



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO

DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA APLICADA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

ISRAEL FERRAZ DE ARAÚJO

*Estatísticas de Espalhamento e de Tempo de Retardo no
Transporte Quântico*

Recife-PE

2017

ISRAEL FERRAZ DE ARAÚJO

*Estatísticas de Espalhamento e de Tempo de Retardo no
Transporte Quântico*

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada do Departamento de Física da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Física.

Orientador: Dr. Ailton Fernandes de Macedo Júnior

Recife-PE
2017

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA APLICADA

Estatísticas de Espalhamento e de Tempo de Retardo no Transporte Quântico

ISRAEL FERRAZ DE ARAÚJO

Dissertação julgada adequada para obtenção do título de mestre em Física, defendida e aprovada por unanimidade em 29 de junho de 2017 pela Comissão Examinadora.

ORIENTADOR:

Prof. Dr. Ailton Fernandes de Macedo Júnior
UFRPE

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Antônio Murilo Santos Macêdo
UFPE

Prof. Dr. Anderson Barbosa
UFRPE

“Quando considero a duração mínima da minha vida, absorvida pela eternidade precedente e seguinte, o espaço diminuto que ocupo, e mesmo o que vejo, abismado na infinita imensidade dos espaços que ignoro e me ignoram, assusto-me e assombro-me de me ver aqui e não lá. Quem me pôs aqui? Por ordem de quem me foram destinados este lugar e este espaço?”

Blaise Pascal

Resumo

Utilizando Teoria de Matrizes Aleatórias (TMA) em seu trabalho, Novaes apresentou estatísticas lineares nos autovalores da matriz de tempo de retardo e estendeu seus resultados às médias dos momentos generalizados, uma estatística não linear. O método utilizado conseguiu resultados gerais e compactos, mas restritos apenas a uma das três classes de simetria de Dyson. No capítulo 3, baseados no método da função geratriz hipergeométrica de Macêdo e Macedo, apresentaremos resultados para as todas classes de simetria. Também demonstraremos que esses resultados são equivalentes aos de Novaes.

Em seu artigo, Luque e Vivo apresentaram estatísticas não lineares dos permanentes nos autovalores de matrizes aleatórias invariantes, com resultados específicos para o ensemble de Jacobi para as três classes de simetrias de Dyson. De maneira semelhante, apresentaremos no capítulo 4 os resultados para o ensemble de Laguerre nos inversos dos autovalores, ou seja, as estatísticas não lineares para os autovalores das matrizes de tempo de retardo.

Embora a vantagem do uso da TMA esteja na possibilidade de calcularmos quantidades físicas e matemáticas analiticamente, algumas vezes é necessário recorrermos às simulações numéricas. No capítulo 5, seguindo ideias propostas na literatura por Mezzadri, implementamos um algoritmo eficiente em Python para gerar numericamente essas matrizes para o ensemble Circular, além do método Hamiltoniano para geração de matrizes de tempo de retardo, não nos restringindo às três classes clássicas. Rotinas para os ensembles de Ginibre e Gaussiano também são implementadas.

Palavras-chave: cavidades caóticas, matrizes aleatórias, Laguerre, permanente, espalhamento, tempo de retardo, python.

Abstract

Using Random Matrix Theory (RMT) in his work, Novaes presented linear statistics on the eigenvalues of the time-delay matrix and extended its results to the averages of the generalized moments, a nonlinear statistic. The method used achieved general and compact results, but were restricted to just one of Dyson's three symmetry classes. In chapter 3 we will present results for the three Dyson's symmetry classes, which were based on the hypergeometric generating function method of Macêdo and Macedo. We will also show that these results are equivalent to those of Novaes.

In their article, Luque and Vivo presented nonlinear statistics of permanents on the eigenvalues of invariant random matrices, with specific results for the Jacobi Ensemble for the three Dyson's symmetry classes. In a similar way, in chapter 4 we will present results for the Laguerre Ensemble on the inverse of the eigenvalues, that is, the nonlinear statistics on the eigenvalues of the time-delay matrices.

Although the advantage of using RMT is that we can calculate physical and mathematical quantities analytically, it is sometimes necessary to use numerical simulations. In chapter 5, following ideas proposed in the literature by Mezzadri, we implemented an efficient algorithm in Python to numerically generate these matrices for the Circular ensemble, and also the Hamiltonian method for generation of time-delay matrices, not restricted to the three classic classes. Routines for Ginibre and Gaussian ensembles were also implemented.

Keywords: chaotic cavities, random matrices, Laguerre, permanent, scattering, time-delay, python.

Agradecimentos

Aos colegas, cujo companheirismo, amizade e ajuda são fundamentais.

