad m = -\frac{i\sqrt{t}}{\sqrt{3}} \quad \text{e} \quad m = \frac{i\sqrt{t}}{\sqrt{3}}, \quad (3.18)$$

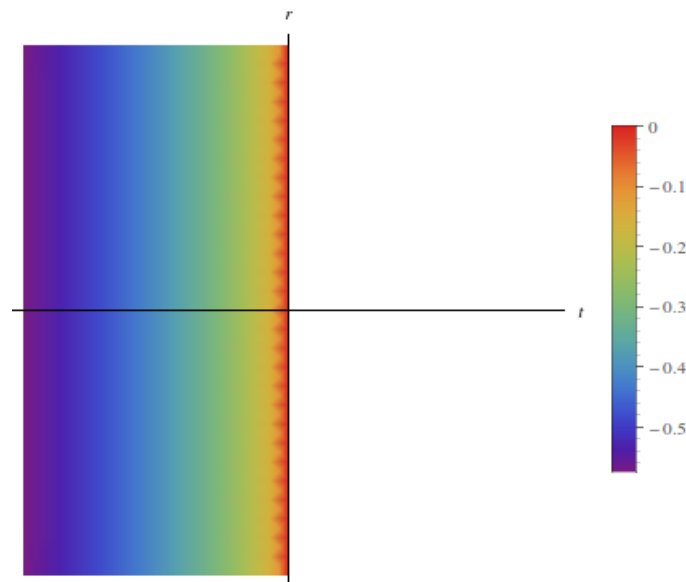
onde o primeiro ponto crítico,  $m = 0$ , representa um máximo e indica a fase normal. Os outros dois pontos são mínimos mostrando que está de acordo com a teoria de Landau, Figura 3.5.

**Figura 3.5** Representação gráfica de 3.17 em função da magnetização  $m$ , mostrando dois mínimos e um máximo de acordo com a teoria de Landau.



A densidade de energia livre na fase ferromagnética, para as condições  $\Psi = 0$ ,  $t < 0$  e  $m_1 = m_2 = m_3 = m$ ; nos permite obter o diagrama de fase, Figura 3.6. Nesta representação, vemos que a fase ferromagnética se encontra no segundo e terceiro quadrante no diagrama de fase  $r - t$ , deixando claro que  $t$  deve ser negativo em resposta a  $t = (T - T_f(P))/T_{f0}$ .

**Figura 3.6** Representação do diagrama de fases temperatura - pressão ( $r - t$ ) para a fase ferromagnética. Onde é possível observar que a fase ferromagnética se encontra no domínio para  $r < 0$ .



### 3.3.3 Fase Supercondutora Ferromagnética

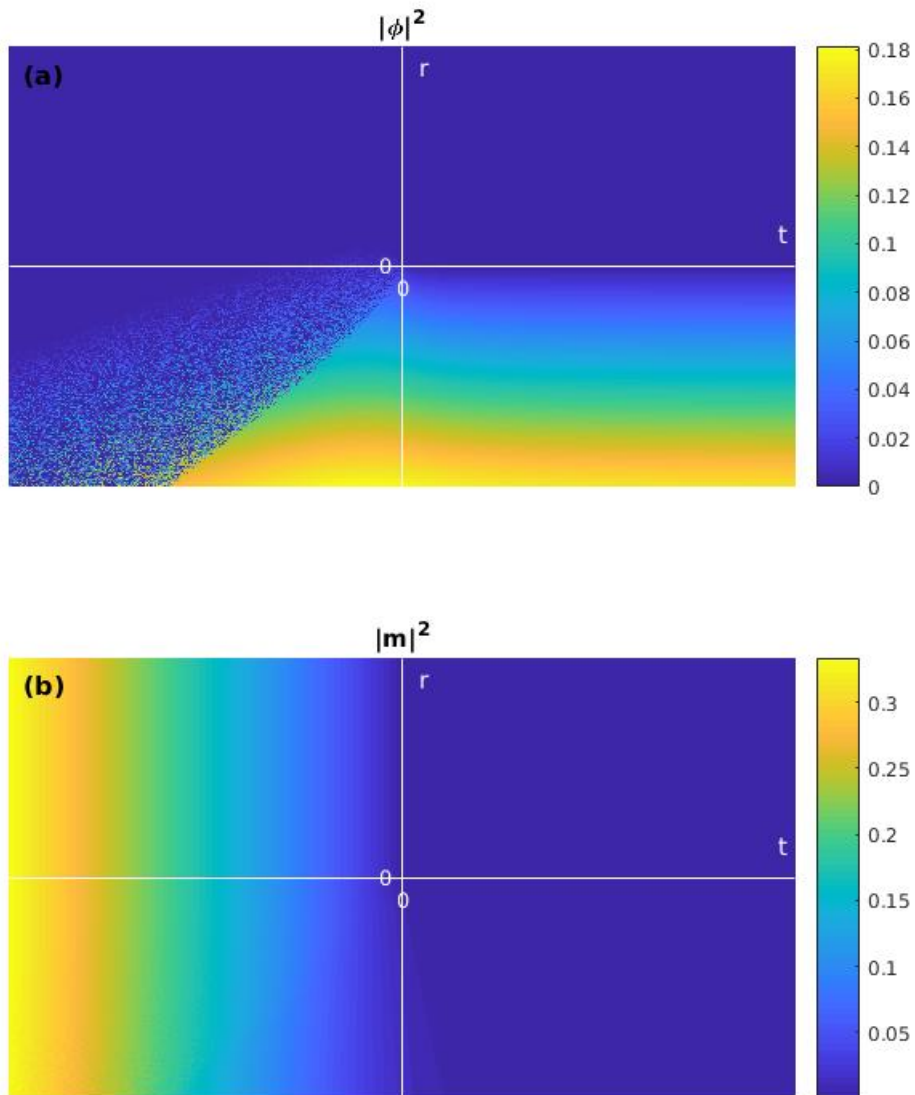
Os dois casos citados nos parágrafos anteriores são os mais simples, pois a amostra seria puramente supercondutora ou puramente ferromagnética. Nesta seção apresentamos alguns casos onde a supercondutividade e o ferromagnetismo podem coexistir. Nos diagramas de fases 3.4 e 3.6, percebemos que o ferromagnetismo está presente no segundo e terceiro quadrante para  $t < 0$ ; enquanto a supercondutividade está presente no terceiro e quarto quadrante para  $r < 0$ .

Inicialmente, antes de entrarmos em detalhes sobre cada condição e parâmetros que serão mostrados, queremos deixar claro como definimos o que chamaremos de *casos* ou *subcasos* a partir deste ponto. Temos o funcional de energia livre normalizado Eq. 3.12, o qual aplicamos algumas condições com o objetivo de diminuir o número de termos para a energia que vamos estudar, assim obtemos algumas expressões para a densidade de energia que chamamos de casos mais simplificados para o estudo da coexistência entre a fase supercondutora e ferromagnética. Para cada caso fixamos condições para o parâmetro supercondutor  $\psi$  e para a magnetização  $m$ . Os subcasos de um caso são diferentes expressões da densidade de energia que pode assumir os seguintes valores para  $\theta_{12}$ :  $0$ ,  $\pi$ ,  $\pi/2$  e  $-\pi/2$ . A Tabela 3.3.3, no final deste capítulo, aponta as diferentes densidade de energia possíveis para o parâmetro de ordem supercondutor  $\Psi$ , a magnetização  $\mathbf{M}$  e os valores atribuídos a  $\theta_{12}$ .

#### Caso 2

A ocorrência da coexistência para as condições referente ao caso 2.1 da tabela 3.3.3. Onde  $m_1 = m_2 = m_3$ ,  $\phi_1 = 0$ ,  $\phi_2 = \phi$  e  $\theta_{12} = 0$ .

**Figura 3.7** (a) Representa o diagrama do módulo do parâmetro supercondutor  $|\phi|^2$  em relação a variável termodinâmica de pressão e temperatura  $t$  e  $r$ , respectivamente. Onde é possível observar que no domínio ferromagnético para  $r > 0$ , a supercondutividade está presente. (b) Representa o domínio ferromagnético para  $t < 0$ .



No diagrama 3.7, a figura (a) nos mostra que a supercondutividade está entrando na fase ferromagnética onde  $r > 0$ . Isto nos prova que para as condições propostas neste caso, a super-



condutividade está presente na fase ferromagnética.

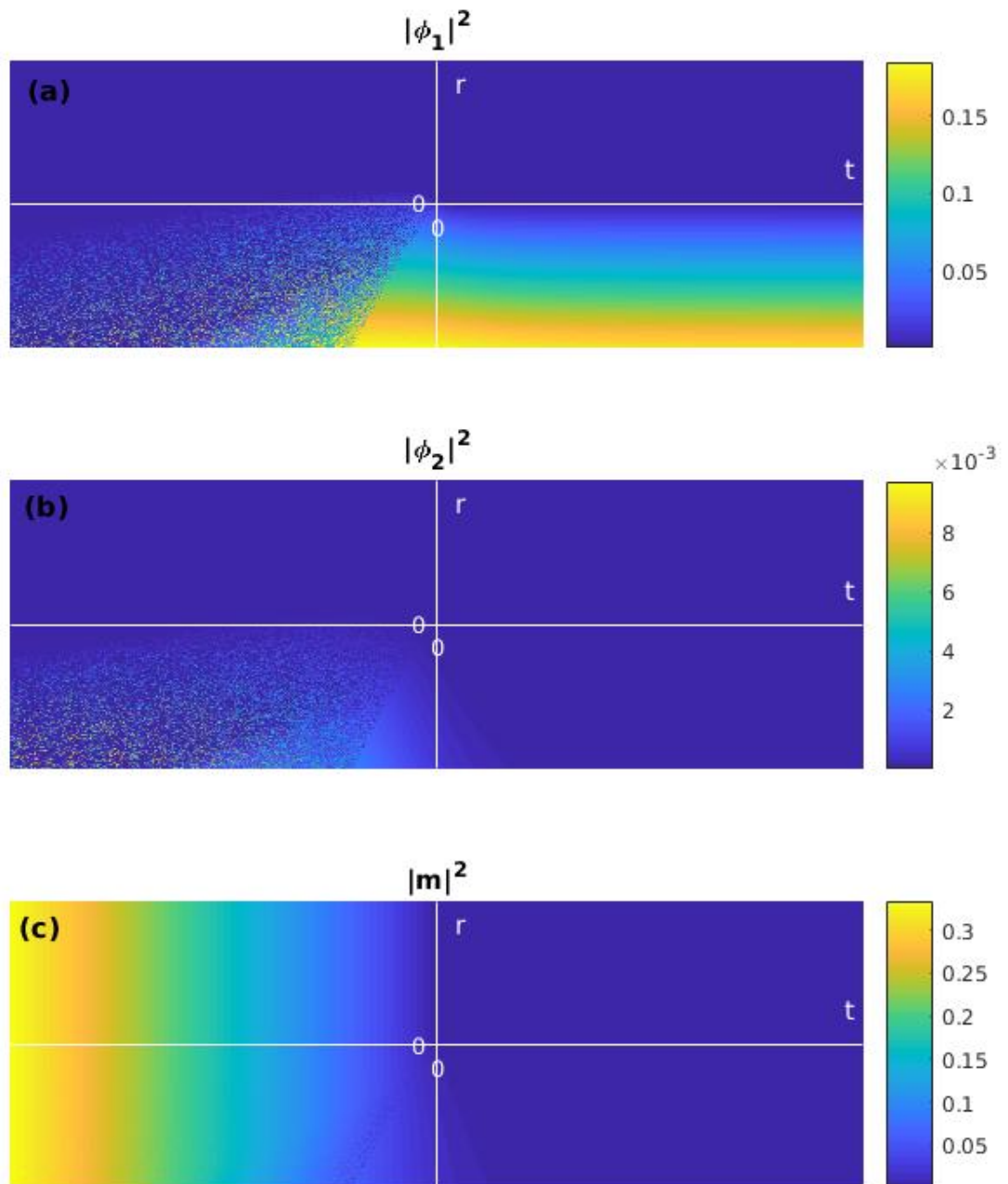
### Caso 3

No terceiro caso da tabela 3.3.3 a diferença de fase  $\theta_{12}$  assume os valores  $0, \pi, \pi/2$  e  $-\pi/2$ . Assim contaremos com quatro diferentes densidades de energia as quais intitulamos cada energia como um subcaso. Para o caso 3 todas as componentes do vetor magnetização são equivalentes  $m_1 = m_2 = m_3 = m$  e o parâmetro supercondutor difere  $\phi_1 \neq \phi_2 \neq 0$ .

- Caso 3.1

Para  $\theta_{12} = 0$ , os dois primeiros diagramas de fase (a) e (b) nos mostra a densidade do parâmetro de ordem  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , respectivamente, em função de da variável termodinâmica  $r$  e  $t$ . No diagrama (c) temos a densidade ferromagnética também em função de  $r$  e  $t$  3.8. Como observado experimentalmente [19], a supercondutividade prevalece para  $r < 0$  assim como o ferromagnetismo prevalece para  $t < 0$ . No diagrama (c) o ferromagnetismo está presente na fase supercondutora onde normalmente não seria possível se observado para  $r < 0$  e  $t > 0$ .

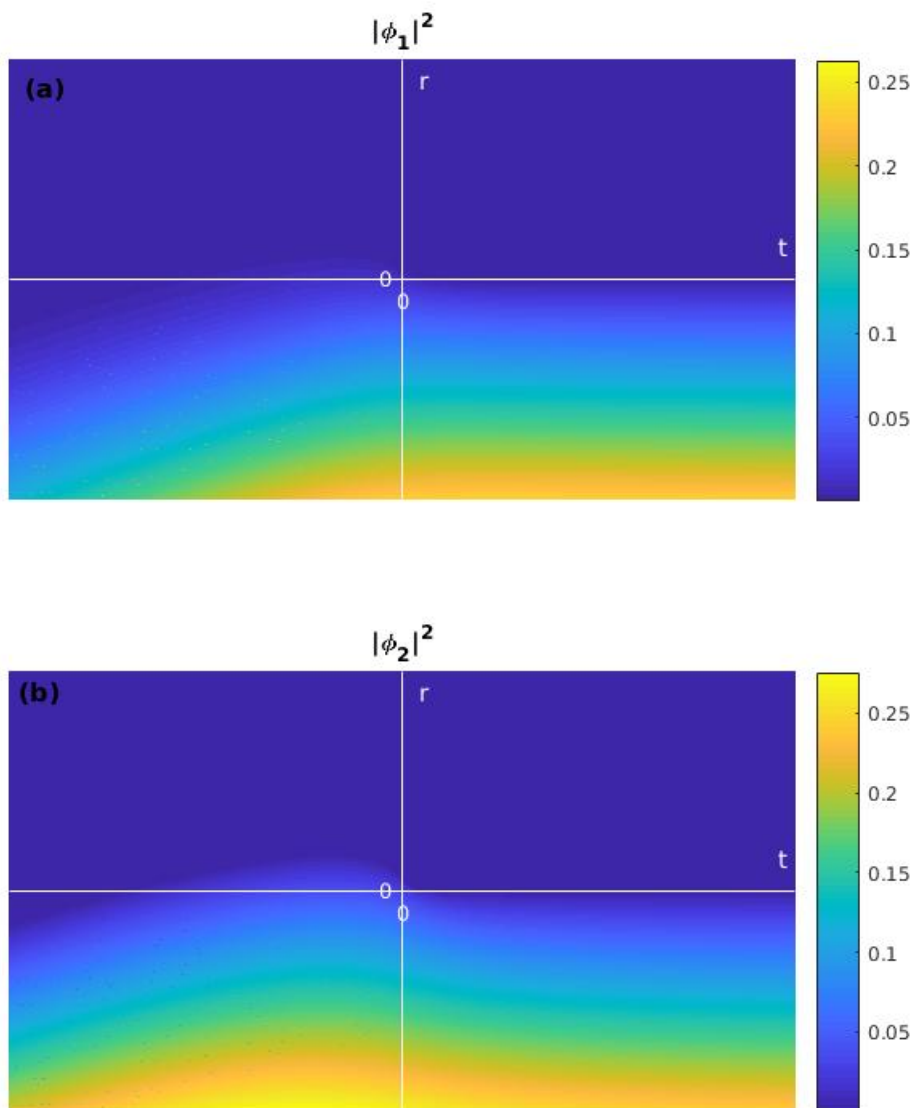
**Figura 3.8** Os dois primeiros diagramas (a) e (b) representam a densidade do parâmetro supercondutor  $\phi_1^2$  e  $\phi_2^2$  em função de  $r$  e  $t$ . O diagrama (c) representa a densidade da magnetização  $m$  em função de  $r$  e  $t$ .



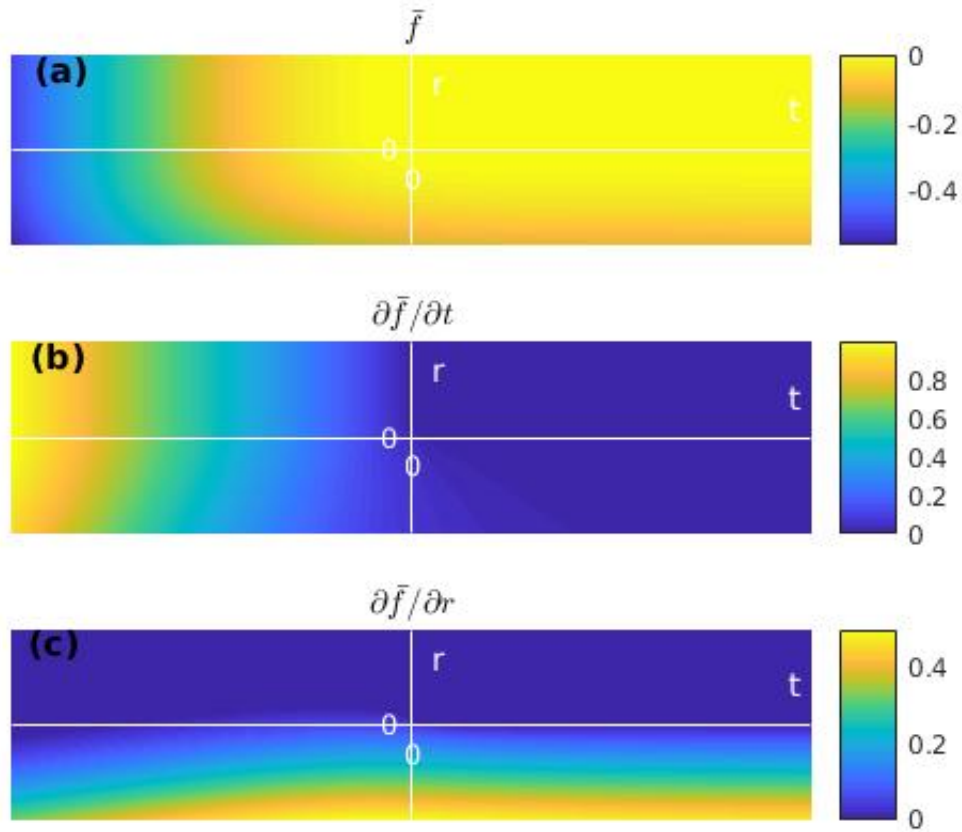
- Caso 3.2

Para  $\theta_{12} = \pi$ , também presenciamos a ordem supercondutora em  $r > 0$ .

**Figura 3.9** Os dois primeiros diagramas (a) e (b) representam a densidade do parâmetro supercondutor  $\phi_1^2$  e  $\phi_2^2$  em função de  $r$  e  $t$ . O diagrama . Onde  $\phi_1 \neq \phi_2 \neq 0$ ,  $m_1 = m_2 = m_3 = m$  e  $\theta_{12} = \pi$ .



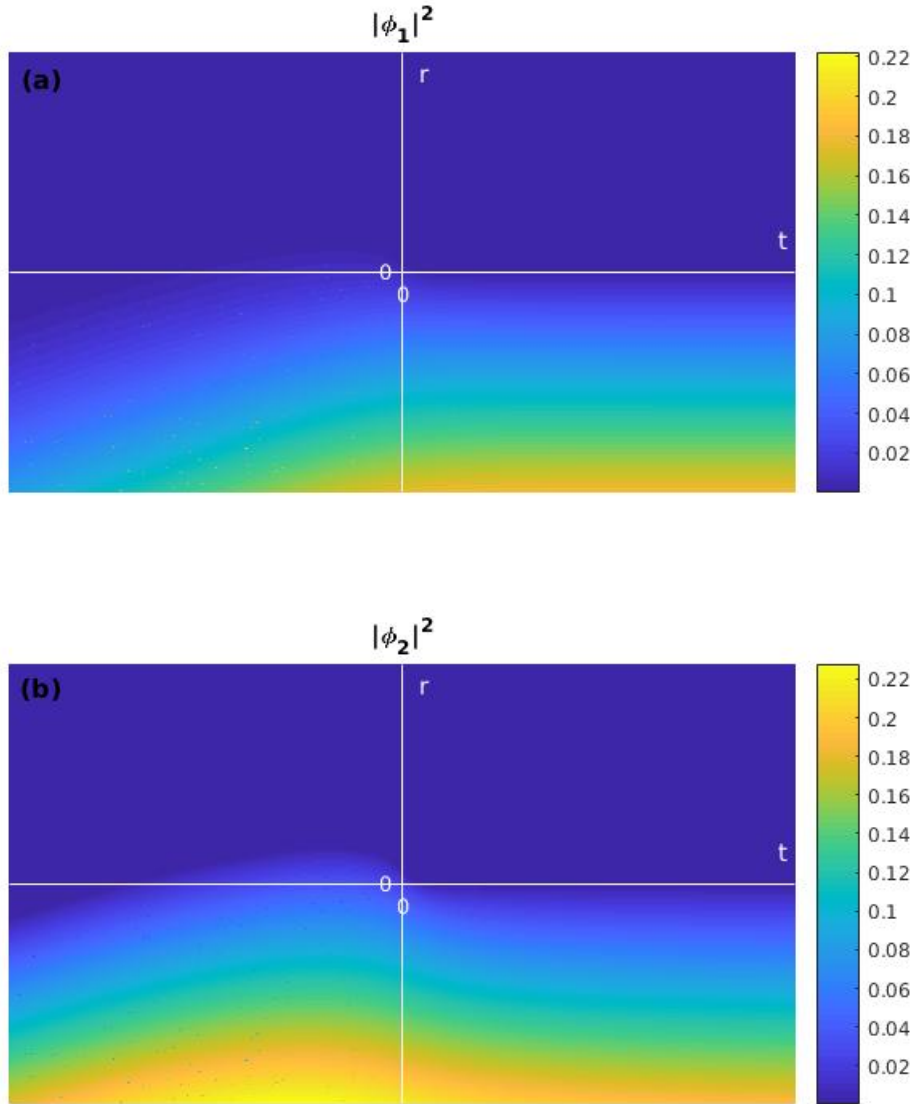
**Figura 3.10** Os diagrama (a) representa a densidade da energia para o caso 3.2. (b) a derivada de da energia  $\bar{f}$  em relação a  $r$  onde observamos ferromagnetismo no domínio supercondutor  $t > 0$ . (b) representa a derivada da energia em relação a  $t$ .



- Caso 3.3

Para  $\theta_{12} = \pi/2$ , observamos o comportamento supercondutor e ferromagnético semelhante ao caso 3.2, porém as fases estão melhores definidas.

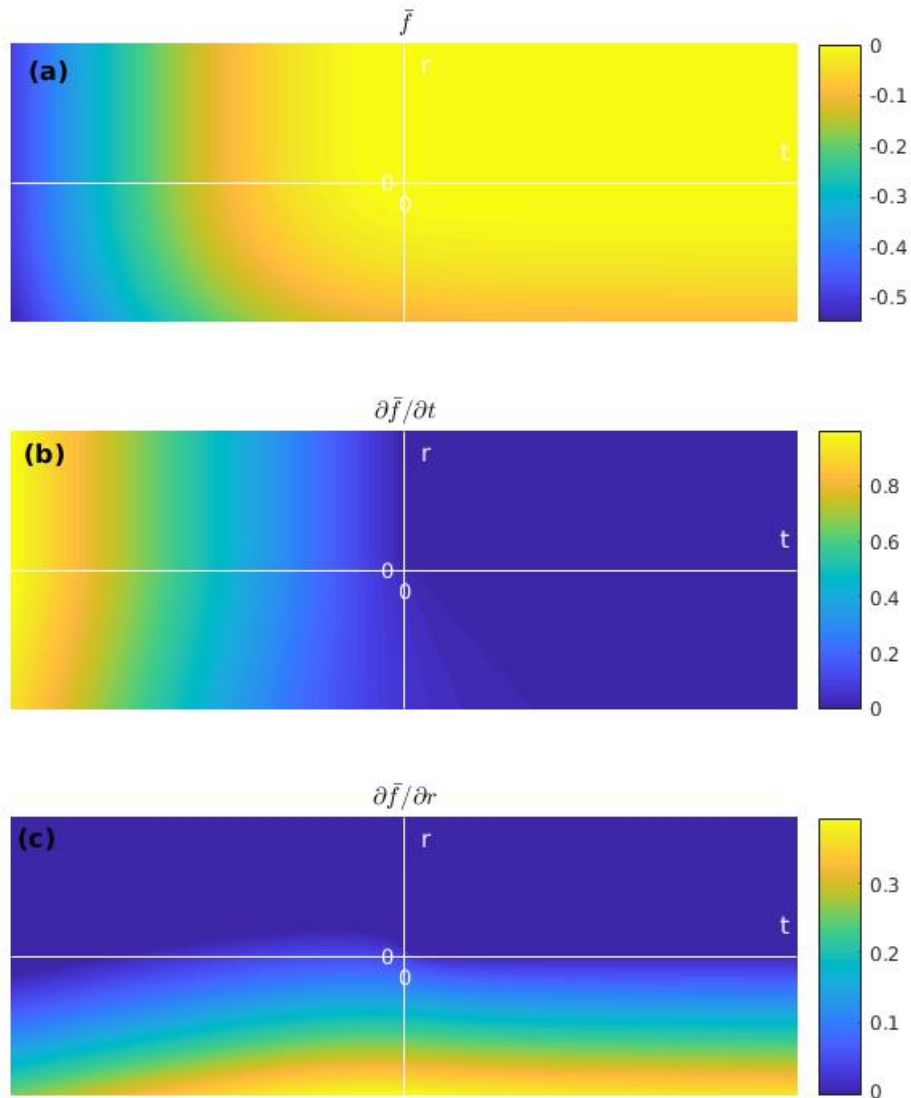
**Figura 3.11** Os diagramas (a) e (b) representam a densidade do parâmetro supercondutor  $\phi_1^2$  e  $\phi_2^2$  em função de  $r$  e  $t$ . Onde  $\phi_1 \neq \phi_2 \neq 0$ ,  $m_1 = m_2 = m_3 = m$  e  $\theta_{12} = \pi$ .



Ainda temos a figura 3.12, no qual apresentamos o funcional da densidade de energia normalizado em função de  $r < 0$  e  $t > 0$ . Analizando os diagramas, em (a) observamos o diagrama de fases da energia livre, em seguida (b) temos o mínimo da energia em relação a  $t$  e finalmente (c) o mínimo da energia em relação a  $r$ . No diagrama (c) fica claro que a fase supercondutora

está presente na fase ferromagnética para  $r > 0$  e  $t < 0$ .

**Figura 3.12** A figura representa o diagrama de densidade de energia em função de  $r$  e  $t$ . também apresenta o diagrama  $f_t$  que representa o mínimo de energia em relação a  $t$  e o diagrama  $f_r$  nos mostra o mínimo da energia em relação a  $r$ .

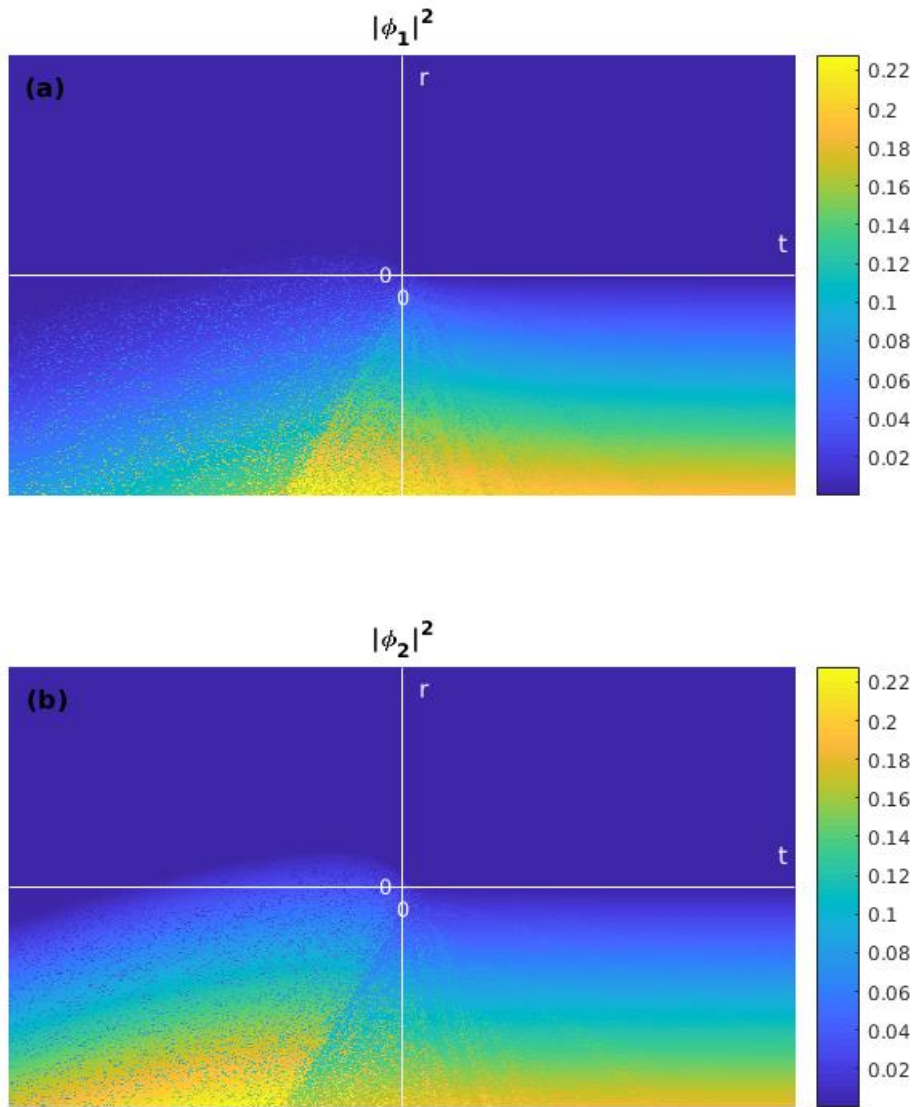


- Caso 3.4

Para  $\theta_{12} = -\pi/2$ , constatamos o comportamento parecido aos subcasos 3.3 e 3.2. Porém, na

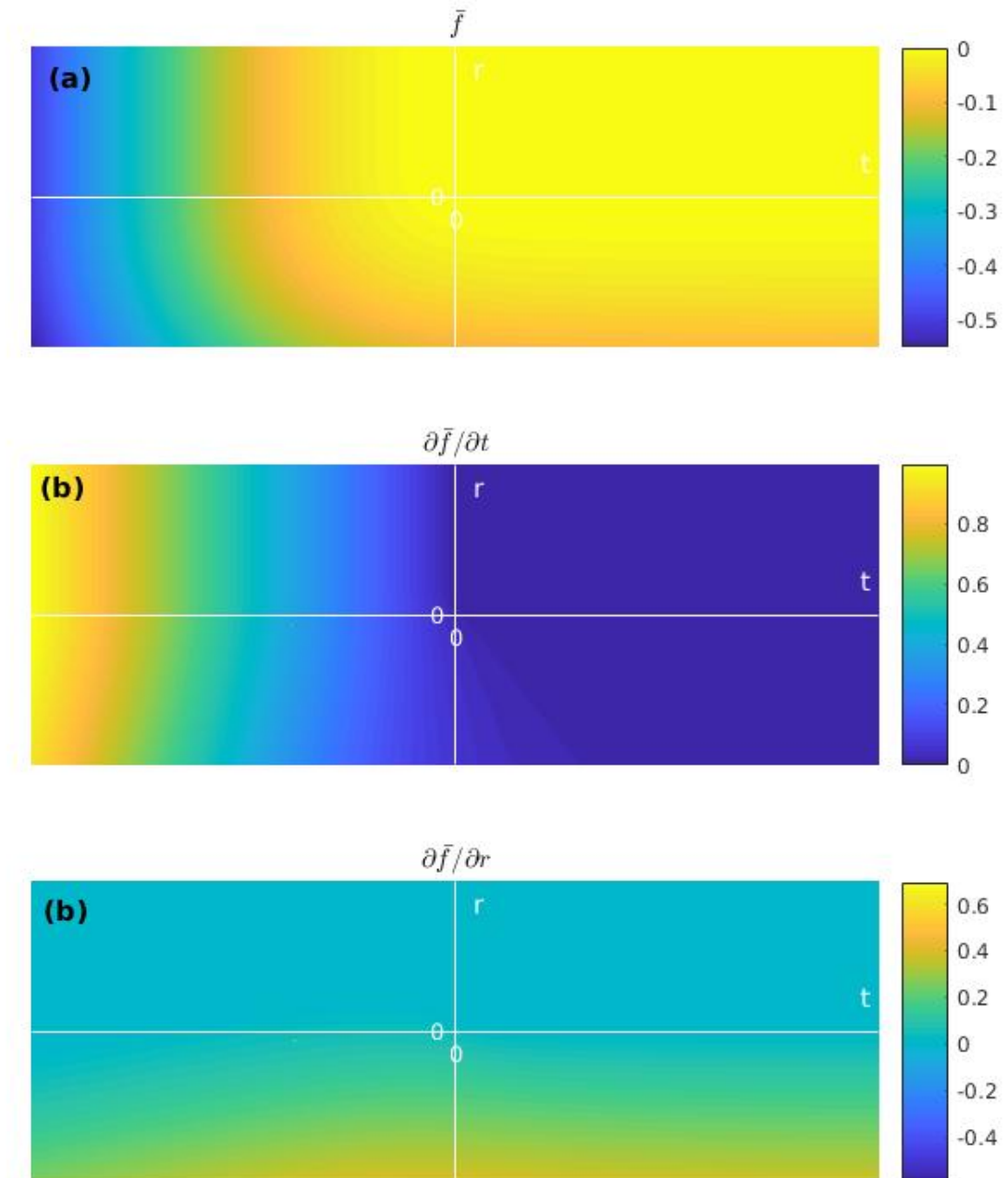
figura 3.14 fica claro no terceiro diagrama que a supercondutividade está fracamente presente no domínio  $r < 0$  e quase que nula para  $r > 0$ .

**Figura 3.13** Os diagramas (a) e (b) representam a densidade do parâmetro supercondutor  $\phi_1^2$  e  $\phi_2^2$  em função de  $r$  e  $t$ .



Também obtemos a figura 3.14, no qual apresentamos o funcional da densidade de energia normalizado em função de  $r < 0$  e  $t > 0$  como no caso anterior.

**Figura 3.14** A figura representa o diagrama de densidade de energia em função de  $r$  e  $t$ . também apresenta o diagrama  $ft$  que representa o mínimo de energia em relação a  $t$  e o diagrama  $fr$  nos mostra o mínimo da energia em relação a  $r$ .





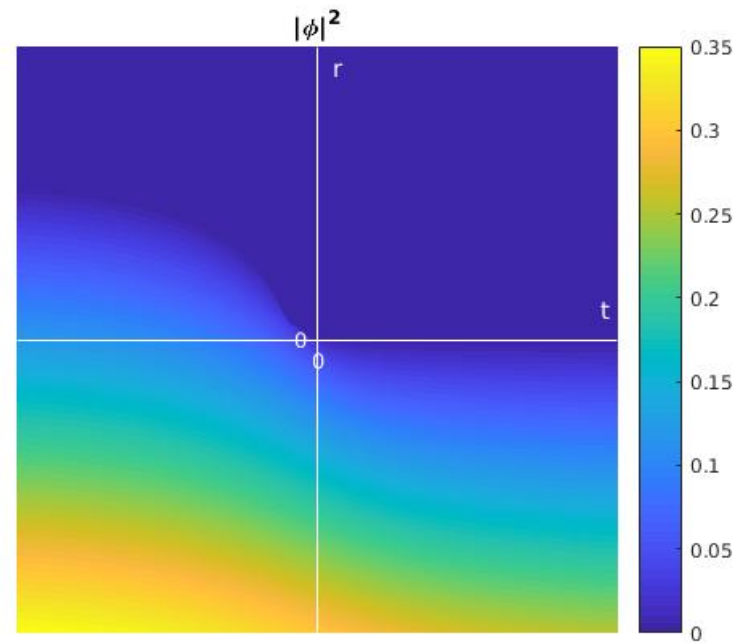
## Caso 4

O caso 4 é tão simples quanto o caso 2, pois os parâmetros supercondutores são equivalentes  $\phi_1 = \phi_2 = \phi$ . A vetor ferromagnético apresenta a componente  $m_1 = m$  enquanto  $m_2 = m_3 = 0$ . As diferentes fases onde vasriamos  $\theta_{12}$  são mostradas nos subcasos a seguir.

- Caso 4.1

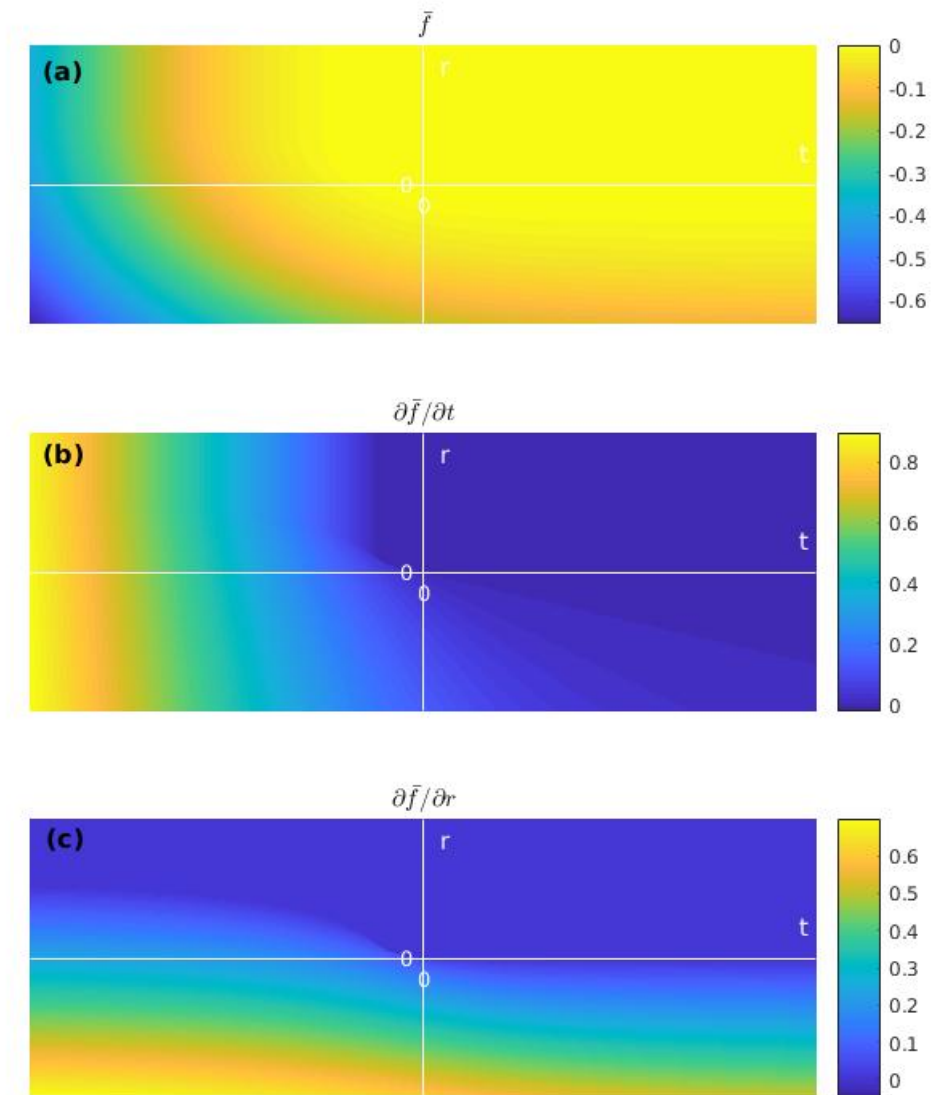
Para  $\theta_{12} = 0$ , observamos no primeiro diagrama que a supercondutividade está presente no segundo quadrante  $r > 0$  e  $t < 0$ .

**Figura 3.15** O diagrama representa o diagrama de fase da densidade  $|\phi|^2$  em função de  $r$  e  $t$  associados.



Os três diagramas a seguir mostram a densidade de energia em relação a  $r$  e  $t$ . Sendo os dois últimos o mínimo em relação a magnetização e supercondutividade respectivamente. O diagrama para a magnetização (b) também mostra ferromagnetismo no quarto quadrante  $t > 0$  e  $r < 0$ .

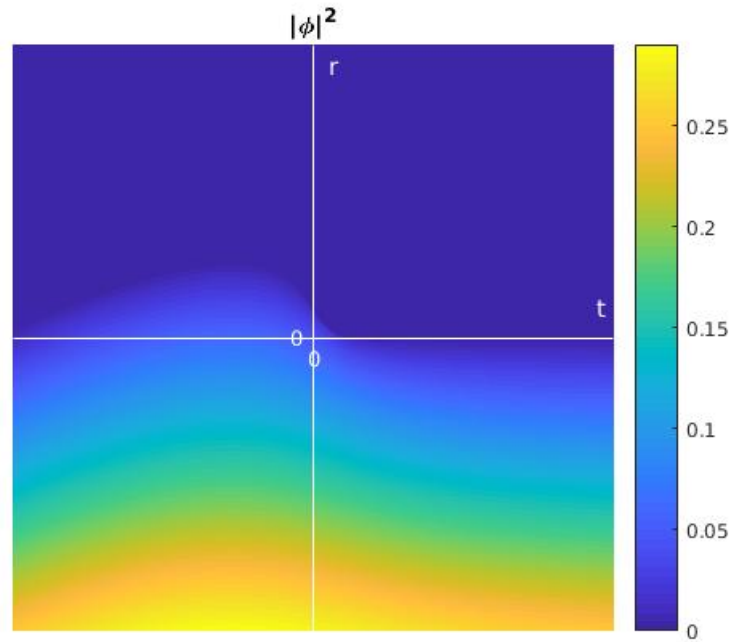
**Figura 3.16** A figura (a) representa o diagrama de densidade de energia em função de  $r$  e  $t$ . também apresenta o diagrama (b) que representa o mínimo de energia em relação a  $t$  e o diagrama (c) que nos mostra o mínimo da energia em relação a  $r$ .



- Caso 4.2

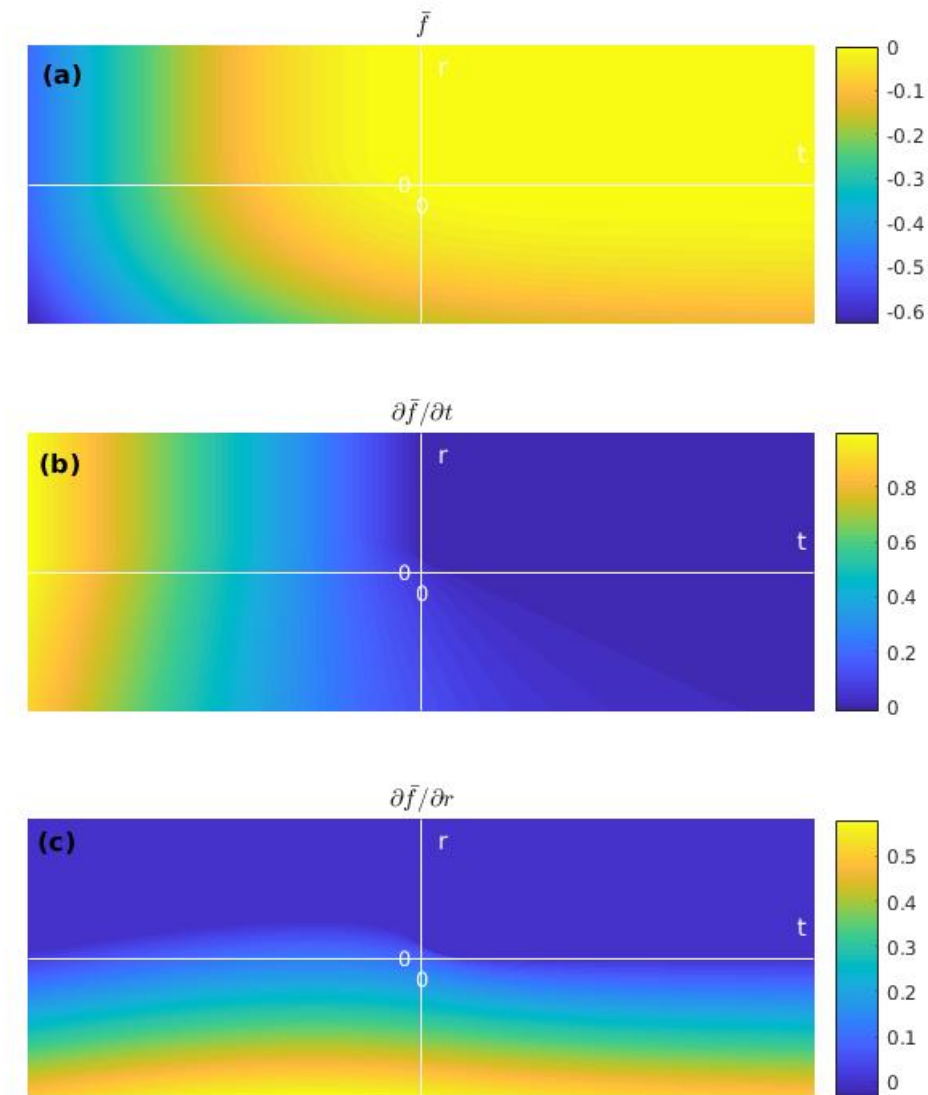
Para  $\theta_{12} = \pi$ , o domo supercondutor está bem definido na fase ferromagnética  $r > 0$ .

**Figura 3.17** O diagrama a esquerda representa  $\phi^2$  e o da direita representa  $m$  em função de  $r$  e  $t$  associados 4.2



Os três diagramas a seguir mostram a densidade de energia em relação a  $r$  e  $t$ . Sendo os dois últimos o mínimo em relação a magnetização e supercondutividade respectivamente.

**Figura 3.18** A figura representa o diagrama de densidade de energia em função de  $r$  e  $t$ . também apresenta o diagrama (b) que representa o mínimo de energia em relação a  $t$  e o diagrama (c) que nos mostra o mínimo da energia em relação a  $r$ .



- Caso 4.3

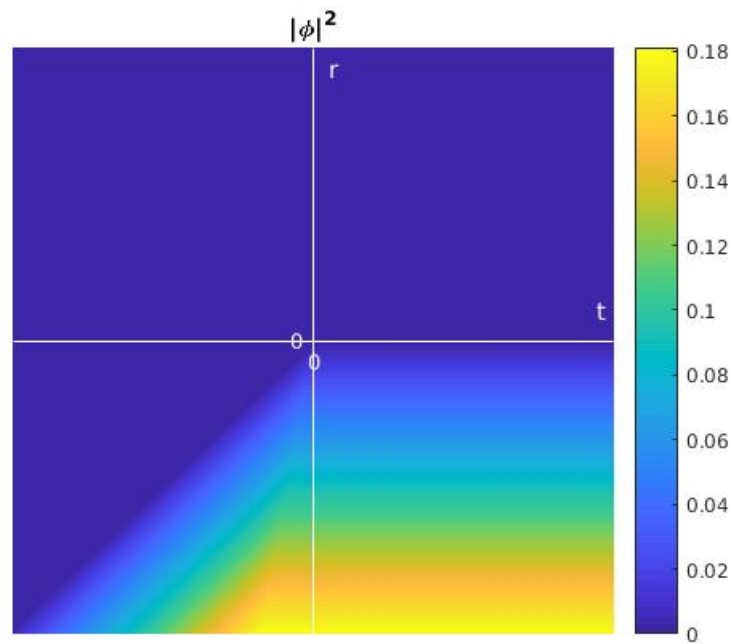
Para  $\theta_{12} = \pi/2$ , o caso 4 não apresenta coexistência com a fase ferromagnética, figura 3.19. A energia livre para este caso, Eq. 3.19, não apresenta a constante de acoplamento da supercon-

atividade com o ferromagnetismo  $\gamma$ .

$$\bar{f} = \frac{m^4}{2} + 2\gamma_1 m^2 \phi^2 + m^2 t + 2r\phi^2 - v\phi^4 - 2\omega\phi^4 + 2\phi^4. \quad (3.19)$$

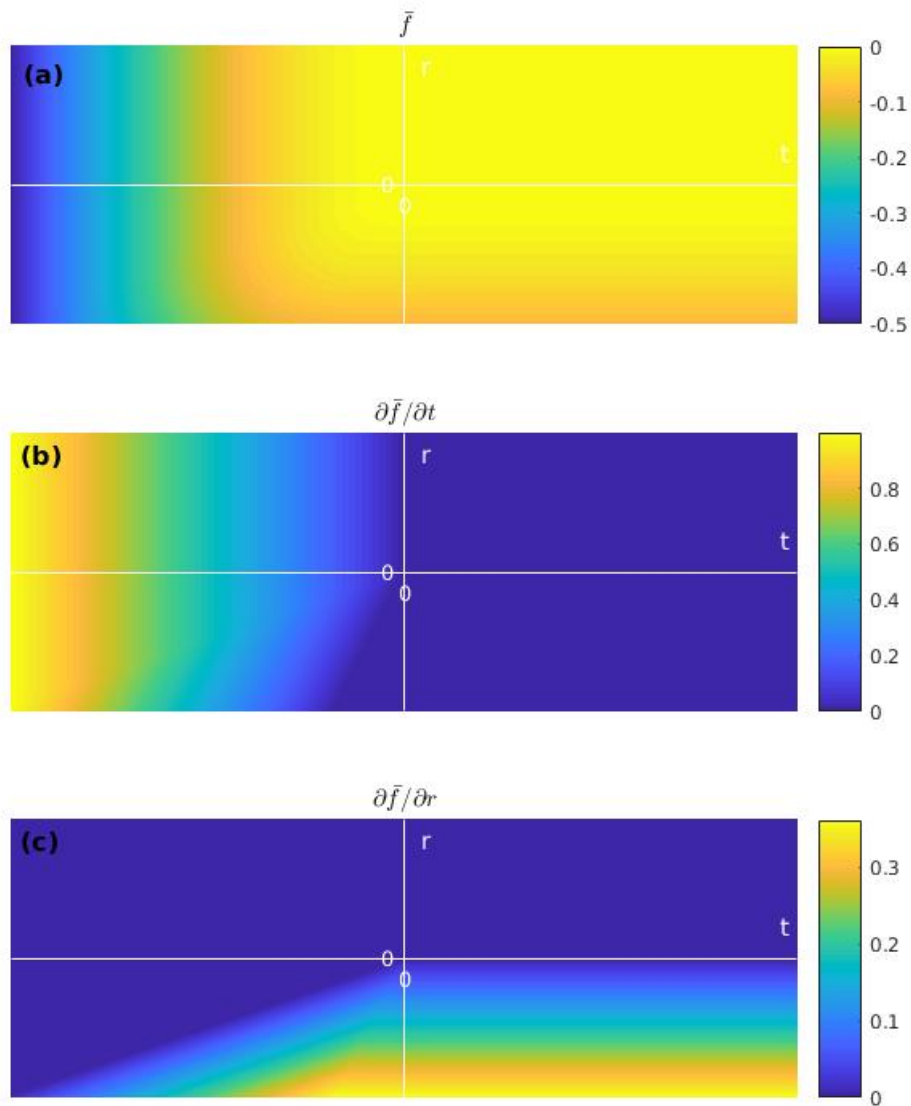
O diagrama para  $\phi$  sem estar presente na fase ferromagnética será como mostrado abaixo:

**Figura 3.19** O diagrama representa  $\phi^2$  em função de  $r$  e  $t$  associados 4.3. Neste diagrama a supercondutividade não aparece na fase ferromagnética.



A diagrama de fases para a densidade de energia Eq. 3.19 confirma que não há coexistência entre as fases.

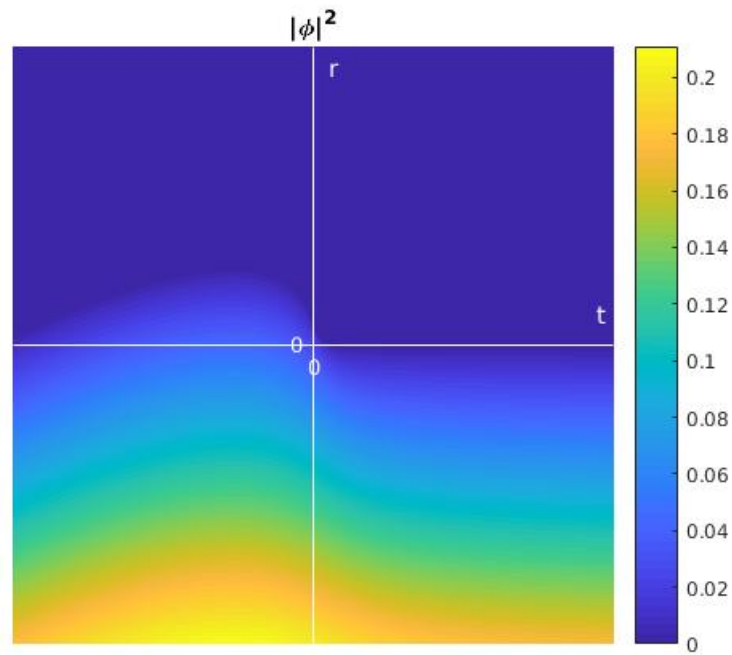
**Figura 3.20** A figura representa o diagrama de densidade de energia em função de  $r$  e  $t$ . também apresenta o diagrama (b) que representa o mínimo de energia em relação a  $t$  e o diagrama (c) que nos mostra o mínimo da energia em relação a  $r$ .



## Caso 8

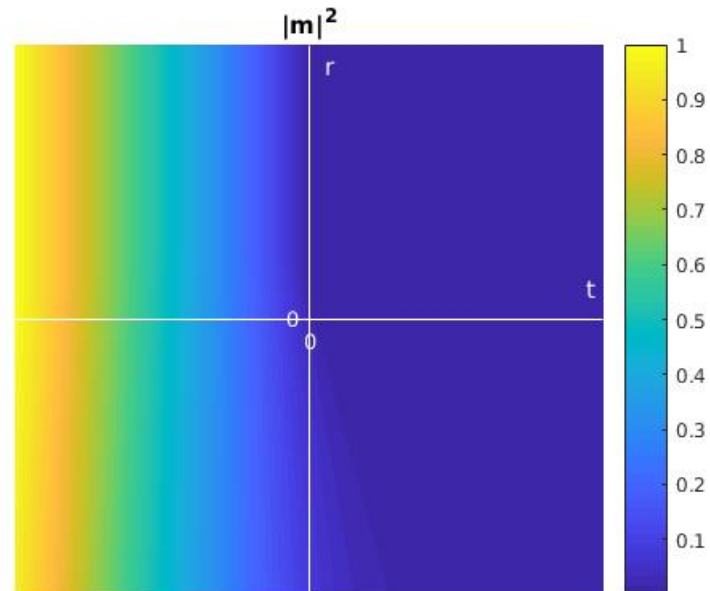
O caso 8 é o mais simplificado com  $m_1 = m_2 = 0$ ,  $m_3 = m$ ,  $\phi_1 = 0$ ,  $\phi_2 = \phi$  e  $\theta_{12} = 0$ . Neste situação podemos observar que a supercondutividade também está presente na fase paramagnética  $r > 0$  e  $t > 0$ .

**Figura 3.21** O diagrama a seguir representa  $|\phi|^2$  em função de  $r$  e  $t$  associados ao caso 8.1 ta Tabela 3.3.3



No diagrama de fases a seguir Figura 3.22, a magnetização  $m$  toma toda região para  $t < 0$  e ainda invade a região supercondutora  $r < 0$  e  $t > 0$ .

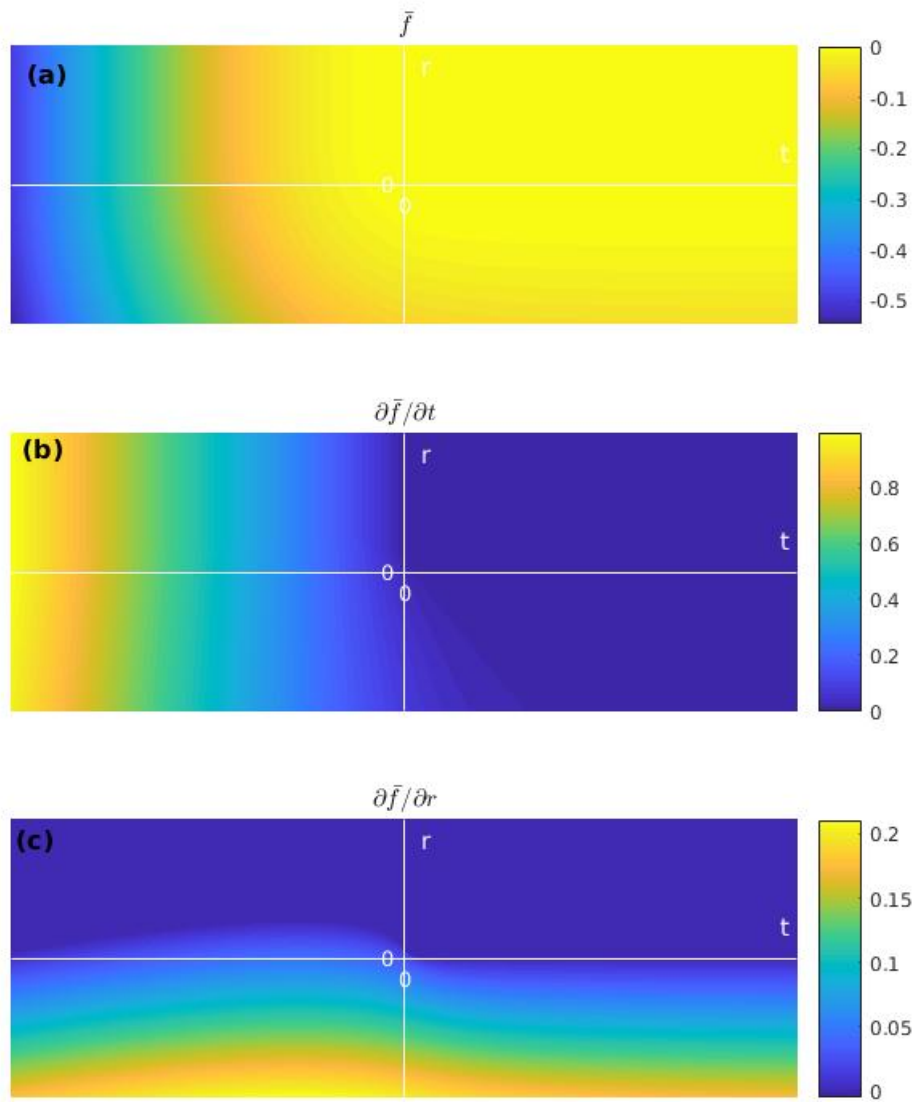
**Figura 3.22** O diagrama a seguir representa  $|m|^2$  em função de  $r$  e  $t$  associados ao caso 8.1 da Tabela 3.3.3



A figura 3.23 mostra a a densidade de energia para o caso 8.1 da Tabela 3.3.3 e suas derivações em relação a  $r$  e  $t$ .



**Figura 3.23** A figura representa o diagrama de densidade de energia em função de  $r$  e  $t$ . também apresenta o diagrama (a) que representa o mínimo de energia em relação a  $t$  e o diagrama (b) nos mostra o mínimo da energia em relação a  $r$ .



## Caso 18

Depois de avaliar alguns diagramas de fases para casos simplificados, agora estaremos avaliando uma situação mais geral onde  $m_1 \neq m_2 \neq 0$ ,  $m_3 = 0$ ,  $\phi_1 \neq \phi_2 \neq 0$  e  $\theta_{12} = \pi$ .

**Figura 3.24** Os diagramas (a) e (b) representam  $\phi_1^2$  e  $\phi_2^2$  respectivamente, enquanto os diagramas (c) e (d) representam  $m_1$  e  $m_2$  em função de  $r$  e  $t$ . Todos estão associados ao caso 18.2

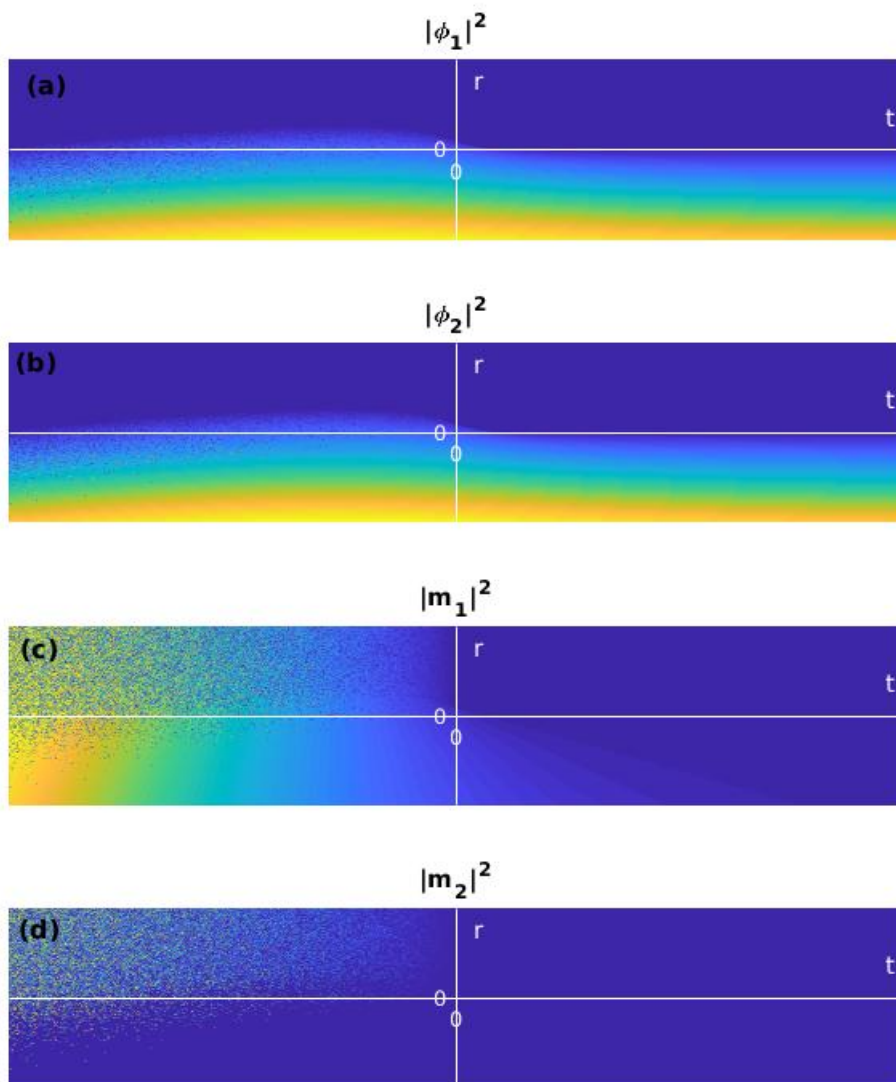


Tabela 3.3: Paridade das densidades de energias

<b>Caso</b>	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$\theta_{12}$	$\phi_1$	$\phi_2$	$(m_1, m_2, m_3, \theta_{12}, \phi_1, \phi_2)$
caso 1.1	ímpar	ímpar	ímpar	-	par	par	$(m, m, m, 0, \phi, \phi)$
caso 1.2	ímpar	ímpar	ímpar	-	par	par	$(m, m, m, \pi, \phi, \phi)$
caso 1.3	ímpar	ímpar	ímpar	-	par	par	$(m, m, m, \pi/2, \phi, \phi)$
caso 1.4	ímpar	ímpar	ímpar	-	par	par	$(m, m, m, -\pi/2, \phi, \phi)$
caso 2.1	ímpar	ímpar	ímpar	-	-	par	$(m, m, m, 0, 0, \phi)$
caso 3.1	ímpar	ímpar	ímpar	-	ímpar	ímpar	$(m, m, m, 0, \phi_1, \phi_2)$
caso 3.2	ímpar	ímpar	ímpar	-	ímpar	ímpar	$(m, m, m, \pi, \phi_1, \phi_2)$
caso 3.3	ímpar	ímpar	ímpar	-	ímpar	ímpar	$(m, m, m, \pi/2, \phi_1, \phi_2)$
caso 3.4	ímpar	ímpar	ímpar	-	ímpar	ímpar	$(m, m, m, -\pi/2, \phi_1, \phi_2)$
caso 4.1	ímpar	-	-	-	par	par	$(m, 0, 0, 0, \phi, \phi)$
caso 4.2	ímpar	-	-	-	par	par	$(m, 0, 0, \pi, \phi, \phi)$
caso 4.3	par	-	-	-	par	par	$(m, 0, 0, 0, \phi/2, \phi)$
caso 5.1	par	-	-	-	-	par	$(m, 0, 0, 0, 0, \phi_2)$
caso 6.1	ímpar	-	-	-	ímpar	ímpar	$(m, 0, 0, 0, \phi_1, \phi_2)$
caso 6.2	ímpar	-	-	-	ímpar	ímpar	$(m, 0, 0, \pi, \phi_1, \phi_2)$
caso 6.3	par	-	-	-	par	par	$(m, 0, 0, -\pi/2, \phi_1, \phi_2)$
caso 7.1	-	-	par	-	par	par	$(0, 0, m, 0, \phi, \phi)$
caso 8.1	-	-	par	-	-	par	$(0, 0, m, 0, 0, \phi)$
caso 9.1	-	-	ímpar	-	par	par	$(0, 0, m, 0, \phi_1, \phi_2)$
caso 9.2	-	-	ímpar	-	par	par	$(0, 0, m, \pi/2, \phi_1, \phi_2)$
caso 10.1	ímpar	ímpar	-	-	par	par	$(m, m, 0, 0, \phi, \phi)$
caso 10.2	ímpar	ímpar	-	-	par	par	$(m, m, 0, \pi, \phi, \phi)$
caso 10.3	ímpar	ímpar	-	-	par	par	$(m, m, 0, \pi/2, \phi, \phi)$
caso 10.4	ímpar	ímpar	-	-	par	par	$(m, m, 0, -\pi/2, \phi, \phi)$
caso 11.1	par	par	-	-	-	par	$(m, m, 0, 0, 0, \phi)$
caso 12.1	ímpar	ímpar	-	-	par	par	$(m, m, 0, 0, \phi_1, \phi_2)$

caso 12.2	ímpar	ímpar	-	-	par	par	$(m, m, 0, \pi, \phi_1, \phi_2)$
caso 12.3	ímpar	ímpar	-	-	par	par	$(m, m, 0, \pi/2, \phi_1, \phi_2)$
caso 12.4	ímpar	ímpar	-	-	par	par	$(m, m, 0, -\pi/2, \phi_1, \phi_2)$
caso 13.1	ímpar	-	ímpar	-	par	par	$(m, 0, m, 0, \phi, \phi)$
caso 13.2	ímpar	-	ímpar	-	par	par	$(m, 0, m, \pi/2, \phi, \phi)$
caso 13.3	ímpar	-	ímpar	-	par	par	$(m, 0, m, \pi/2, \phi, \phi)$
caso 14.1	ímpar	-	ímpar	-	-	par	$(m, 0, m, 0, 0, \phi)$
caso 14.2	ímpar	-	ímpar	-	par	par	$(m, 0, m, \pi/2, 0, \phi)$
caso 15.1	ímpar	-	ímpar	-	par	par	$(m, 0, m, 0, \phi, \phi)$
caso 15.2	ímpar	-	ímpar	-	ímpar	ímpar	$(m, 0, m, \pi/2, \phi_1, \phi_2)$
caso 15.3	ímpar	-	ímpar	-	ímpar	ímpar	$(m, 0, m, -\pi/2, \phi_1, \phi_2)$
caso 16.1	ímpar	par	-	-	par	par	$(m_1, m_2, 0, 0, \phi, \phi)$
caso 16.2	ímpar	par	-	-	par	par	$(m_1, m_2, 0, \pi, \phi, \phi)$
caso 16.3	par	ímpar	-	-	par	par	$(m_1, m_2, 0, \pi/2, \phi, \phi)$
caso 16.4	par	ímpar	-	-	par	par	$(m_1, m_2, 0, -\pi/2, \phi, \phi)$
caso 17.1	par	par	-	-	-	par	$(m_1, m_2, 0, 0, 0, \phi_2)$
caso 18.1	ímpar	par	-	-	ímpar	ímpar	$(m_1, m_2, 0, 0, \phi_1, \phi_2)$
caso 18.2	ímpar	par	-	-	ímpar	ímpar	$(m_1, m_2, 0, 0, \phi_1, \phi_2)$
caso 18.3	par	ímpar	-	-	ímpar	ímpar	$(m_1, m_2, 0, \pi/2, \phi_1, \phi_2)$
caso 18.4	par	ímpar	-	-	ímpar	ímpar	$(m_1, m_2, 0, -\pi/2, \phi_1, \phi_2)$
caso 19.1	-	par	par	-	par	par	$(0, m_2, m_3, 0, \phi, \phi)$
caso 19.2	-	ímpar	par	-	par	par	$(0, m_2, m_3, \pi/2, \phi, \phi)$
caso 19.3	-	ímpar	par	-	par	par	$(0, m_2, m_3, -\pi/2, \phi, \phi)$
caso 20.1	-	par	ímpar	-	-	par	$(0, m_2, m_3, 0, 0, \phi)$
caso 21.1	-	par	ímpar	-	par	par	$(0, m_2, m_3, 0, \phi_1, \phi_2)$
caso 21.2	-	ímpar	par	-	ímpar	ímpar	$(0, m_2, m_3, \pi/2, \phi_1, \phi_2)$
caso 21.3	-	ímpar	par	-	ímpar	ímpar	$(0, m_2, m_3, -\pi/2, \phi_1, \phi_2)$
caso 22.1	ímpar	par	par	-	par	par	$(m_1, m_2, m_3, 0, \phi, \phi)$
caso 22.2	ímpar	par	par	-	par	par	$(m_1, m_2, m_3, \pi, \phi, \phi)$

caso 22.3	par	ímpar	par	-	par	par	$(m_1, m_2, m_3, \pi/2, \phi, \phi)$
caso 22.4	par	ímpar	par	-	par	par	$(m_1, m_2, m_3, -\pi/2, \phi, \phi)$
caso 23.1	par	par	ímpar	-	par	par	$(m_1, m_2, m_3, 0, 0, \phi)$
caso 24.1	ímpar	par	ímpar	-	ímpar	ímpar	$(m_1, m_2, m_3, 0, \phi_1, \phi_2)$
caso 24.2	ímpar	par	ímpar	-	ímpar	ímpar	$(m_1, m_2, m_3, \pi, \phi_1, \phi_2)$
caso 24.3	par	ímpar	ímpar	-	ímpar	ímpar	$(m_1, m_2, m_3, \pi/2, \phi_1, \phi_2)$
caso 24.4	par	ímpar	ímpar	-	ímpar	ímpar	$(m_1, m_2, m_3, -\pi/2, \phi_1, \phi_2)$
caso 25.1	ímpar	ímpar	par	-	par	par	$(m, m, m_3, 0, \phi, \phi)$
caso 25.2	ímpar	ímpar	par	-	par	par	$(m, m, m_3, \phi, \phi, \phi)$
caso 25.3	ímpar	ímpar	par	-	par	par	$(m, m, m_3, \phi/2, \phi, \phi)$
caso 25.2	ímpar	ímpar	par	-	par	par	$(m, m, m_3, -\phi/2, \phi, \phi)$
caso 26.1	par	par	ímpar	-	-	par	$(m, m, m_3, 0, 0, \phi)$
caso 27.1	ímpar	ímpar	ímpar	-	ímpar	ímpar	$(m, m, m_3, 0, \phi_1, \phi_2)$
caso 27.2	ímpar	ímpar	ímpar	-	ímpar	ímpar	$(m, m, m_3, \pi, \phi_1, \phi_2)$
caso 27.3	ímpar	ímpar	ímpar	-	ímpar	ímpar	$(m, m, m_3, \pi/2, \phi_1, \phi_2)$
caso 27.4	ímpar	ímpar	ímpar	-	ímpar	ímpar	$(m, m, m_3, -\pi/2, \phi_1, \phi_2)$
caso 28.1	ímpar	par	ímpar	-	par	par	$(m, m_2, m, 0, \phi, \phi)$
caso 28.2	ímpar	par	ímpar	-	par	par	$(m, m_2, m, \pi, \phi, \phi)$
caso 28.3	par	ímpar	par	-	par	par	$(m, m_2, m, \pi/2, \phi_1, \phi_2)$
caso 28.4	par	ímpar	par	-	par	par	$(m, m_2, m, -\pi/2, \phi, \phi)$
caso 29.1	ímpar	par	ímpar	-	ímpar	ímpar	$(m, m_2, m, 0, \phi_1, \phi_2)$
caso 29.2	ímpar	par	ímpar	-	ímpar	ímpar	$(m, m_2, m, \pi, \phi_1, \phi_2)$
caso 29.3	ímpar	ímpar	ímpar	-	ímpar	ímpar	$(m, m_2, m, \pi/2, \phi_1, \phi_2)$
caso 29.4	ímpar	ímpar	ímpar	-	ímpar	ímpar	$(m, m_2, m, -\pi/2, \phi_1, \phi_2)$

Tabela 3.4: A segunda coluna mostra os valores assumidos por  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ ,  $\psi_3$ ,  $\mathbf{M}$  e  $\theta_{12}$  enquanto a terceira coluna nos mostra a densidade de energia livre normalizada para cada condição proposta.

Casos	$(m_1, m_2, m_3, \theta_{12}, \phi_1, \phi_2)$	Densidades de energia
1.1	$(m, m, m, 0, \phi, \phi)$	$\frac{9m^4}{2} + 6\gamma_1 m^2 \phi^2 + 3m^2 t + 2\gamma m \phi^2 + 2r\phi^2 - v\phi^4 + 2\phi^4$
1.2	$(m, m, m, \pi, \phi, \phi)$	$\frac{9m^4}{2} + 6\gamma_1 m^2 \phi^2 + 3m^2 t - 2\gamma m \phi^2 + 2r\phi^2 - v\phi^4 + 2\phi^4$
1.3	$(m, m, m, \pi/2, \phi, \phi)$	$\frac{9m^4}{2} + 6\gamma_1 m^2 \phi^2 + 3m^2 t - 2\gamma m \phi^2 + 2r\phi^2 - v\phi^4 - 2\omega\phi^4 + 2\phi^4$
1.4	$(m, m, m, -\pi/2, \phi, \phi)$	$\frac{9m^4}{2} + 6\gamma_1 m^2 \phi^2 + 3m^2 t + 2\gamma m \phi^2 + 2r\phi^2 - v\phi^4 - 2\omega\phi^4 + 2\phi^4$
2.1	$(m, m, m, 0, 0, \phi)$	$\eta\phi^4 + \frac{9m^4}{2} + 3\gamma_1 m^2 \phi^2 + 3m^2 t - \gamma m \phi^2 + r\phi^2 + \frac{\phi^4}{2}$
3.1	$(m, m, m, 0, \phi_1, \phi_2)$	$\eta(\phi_1^4 - 2\phi_2^2\phi_1^2 + \phi_2^4) + \frac{9m^4}{2} + 3\gamma_1 m^2(\phi_1^2 + \phi_2^2) + 3m^2 t + 2\gamma m \phi_1 \phi_2 +$ $\gamma m(\phi_1^2 - \phi_2^2) + r(\phi_1^2 + \phi_2^2) - v\phi_1^2 \phi_2^2 + \frac{1}{2}(\phi_1^4 + 2\phi_2^2 \phi_1^2 + \phi_2^4)$
3.2	$(m, m, m, \pi, \phi_1, \phi_2)$	$\eta(\phi_1^4 - 2\phi_2^2\phi_1^2 + \phi_2^4) + \frac{9m^4}{2} + 3\gamma_1 m^2(\phi_1^2 + \phi_2^2) + 3m^2 t - 2\gamma m \phi_1 \phi_2 +$ $\gamma m(\phi_1^2 - \phi_2^2) + r(\phi_1^2 + \phi_2^2) - v\phi_1^2 \phi_2^2 + \frac{1}{2}(\phi_1^4 + 2\phi_2^2 \phi_1^2 + \phi_2^4)$
3.3	$(m, m, m, \pi/2, \phi_1, \phi_2)$	$\eta(\phi_1^4 - 2\phi_2^2\phi_1^2 + \phi_2^4) + \frac{9m^4}{2} + 3\gamma_1 m^2(\phi_1^2 + \phi_2^2) + 3m^2 t - 2\gamma m \phi_1 \phi_2 +$ $\gamma m(\phi_1^2 - \phi_2^2) + r(\phi_1^2 + \phi_2^2) - v\phi_1^2 \phi_2^2 - 2\omega\phi_1^2 \phi_2^2 + \frac{1}{2}(\phi_1^4 + 2\phi_2^2 \phi_1^2 + \phi_2^4)$

3.4	$(m, m, m, -\pi/2, \phi_1, \phi_2)$	$\eta (\phi_1^4 - 2\phi_2^2\phi_1^2 + \phi_2^4) + \frac{9m^4}{2} + 3\gamma_1 m^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2) + 3m^2 t + 2\gamma m \phi_1 \phi_2 +$ $\gamma m (\phi_1^2 - \phi_2^2) + r (\phi_1^2 + \phi_2^2) - v \phi_1^2 \phi_2^2 - 2\omega \phi_1^2 \phi_2^2 + \frac{1}{2} (\phi_1^4 + 2\phi_2^2 \phi_1^2 + \phi_2^4)$
4.1	$(m, 0, 0, 0, \phi, \phi)$	$\frac{m^4}{2} + 2\gamma_1 m^2 \phi^2 + m^2 t + 2\gamma m \phi^2 + 2r \phi^2 - v \phi^4 + 2\phi^4$
4.2	$(m, 0, 0, \pi, \phi, \phi)$	$\frac{m^4}{2} + 2\gamma_1 m^2 \phi^2 + m^2 t - 2\gamma m \phi^2 + 2r \phi^2 - v \phi^4 + 2\phi^4$
4.3	$(m, 0, 0, \pi/2, \phi, \phi)$	$\frac{m^4}{2} + 2\gamma_1 m^2 \phi^2 + m^2 t + 2r \phi^2 - v \phi^4 - 2\omega \phi^4 + 2\phi^4$
5.1	$(m, 0, 0, 0, 0, \phi)$	$\eta \phi^4 + \frac{m^4}{2} + \gamma_1 m^2 \phi^2 + m^2 t + r \phi^2 + \frac{\phi^4}{2}$
6.1	$(m, 0, 0, 0, \phi_1, \phi_2)$	$\eta (\phi_1^4 - 2\phi_2^2\phi_1^2 + \phi_2^4) + \frac{m^4}{2} + \gamma_1 m^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2) + m^2 t + 2\gamma m \phi_1 \phi_2 + r (\phi_1^2 + \phi_2^2)$ $- v \phi_1^2 \phi_2^2 + \frac{1}{2} (\phi_1^4 + 2\phi_2^2 \phi_1^2 + \phi_2^4)$
6.2	$(m, 0, 0, \pi, \phi_1, \phi_2)$	$\eta (\phi_1^4 - 2\phi_2^2\phi_1^2 + \phi_2^4) + \frac{m^4}{2} + \gamma_1 m^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2) + m^2 t - 2\gamma m \phi_1 \phi_2 + r (\phi_1^2 + \phi_2^2)$ $- v \phi_1^2 \phi_2^2 + \frac{1}{2} (\phi_1^4 + 2\phi_2^2 \phi_1^2 + \phi_2^4)$
6.3	$(m, 0, 0, -\pi/2, \phi_1, \phi_2)$	$\eta (\phi_1^4 - 2\phi_2^2\phi_1^2 + \phi_2^4) + \frac{m^4}{2} + \gamma_1 m^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2) + m^2 t + r (\phi_1^2 + \phi_2^2)$ $- v \phi_1^2 \phi_2^2 - 2\omega \phi_1^2 \phi_2^2 + \frac{1}{2} (\phi_1^4 + 2\phi_2^2 \phi_1^2 + \phi_2^4)$
7.1	$(0, 0, m, 0, \phi, \phi)$	$\frac{m^4}{2} + 2\gamma_1 m^2 \phi^2 + m^2 t + 2r \phi^2 - v \phi^4 + 2\phi^4$
8.1	$(0, 0, m, 0, 0, \phi)$	$\eta \phi^4 + \frac{m^4}{2} + \gamma_1 m^2 \phi^2 + m^2 t - \gamma m \phi^2 + r \phi^2 + \frac{\phi^4}{2}$
9.1	$(0, 0, m, 0, \phi_1, \phi_2)$	$\eta (\phi_1^4 - 2\phi_2^2\phi_1^2 + \phi_2^4) + \frac{m^4}{2} + \gamma_1 m^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2) + m^2 t + \gamma m (\phi_1^2 - \phi_2^2)$ $+ r (\phi_1^2 + \phi_2^2) - v \phi_1^2 \phi_2^2 + \frac{1}{2} (\phi_1^4 + 2\phi_2^2 \phi_1^2 + \phi_2^4)$

9.2	$(0, 0, m, \pi/2, \phi_1, \phi_2)$	$\eta (\phi_1^4 - 2\phi_2^2\phi_1^2 + \phi_2^4) + \frac{m^4}{2} + \gamma_1 m^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2) + m^2 t + \gamma m (\phi_1^2 - \phi_2^2) + r (\phi_1^2 + \phi_2^2) - v\phi_1^2\phi_2^2 - 2\omega\phi_1^2\phi_2^2 + \frac{1}{2} (\phi_1^4 + 2\phi_2^2\phi_1^2 + \phi_2^4)$
10.1	$(m, m, 0, 0, \phi, \phi)$	$2m^4 + 4\gamma_1 m^2 \phi^2 + 2m^2 t + 2\gamma m \phi^2 + 2r\phi^2 - v\phi^4 + 2\phi^4$
10.2	$(m, m, 0, \pi, \phi, \phi)$	$2m^4 + 4\gamma_1 m^2 \phi^2 + 2m^2 t - 2\gamma m \phi^2 + 2r\phi^2 - v\phi^4 + 2\phi^4$
10.3	$(m, m, 0, \pi/2, \phi, \phi)$	$2m^4 + 4\gamma_1 m^2 \phi^2 + 2m^2 t - 2\gamma m \phi^2 + 2r\phi^2 - v\phi^4 - 2\omega\phi^4 + 2\phi^4$
10.4	$(m, m, 0, -\pi/2, \phi, \phi)$	$2m^4 + 4\gamma_1 m^2 \phi^2 + 2m^2 t + 2\gamma m \phi^2 + 2r\phi^2 - v\phi^4 - 2\omega\phi^4 + 2\phi^4$
11.1	$(m, m, 0, 0, 0, \phi)$	$\eta \phi^4 + 2m^4 + 2\gamma_1 m^2 \phi^2 + 2m^2 t + r\phi^2 + \frac{\phi^4}{2}$
12.1	$(m, m, 0, 0, \phi_1, \phi_2)$	$\eta (\phi_1^4 - 2\phi_2^2\phi_1^2 + \phi_2^4) + 2m^4 + 2\gamma_1 m^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2) + 2m^2 t + 2\gamma m \phi_1 \phi_2 + r (\phi_1^2 + \phi_2^2) - v\phi_1^2\phi_2^2 + \frac{1}{2} (\phi_1^4 + 2\phi_2^2\phi_1^2 + \phi_2^4)$
12.2	$(m, m, 0, \pi, \phi_1, \phi_2)$	$\eta (\phi_1^4 - 2\phi_2^2\phi_1^2 + \phi_2^4) + 2m^4 + 2\gamma_1 m^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2) + 2m^2 t - 2\gamma m \phi_1 \phi_2 + r (\phi_1^2 + \phi_2^2) - v\phi_1^2\phi_2^2 + \frac{1}{2} (\phi_1^4 + 2\phi_2^2\phi_1^2 + \phi_2^4)$
12.3	$(m, m, 0, \pi/2, \phi_1, \phi_2)$	$\eta (\phi_1^4 - 2\phi_2^2\phi_1^2 + \phi_2^4) + 2m^4 + 2\gamma_1 m^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2) + 2m^2 t - 2\gamma m \phi_1 \phi_2 + r (\phi_1^2 + \phi_2^2) - v\phi_1^2\phi_2^2 - 2\omega\phi_1^2\phi_2^2 + \frac{1}{2} (\phi_1^4 + 2\phi_2^2\phi_1^2 + \phi_2^4)$
12.4	$(m, m, 0, -\pi/2, \phi_1, \phi_2)$	$\eta (\phi_1^4 - 2\phi_2^2\phi_1^2 + \phi_2^4) + 2m^4 + 2\gamma_1 m^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2) + 2m^2 t + 2\gamma m \phi_1 \phi_2 + r (\phi_1^2 + \phi_2^2) - v\phi_1^2\phi_2^2 - 2\omega\phi_1^2\phi_2^2 + \frac{1}{2} (\phi_1^4 + 2\phi_2^2\phi_1^2 + \phi_2^4)$
13.1	$(m, 0, m, 0, \phi, \phi)$	$2m^4 + 4\gamma_1 m^2 \phi^2 + 2m^2 t + 2r\phi^2 - v\phi^4 + 2\phi^4$
13.2	$(m, 0, m, \pi/2, \phi, \phi)$	$2m^4 + 4\gamma_1 m^2 \phi^2 + 2m^2 t - 2\gamma m \phi^2 + 2r\phi^2 - v\phi^4 - 2\omega\phi^4 + 2\phi^4$
13.3	$(m, 0, m, -\pi/2, \phi, \phi)$	$2m^4 + 4\gamma_1 m^2 \phi^2 + 2m^2 t + 2\gamma m \phi^2 + 2r\phi^2 - v\phi^4 - 2\omega\phi^4 + 2\phi^4$
14.1	$(m, 0, m, 0, 0, \phi)$	$\eta \phi^4 + 2m^4 + 2\gamma_1 m^2 \phi^2 + 2m^2 t - \gamma m \phi^2 + r\phi^2 + \frac{\phi^4}{2}$



14.2	$(m, 0, m, \pi/2, 0, \phi)$	$\eta\phi^4 + 2m^4 + 2\gamma_1 m^2 \phi^2 + 2m^2 t - \gamma m \phi^2 + r\phi^2 + \frac{\phi^4}{2}$
15.1	$(m, 0, m, 0, \phi_1, \phi_2)$	$\eta(\phi_1^4 - 2\phi_2^2 \phi_1^2 + \phi_2^4) + 2m^4 + 2\gamma_1 m^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2) + 2m^2 t + \gamma m (\phi_1^2 - \phi_2^2)$ $+ r(\phi_1^2 + \phi_2^2) - v\phi_1^2 \phi_2^2 + \frac{1}{2}(\phi_1^4 + 2\phi_2^2 \phi_1^2 + \phi_2^4)$
15.2	$(m, 0, m, \pi/2, \phi_1, \phi_2)$	$\eta(\phi_1^4 - 2\phi_2^2 \phi_1^2 + \phi_2^4) + 2m^4 + 2\gamma_1 m^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2) + 2m^2 t - 2\gamma m \phi_1 \phi_2$ $+ \gamma m (\phi_1^2 - \phi_2^2) + r(\phi_1^2 + \phi_2^2) - v\phi_1^2 \phi_2^2 - 2\omega \phi_1^2 \phi_2^2 + \frac{1}{2}(\phi_1^4 + 2\phi_2^2 \phi_1^2 + \phi_2^4)$
15.3	$(m, 0, m, -\pi/2, \phi_1, \phi_2)$	$\eta(\phi_1^4 - 2\phi_2^2 \phi_1^2 + \phi_2^4) + 2m^4 + 2\gamma_1 m^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2) + 2m^2 t + 2\gamma m \phi_1 \phi_2$ $+ \gamma m (\phi_1^2 - \phi_2^2) + r(\phi_1^2 + \phi_2^2) - v\phi_1^2 \phi_2^2 - 2\omega \phi_1^2 \phi_2^2 + \frac{1}{2}(\phi_1^4 + 2\phi_2^2 \phi_1^2 + \phi_2^4)$
16.1	$(m_1, m_2, 0, 0, \phi, \phi)$	$2\gamma m_1 \phi^2 + 2\gamma_1 (m_1^2 + m_2^2) \phi^2 + (m_1^2 + m_2^2) t + \frac{1}{2} (m_1^2 + m_2^2)^2 + 2r\phi^2 - v\phi^4 + 2\phi^4$
16.2	$(m_1, m_2, 0, \pi, \phi, \phi)$	$-2\gamma m_1 \phi^2 + 2\gamma_1 (m_1^2 + m_2^2) \phi^2 + (m_1^2 + m_2^2) t + \frac{1}{2} (m_1^2 + m_2^2)^2 + 2r\phi^2 - v\phi^4 + 2\phi^4$
16.3	$(m_1, m_2, 0, \pi/2, \phi, \phi)$	$-2\gamma m_2 \phi^2 + 2\gamma_1 (m_1^2 + m_2^2) \phi^2 + (m_1^2 + m_2^2) t + \frac{1}{2} (m_1^2 + m_2^2)^2 + 2r\phi^2 - v\phi^4$ $-2\omega \phi^4 + 2\phi^4$
16.4	$(m_1, m_2, 0, -\phi/2, \phi, \phi)$	$2\gamma m_2 \phi^2 + 2\gamma_1 (m_1^2 + m_2^2) \phi^2 + (m_1^2 + m_2^2) t + \frac{1}{2} (m_1^2 + m_2^2)^2 + 2r\phi^2 - v\phi^4$ $-2\omega \phi^4 + 2\phi^4$
17.1	$(m_1, m_2, 0, 0, 0, \phi)$	$\eta\phi^4 + \gamma_1 (m_1^2 + m_2^2) \phi^2 + (m_1^2 + m_2^2) t + \frac{1}{2} (m_1^2 + m_2^2)^2 + r\phi^2 + \frac{\phi^4}{2}$
18.1	$(m_1, m_2, 0, 0, \phi_1, \phi_2)$	$\eta(\phi_1^4 - 2\phi_2^2 \phi_1^2 + \phi_2^4) + \gamma_1 (m_1^2 + m_2^2) (\phi_1^2 + \phi_2^2) + 2\gamma m_1 \phi_1 \phi_2 + (m_1^2 + m_2^2) t$ $+ \frac{1}{2} (m_1^2 + m_2^2)^2 + r(\phi_1^2 + \phi_2^2) - v\phi_1^2 \phi_2^2 + \frac{1}{2} (\phi_1^4 + 2\phi_2^2 \phi_1^2 + \phi_2^4)$
18.2	$(m_1, m_2, 0, \pi, \phi_1, \phi_2)$	$\eta(\phi_1^4 - 2\phi_2^2 \phi_1^2 + \phi_2^4) + \gamma_1 (m_1^2 + m_2^2) (\phi_1^2 + \phi_2^2) - 2\gamma m_1 \phi_1 \phi_2 + (m_1^2 + m_2^2) t$ $+ \frac{1}{2} (m_1^2 + m_2^2)^2 + r(\phi_1^2 + \phi_2^2) - v\phi_1^2 \phi_2^2 + \frac{1}{2} (\phi_1^4 + 2\phi_2^2 \phi_1^2 + \phi_2^4)$

18.3	$(m_1, m_2, 0, \pi/2, \phi_1, \phi_2)$	$\eta (\phi_1^4 - 2\phi_2^2 \phi_1^2 + \phi_2^4) + \gamma_1 (m_1^2 + m_2^2) (\phi_1^2 + \phi_2^2) - 2\gamma m_2 \phi_1 \phi_2 + (m_1^2 + m_2^2) t$ $+ \frac{1}{2} (m_1^2 + m_2^2)^2 + r (\phi_1^2 + \phi_2^2) - v \phi_1^2 \phi_2^2 - 2\omega \phi_1^2 \phi_2^2 + \frac{1}{2} (\phi_1^4 + 2\phi_2^2 \phi_1^2 + \phi_2^4)$
18.4	$(m_1, m_2, 0, -\pi/2, \phi_1, \phi_2)$	$\eta (\phi_1^4 - 2\phi_2^2 \phi_1^2 + \phi_2^4) + \gamma_1 (m_1^2 + m_2^2) (\phi_1^2 + \phi_2^2) + 2\gamma m_2 \phi_1 \phi_2 + (m_1^2 + m_2^2) t$ $+ \frac{1}{2} (m_1^2 + m_2^2)^2 + r (\phi_1^2 + \phi_2^2) - v \phi_1^2 \phi_2^2 - 2\omega \phi_1^2 \phi_2^2 + \frac{1}{2} (\phi_1^4 + 2\phi_2^2 \phi_1^2 + \phi_2^4)$
19.1	$(0, m_2, m_3, 0, \phi, \phi)$	$2\gamma_1 (m_2^2 + m_3^2) \phi^2 + (m_2^2 + m_3^2) t + \frac{1}{2} (m_2^2 + m_3^2)^2 + 2r\phi^2 - v\phi^4 + 2\phi^4$
19.2	$(0, m_2, m_3, \pi/2, \phi, \phi)$	$-2\gamma m_2 \phi^2 + 2\gamma_1 (m_2^2 + m_3^2) \phi^2 + (m_2^2 + m_3^2) t + \frac{1}{2} (m_2^2 + m_3^2)^2 + 2r\phi^2 - v\phi^4$ $- 2\omega \phi^4 + 2\phi^4$
19.3	$(0, m_2, m_3, -\pi/2, \phi, \phi)$	$2\gamma m_2 \phi^2 + 2\gamma_1 (m_2^2 + m_3^2) \phi^2 + (m_2^2 + m_3^2) t + \frac{1}{2} (m_2^2 + m_3^2)^2 + 2r\phi^2 - v\phi^4$ $- 2\omega \phi^4 + 2\phi^4$
20.1	$(0, m_2, m_3, 0, 0, \phi)$	$\eta \phi^4 - \gamma m_3 \phi^2 + \gamma_1 (m_2^2 + m_3^2) \phi^2 + (m_2^2 + m_3^2) t + \frac{1}{2} (m_2^2 + m_3^2)^2 + r\phi^2 + \frac{\phi^4}{2}$
21.1	$(0, m_2, m_3, 0, \phi_1, \phi_2)$	$\eta (\phi_1^4 - 2\phi_2^2 \phi_1^2 + \phi_2^4) + \gamma_1 (m_2^2 + m_3^2) (\phi_1^2 + \phi_2^2) + \gamma m_3 (\phi_1^2 - \phi_2^2) + (m_2^2 + m_3^2) t$ $+ \frac{1}{2} (m_2^2 + m_3^2)^2 + r (\phi_1^2 + \phi_2^2) - v \phi_1^2 \phi_2^2 + \frac{1}{2} (\phi_1^4 + 2\phi_2^2 \phi_1^2 + \phi_2^4)$
21.2	$(0, m_2, m_3, \pi/2, \phi_1, \phi_2)$	$\eta (\phi_1^4 - 2\phi_2^2 \phi_1^2 + \phi_2^4) + \gamma_1 (m_2^2 + m_3^2) (\phi_1^2 + \phi_2^2) - 2\gamma m_2 \phi_1 \phi_2$ $+ \gamma m_3 (\phi_1^2 - \phi_2^2) + (m_2^2 + m_3^2) t + \frac{1}{2} (m_2^2 + m_3^2)^2 + r (\phi_1^2 + \phi_2^2)$ $- v \phi_1^2 \phi_2^2 - 2\omega \phi_1^2 \phi_2^2 + \frac{1}{2} (\phi_1^4 + 2\phi_2^2 \phi_1^2 + \phi_2^4)$
21.3	$(0, m_2, m_3, -\pi/2, \phi_1, \phi_2)$	$\eta (\phi_1^4 - 2\phi_2^2 \phi_1^2 + \phi_2^4) + \gamma_1 (m_2^2 + m_3^2) (\phi_1^2 + \phi_2^2) + 2\gamma m_2 \phi_1 \phi_2$ $+ \gamma m_3 (\phi_1^2 - \phi_2^2) + (m_2^2 + m_3^2) t + \frac{1}{2} (m_2^2 + m_3^2)^2 + r (\phi_1^2 + \phi_2^2)$ $- v \phi_1^2 \phi_2^2 - 2\omega \phi_1^2 \phi_2^2 + \frac{1}{2} (\phi_1^4 + 2\phi_2^2 \phi_1^2 + \phi_2^4)$

22.1	$(m_1, m_2, m_3, 0, \phi, \phi)$	$2\gamma m_1 \phi^2 + 2\gamma_1 (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) \phi^2 + (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) t + \frac{1}{2} (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2)^2$ $+ 2r\phi^2 - v\phi^4 + 2\phi^4$
22.2	$(m_1, m_2, m_3, \pi, \phi, \phi)$	$-2\gamma m_1 \phi^2 + 2\gamma_1 (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) \phi^2 + (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) t + \frac{1}{2} (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2)^2$ $+ 2r\phi^2 - v\phi^4 + 2\phi^4$
22.3	$(m_1, m_2, m_3, \pi/2, \phi, \phi)$	$-2\gamma m_2 \phi^2 + 2\gamma_1 (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) \phi^2 + (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) t + \frac{1}{2} (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2)^2$ $+ 2r\phi^2 - v\phi^4 - 2\omega\phi^4 + 2\phi^4$
22.4	$(m_1, m_2, m_3, -\pi/2, \phi, \phi)$	$2\gamma m_2 \phi^2 + 2\gamma_1 (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) \phi^2 + (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) t + \frac{1}{2} (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2)^2$ $+ 2r\phi^2 - v\phi^4 - 2\omega\phi^4 + 2\phi^4$
23.1	$(m_1, m_2, m_3, 0, 0, \phi)$	$\eta \phi^4 - \gamma m_3 \phi^2 + \gamma_1 (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) \phi^2 + (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) t + \frac{1}{2} (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2)^2$ $+ r\phi^2 + \frac{\phi^4}{2}$
24.1	$(m_1, m_2, m_3, 0, \phi_1, \phi_2)$	$\eta (\phi_1^4 - 2\phi_2^2 \phi_1^2 + \phi_2^4) + \gamma_1 (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) (\phi_1^2 + \phi_2^2) + 2\gamma m_1 \phi_1 \phi_2$ $+ \gamma m_3 (\phi_1^2 - \phi_2^2) + (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) t + \frac{1}{2} (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2)^2$ $+ r (\phi_1^2 + \phi_2^2) - v\phi_1^2 \phi_2^2 + \frac{1}{2} (\phi_1^4 + 2\phi_2^2 \phi_1^2 + \phi_2^4)$
24.2	$(m_1, m_2, m_3, \pi, \phi_1, \phi_2)$	$\eta (\phi_1^4 - 2\phi_2^2 \phi_1^2 + \phi_2^4) + \gamma_1 (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) (\phi_1^2 + \phi_2^2) - 2\gamma m_1 \phi_1 \phi_2$ $+ \gamma m_3 (\phi_1^2 - \phi_2^2) + (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) t + \frac{1}{2} (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2)^2$ $+ r (\phi_1^2 + \phi_2^2) - v\phi_1^2 \phi_2^2 + \frac{1}{2} (\phi_1^4 + 2\phi_2^2 \phi_1^2 + \phi_2^4)$

24.3	$(m_1, m_2, m_3, \pi/2, \phi_1, \phi_2)$	$\eta (\phi_1^4 - 2\phi_2^2 \phi_1^2 + \phi_2^4) + \gamma_1 (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) (\phi_1^2 + \phi_2^2) - 2\gamma m_2 \phi_1 \phi_2 + \gamma m_3 (\phi_1^2 - \phi_2^2)$ $+ (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) t + \frac{1}{2} (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2)^2 + r (\phi_1^2 + \phi_2^2) - v \phi_1^2 \phi_2^2 - 2\omega \phi_1^2 \phi_2^2$ $+ \frac{1}{2} (\phi_1^4 + 2\phi_2^2 \phi_1^2 + \phi_2^4)$
24.4	$(m_1, m_2, m_3, -\pi/2, \phi_1, \phi_2)$	$\eta (\phi_1^4 - 2\phi_2^2 \phi_1^2 + \phi_2^4) + \gamma_1 (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) (\phi_1^2 + \phi_2^2) + 2\gamma m_2 \phi_1 \phi_2 + \gamma m_3 (\phi_1^2 - \phi_2^2)$ $+ (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) t + \frac{1}{2} (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2)^2 + r (\phi_1^2 + \phi_2^2) - v \phi_1^2 \phi_2^2 - 2\omega \phi_1^2 \phi_2^2$ $+ \frac{1}{2} (\phi_1^4 + 2\phi_2^2 \phi_1^2 + \phi_2^4)$
25.1	$(m, m, m_3, 0, \phi, \phi)$	$2\gamma_1 (2m^2 + m_3^2) \phi^2 + (2m^2 + m_3^2) t + \frac{1}{2} (2m^2 + m_3^2)^2 + 2\gamma m \phi^2 + 2r \phi^2 - v \phi^4 + 2\phi^4$
25.2	$(m, m, m_3, \pi, \phi, \phi)$	$2\gamma_1 (2m^2 + m_3^2) \phi^2 + (2m^2 + m_3^2) t + \frac{1}{2} (2m^2 + m_3^2)^2 - 2\gamma m \phi^2 + 2r \phi^2 - v \phi^4 + 2\phi^4$
25.3	$(m, m, m_3, \pi/2, \phi, \phi)$	$2\gamma_1 (2m^2 + m_3^2) \phi^2 + (2m^2 + m_3^2) t + \frac{1}{2} (2m^2 + m_3^2)^2 - 2\gamma m \phi^2 + 2r \phi^2$ $- v \phi^4 - 2\omega \phi^4 + 2\phi^4$
25.4	$(m, m, m_3, -\pi/2, \phi, \phi)$	$2\gamma_1 (2m^2 + m_3^2) \phi^2 + (2m^2 + m_3^2) t + \frac{1}{2} (2m^2 + m_3^2)^2 + 2\gamma m \phi^2 + 2r \phi^2$ $- v \phi^4 - 2\omega \phi^4 + 2\phi^4$
26.1	$(m, m, m_3, 0, 0, \phi)$	$\eta \phi^4 + \gamma_1 (2m^2 + m_3^2) \phi^2 + (2m^2 + m_3^2) t + \frac{1}{2} (2m^2 + m_3^2)^2 - \gamma m_3 \phi^2 + r \phi^2 + \frac{\phi^4}{2}$
27.1	$(m, m, m_3, 0, \phi_1, \phi_2)$	$\eta (\phi_1^4 - 2\phi_2^2 \phi_1^2 + \phi_2^4) + \gamma_1 (2m^2 + m_3^2) (\phi_1^2 + \phi_2^2) + (2m^2 + m_3^2) t + \frac{1}{2} (2m^2 + m_3^2)^2$ $+ 2\gamma m \phi_1 \phi_2 + \gamma m_3 (\phi_1^2 - \phi_2^2) + r (\phi_1^2 + \phi_2^2) - v \phi_1^2 \phi_2^2 + \frac{1}{2} (\phi_1^4 + 2\phi_2^2 \phi_1^2 + \phi_2^4)$
27.2	$(m, m, m_3, \pi, \phi_1, \phi_2)$	$\eta (\phi_1^4 - 2\phi_2^2 \phi_1^2 + \phi_2^4) + \gamma_1 (2m^2 + m_3^2) (\phi_1^2 + \phi_2^2) + (2m^2 + m_3^2) t + \frac{1}{2} (2m^2 + m_3^2)^2$ $- 2\gamma m \phi_1 \phi_2 + \gamma m_3 (\phi_1^2 - \phi_2^2) + r (\phi_1^2 + \phi_2^2) - v \phi_1^2 \phi_2^2 + \frac{1}{2} (\phi_1^4 + 2\phi_2^2 \phi_1^2 + \phi_2^4)$

27.3	$(m, m, m3, \pi/2, \phi_1, \phi_2)$	$\eta (\phi_1^4 - 2\phi_2^2\phi_1^2 + \phi_2^4) + \gamma_1 (2m^2 + m_3^2) (\phi_1^2 + \phi_2^2) + (2m^2 + m_3^2) t + \frac{1}{2} (2m^2 + m_3^2)^2$
27.4	$(m, m, m3, -\pi/2, \phi_1, \phi_2)$	$-2\gamma m\phi_1\phi_2 + \gamma m_3 (\phi_1^2 - \phi_2^2) + r (\phi_1^2 + \phi_2^2) - v\phi_1^2\phi_2^2 - 2\omega\phi_1^2\phi_2^2 + \frac{1}{2} (\phi_1^4 + 2\phi_2^2\phi_1^2 + \phi_2^4)$ $\eta (\phi_1^4 - 2\phi_2^2\phi_1^2 + \phi_2^4) + \gamma_1 (2m^2 + m_3^2) (\phi_1^2 + \phi_2^2) + (2m^2 + m_3^2) t + \frac{1}{2} (2m^2 + m_3^2)^2$ $+2\gamma m\phi_1\phi_2 + \gamma m_3 (\phi_1^2 - \phi_2^2) + r (\phi_1^2 + \phi_2^2) - v\phi_1^2\phi_2^2 - 2\omega\phi_1^2\phi_2^2 + \frac{1}{2} (\phi_1^4 + 2\phi_2^2\phi_1^2 + \phi_2^4)$
28.1	$(m, m2, m, 0, \phi, \phi)$	$2\gamma_1 (2m^2 + m_2^2) \phi^2 + (2m^2 + m_2^2) t + \frac{1}{2} (2m^2 + m_2^2)^2 + 2\gamma m\phi^2 + 2r\phi^2 - v\phi^4 + 2\phi^4$
28.2	$(m, m2, m, \pi, \phi, \phi)$	$2\gamma_1 (2m^2 + m_2^2) \phi^2 + (2m^2 + m_2^2) t + \frac{1}{2} (2m^2 + m_2^2)^2 - 2\gamma m\phi^2 + 2r\phi^2 - v\phi^4 + 2\phi^4$
28.3	$(m, m2, m, \pi/2, \phi, \phi)$	$2\gamma_1 (2m^2 + m_2^2) \phi^2 + (2m^2 + m_2^2) t + \frac{1}{2} (2m^2 + m_2^2)^2 - 2\gamma m_2\phi^2 + 2r\phi^2 - v\phi^4$ $-2\omega\phi^4 + 2\phi^4$
28.4	$(m, m2, m, -\pi/2, \phi, \phi)$	$2\gamma_1 (2m^2 + m_2^2) \phi^2 + (2m^2 + m_2^2) t + \frac{1}{2} (2m^2 + m_2^2)^2 + 2\gamma m_2\phi^2 + 2r\phi^2 - v\phi^4$ $-2\omega\phi^4 + 2\phi^4$
29.1	$(m, m2, m, 0, \phi_1, \phi_2)$	$\eta (\phi_1^4 - 2\phi_2^2\phi_1^2 + \phi_2^4) + \gamma_1 (2m^2 + m_2^2) (\phi_1^2 + \phi_2^2) + (2m^2 + m_2^2) t + \frac{1}{2} (2m^2 + m_2^2)^2$ $+2\gamma m\phi_1\phi_2 + \gamma m (\phi_1^2 - \phi_2^2) + r (\phi_1^2 + \phi_2^2) - v\phi_1^2\phi_2^2 + \frac{1}{2} (\phi_1^4 + 2\phi_2^2\phi_1^2 + \phi_2^4)$
29.2	$(m, m2, m, \pi, \phi_1, \phi_2)$	$\eta (\phi_1^4 - 2\phi_2^2\phi_1^2 + \phi_2^4) + \gamma_1 (2m^2 + m_2^2) (\phi_1^2 + \phi_2^2) + (2m^2 + m_2^2) t + \frac{1}{2} (2m^2 + m_2^2)^2$ $-2\gamma m\phi_1\phi_2 + \gamma m (\phi_1^2 - \phi_2^2) + r (\phi_1^2 + \phi_2^2) - v\phi_1^2\phi_2^2 + \frac{1}{2} (\phi_1^4 + 2\phi_2^2\phi_1^2 + \phi_2^4)$
29.3	$(m, m2, m, \pi/2, \phi_1, \phi_2)$	$\eta (\phi_1^4 - 2\phi_2^2\phi_1^2 + \phi_2^4) + \gamma_1 (2m^2 + m_2^2) (\phi_1^2 + \phi_2^2) + (2m^2 + m_2^2) t + \frac{1}{2} (2m^2 + m_2^2)^2$ $-2\gamma m_2\phi_1\phi_2 + \gamma m (\phi_1^2 - \phi_2^2) + r (\phi_1^2 + \phi_2^2) - v\phi_1^2\phi_2^2 - 2\omega\phi_1^2\phi_2^2 + \frac{1}{2} (\phi_1^4 + 2\phi_2^2\phi_1^2 + \phi_2^4)$

29.4	$(m, m_2, m, -\pi/2, \phi_1, \phi_2)$	$\eta (\phi_1^4 - 2\phi_2^2 \phi_1^2 + \phi_2^4) + \gamma_1 (2m^2 + m_2^2) (\phi_1^2 + \phi_2^2) + (2m^2 + m_2^2) t + \frac{1}{2} (2m^2 + m_2^2)^2$ $+ 2\gamma m_2 \phi_1 \phi_2 + \gamma m (\phi_1^2 - \phi_2^2) + r (\phi_1^2 + \phi_2^2) - v \phi_1^2 \phi_2^2 - 2\omega \phi_1^2 \phi_2^2 + \frac{1}{2} (\phi_1^4 + 2\phi_2^2 \phi_1^2 + \phi_2^4)$
------	---------------------------------------	---

## CAPÍTULO 4

# Conclusões

A supercondutividade foi descoberta há mais de 100 anos, enquanto os supercondutores ferromagnéticos foi uma previsão mais recente, devido as condições experimentais extremas. O material investigado deve estar próximo a ordem magnética, o que necessita a aplicação de altas temperaturas. Outra barreira é que a temperatura de transição supercondutora é muito baixa, e o resfriamento a temperaturas muito baixas se faz necessário para os supercondutores ferromagnéticos.

Pesquisas em supercondutores ferromagnéticos apenas começaram. Medidas da excitação magnética e eletrônica nas fases supercondutoras e ferromagnéticas, ainda apresentam um déficit nos resultados, mesmo com a expectativa para informações cruciais sobre a estrutura do gap supercondutor e mecanismo de pareamento. O *URhGe* e *UCoGe* apresentam a vantagem na obtenção de medidas já que podem ser realizadas em pressão ambiente.

A coexistência de supercondutividade e magnetismo oferece um atrativo por se tratar da investigação de um novo fenômeno. Essa coexistência também é importante para o entendimento do fenômeno da supercondutividade, uma vez que pesquisas em supercondutores ferromagnéticos pode ajudar a desvendar como flutuações magnéticas pode estimular a supercondutividade.

Neste trabalho, foi realizado um estudo do diagrama de fase dos supercondutores ferromagnéticos usando uma aproximação de Ginzburg-Landau. Introduzimos um parâmetro de ordem supercondutor complexo de duas componentes e um vetor de três componentes para a magnetização. Analizamos fenomenologicamente a função das anisotropias magnéticas, par de Cooper e cristal para a descrição dos diagramas de fase para os supercondutores ferromagnéticos. Aplicamos a energia livre de Ginzburg-Landau e expandimos os parâmetros de ordem ferromagnético e supercondutor até a quarta ordem como uma estimativa inicial. A partir das equações obtidas da teoria de GL, fizemos uma análise para alguns casos particulares e explicamos as condições para coexistência da supercondutividade e magnetismo.

Nossa investigação focou nos efeitos de interação entre supercondutores ferromagnéticos. Esse efeito se dá devido o termo de acoplamento  $\mathbf{M}\psi_1\psi_2$  na energia livre de Ginzburg-Landau, o qual força a fase supercondutora na fase ferromagnética. Nos baseamos em alguns estudos [20, 7] que pretendeu esclarecer o comportamento termodinâmico onde afirmam que a supercondutividade não é possível sem a magnetização, nesses materiais.

Para que fosse possível descrever as fases de possível coexistência, primeiro encontramos todas as energias livre para os parâmetros. Assim conseguimos mostrar o diagrama de fases da densidade de energia em função da variável termodinâmica de pressão e temperatura. Em nosso estudo, consideramos as respectivas simetrias do cristal mesmo sabendo que não é substancial quando a constante de acoplamento da supercondutividade com magnetismo  $\gamma$  está presente na energia livre. Pudemos perceber que a supercondutividade não coexistia na fase ferromagnética quando  $\gamma$  era anulado na energia livre. Essas mesmas energias que não apresentavam coexistência foi percebida a partir da análise da paridade dos funcionais de energias.

Na análise da coexistência entre as fases ainda conseguimos observar a fase ferromagnética presente na fase puramente supercondutora e na para paramagnética (estado normal); Porém nosso estudo focou apenas na investigação dos compostos ferromagnéticos itinerantes que apresentam temperatura de Curie muito maior que a temperatura crítica, sendo a razão do desencadeamento da magnetização em supercondutores não convencionais. Nossa investigação se mostrou conforme informações experimentais.



## Referências Bibliográficas

- [1] James F Annett. *Superconductivity, superfluids and condensates*, volume 5. Oxford University Press, 2004.
- [2] Dai Aoki, Tatsuma D. Matsuda, Valentin Taufour, Elena Hassinger, Georg Knebel, and Jacques Flouquet. Extremely large and anisotropic upper critical field and the ferromagnetic instability in *ucoge*. *Journal of the Physical Society of Japan*, 78(11):113709, 2009.
- [3] H Belich and Dimo Uzunov. Diamagnetic critical singularity in unconventional ferromagnetic superconductors. 12 2010.
- [4] Paulo S Branício. Introdução à supercondutividade, suas aplicações e a mini-revolução provocada pela redescoberta do *mgb<sub>2</sub>*; uma abordagem didática. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 23(4):381–390, 2001.
- [5] Marconi BS Costa and Antonio C Pavao. Supercondutividade: um século de desafios e superação. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 34(2):2602, 2012.
- [6] Marconi BS Costa and Antonio C Pavao. Supercondutividade: um século de desafios e superação. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 34(2):2602, 2012.
- [7] Michael Cottam, Diana Shopova, and Dimo Uzunov. On the phase diagrams of the ferromagnetic superconductors *uge<sub>2</sub>* and *zrzn<sub>2</sub>*. *Physics Letters A*, 373:152–155, 12 2008.
- [8] Mauricio Gomes das Virgens. *Supercondutividade, ferromagnetismo e efeito magnetocalórico nos sistemas RuSr<sub>2</sub> Ln<sub>1-x</sub> Ce<sub>x</sub>, 5 Cu<sub>2</sub> O<sub>10</sub> (Ln= Gd, Eu)*. PhD thesis, UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE, 2005.

- [9] Valéria Silva Dias and Roberto de Andrade Martins. Michael faraday: o caminho da livraria à descoberta da indução eletromagnética. *Ciência & Educação (Bauru)*, pages 517–530, 2004.
- [10] Fernando Assis Garcia et al. Simetria do parâmetro de ordem em supercondutores ferromagnéticos. 2007.
- [11] VL Ginzburg. Ferromagnetic superconductors. *Soviet Physics JETP-USSR*, 4(2):153–160, 1957.
- [12] David Goodstein and Judith Goodstein. Richard feynman and the history of superconductivity. In *History of Original Ideas and Basic Discoveries in Particle Physics*, pages 773–791. Springer, 1996.
- [13] TR Kirkpatrick and D Belitz. Coexistence of ferromagnetism and superconductivity. *Physical Review B*, 67(2):024515, 2003.
- [14] Heike Kamerlingh Onnes. Investigations into the properties of substances at low temperatures, which have led, amongst other things, to the preparation of liquid helium. *Nobel lecture*, 4, 1913.
- [15] Fernanda Ostermann, Leticie Mendonca Ferreira, and Claudio Jose de Holanda Cavalcanti. Tópicos de física contemporânea no ensino médio: um texto para professores sobre supercondutividade. *Revista brasileira de ensino de física*. Vol. 20, n. 3 (set. 1998), p. 270-2884, 1998.
- [16] SH Pereira and Marcelo G Félix. 100 anos de supercondutividade e a teoria de ginzburg-landau. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 35(1):1313, 2013.
- [17] Jorge Luiz Pimentel Junior. Estudo da interação entre supercondutividade e magnetismo nos compostos  $\text{Rsr}_2\text{gdCu}_2\text{O}_8$ ,  $\text{feseO}_5$  e  $\text{BaO}_4\text{K}_0.16\text{Fe}_2\text{As}_2$ . 2013.
- [18] Charles Poole, Horacio Farach, Richard Creswick, and Ruslan Prozorov and. *Superconductivity*. Academic Press, 2 edition, 2007.

- [19] S. S. Saxena, P. Agarwal, K. Ahilan, F. M. Grosche, R. K. W. Haselwimmer, M. J. Steiner, E. Pugh, I. R. Walker, S. R. Julian, P. Monthoux, G. G. Lonzarich, A. Huxley, I. Sheikin, D. Braithwaite, and J. Flouquet. Superconductivity on the border of itinerant-electron ferromagnetism in  $UGe_2$ . *NATURE*, 406, 2000.
- [20] Diana V. Shopova and Michail D. Todorov. Phenomenological description of anisotropy effects in some ferromagnetic superconductors. *Physics Letters A*, 379(20):1391 – 1396, 2015.
- [21] Diana V Shopova, Tsvetomir E Tsvetkov, and Dimo I Uzunov. Phenomenological study of spin-triplet ferromagnetic superconductors. *arXiv preprint cond-mat/0411503*, 2004.
- [22] Fillipe Cesar Oliveira da SILVA et al. Estudo computacional de vórtices em discos supercondutores na presença de campo magnético externo e dipolo magnético. 2015.
- [23] Naoyuki Tateiwa, Yoshinori Haga, Tatsuma D. Matsuda, Etsuji Yamamoto, and Zachary Fisk. Unconventional critical scaling of magnetization in ferromagnetic uranium superconductors  $UGe_2$  and  $URhGe$ . *Phys. Rev. B*, 89:064420, Feb 2014.
- [24] M. B. Walker and K. V. Samokhin. Model for superconductivity in ferromagnetic  $ZrZn_2$ . *Phys. Rev. Lett.*, 88:207001, May 2002.
- [25] B.D. White, J.D. Thompson, and M.B. Maple. Unconventional superconductivity in heavy-fermion compounds. *Physica C: Superconductivity and its Applications*, 514:246â278, 2015.
- [26] K Wysokinski. Remarks on the first hundred years of superconductivity. *Acta Physica Polonica Series a*, 121:721, 11 2011.
- [27] Wang Zhen-Yan and Shen Rui. Anisotropy of p-wave josephson junction. *Chinese Physics B*, 19(8):087401, aug 2010.