Aos professores, pelo empenho, comprometimento, compreensão e paciência.

Ao amigo e compadre, Rui, pelo permanente apoio e incentivo.

À família, por ser presente, sempre.

À minha esposa, Bruna, e minha filha, Ingrid, pelo amor e confiança incondicionais.

Ao professor e orientador Ailton, cuja atenção e crença são importantes, obrigado.

Sumário

Resumo	ii
Abstract	iii
Agradecimentos	iv
Sumário	v
Lista de Figuras	vii
Lista de Tabelas	viii
Abreviações	ix
Constantes Físicas	x
1 Introdução	1
1.1 Sistema Físico	1
1.2 Espalhamento	3
1.3 Tempo de Retardo	5
1.4 Objetivos	6
1.5 Organização	7
2 Fundamentos e Teoria	9
2.1 Partições	9
2.2 Funções Simétricas	15
2.3 Polinômios de Jack	20
2.4 Função Hipergeométrica de Argumento Matricial	24
2.5 Resultados de Kaneko	26
2.5.1 Ensemble de Jacobi	27
2.5.2 Ensemble de Laguerre	28
2.6 Teoria de Matrizes Aleatórias	30
2.6.1 Matriz de Espalhamento	32
2.6.1.1 Sistemas fechados: Ensembles Gaussianos	33
2.6.1.2 Sistemas abertos: Ensembles Circulares	35
2.6.1.3 Comentários	38
2.6.2 Matriz de Tempo de Retardo	38

2.6.2.1	Tempo parcial	40
2.6.2.2	Tempo de Wigner	40
2.6.2.3	Comentários	42
3	Estatísticas Lineares da Matriz de Tempo de Retardo	43
3.1	Introdução	43
3.2	Método da Função Geratriz Hipergeométrica	46
3.3	Fórmula Geral da Média para $\beta = 2$	51
3.3.1	Tempo de Wigner	51
3.3.2	Momentos	54
3.4	Conclusões	58
4	Estatísticas Não Lineares da Matriz de Tempo de Retardo	60
4.1	Introdução	60
4.2	Fórmula Geral da Média para $\beta = 2$	62
4.3	Método da Função Geratriz Hipergeométrica	65
4.4	Conclusões	67
5	Gerando Ensembles de Matrizes Aleatórias	69
5.1	Ensemble de Ginibre	70
5.1.1	Código Python	71
5.2	Ensemble Gaussiano	72
5.2.1	Classes Quirais	73
5.2.2	Classes BdG	73
5.2.3	Código Python	73
5.3	Ensemble Circular	75
5.3.1	Classes de Wigner-Dyson	78
5.3.2	Classes Quirais	78
5.3.3	Classes BdG	78
5.3.4	Código Python	79
5.4	Ensemble de Tempo de Retardo	81
5.4.1	Código Python	81
5.5	Estatísticas Circulares	82
5.6	Estatísticas de Espalhamento	83
5.7	Estatísticas de Tempo de Retardo	85
5.8	Conclusões	87
6	Perspectivas e Conclusão	91
6.1	Singularidade da Variância do Tempo de Retardo	91
6.2	Distribuições Completas da Condutância	93
A	Biblioteca Maple TDP (Time Delay Package)	99
	Referências Bibliográficas	101

Lista de Figuras

1.1	Idealização típica de uma cavidade balística acoplada a dois reservatórios, caracterizados pelos potenciais eletroquímicos μ_1 e μ_2 , através de guias ideais.	2
1.2	Realização de uma cavidade balística em um GE2D (visão superior). Branco: GE2D; cinza: regiões de repulsão; preto: visão superior do gates. Os gates retangulares formam a cavidade enquanto os pares de gates com ponta estreita controlam as aberturas dos dois contatos balísticos. As trajetórias dos elétrons são espalhadas apenas na fronteira da cavidade. Fonte: Nazarov e Blanter (2009).	2
1.3	Flutuações da condutância como função de um campo magnético perpendicular aplicado em um fio de ouro com $310nm$ de comprimento e $25nm$ de largura à $10mK$. Fonte: Beenakker (1997).	4
5.1	Estatísticas circulares para a classe de simetria A e dimensão $N = 100$. As linhas contínuas em (A) e (B) são os resultados teóricos.	84
5.2	Estatísticas de espalhamento para a classe de simetria A e dimensão $N = 4$ ($N_1 = N_2 = 2$). As linhas contínuas são os resultados teóricos. Os tracejados verticais são as médias das distribuições.	85
5.3	Estatísticas de tempo de retardo para a classe de simetria A e dimensão $N = 2$. A linha contínua em (A) é o resultado teórico. Os tracejados verticais são as médias das distribuições.	87
5.4	Distribuições da condutância. Cada coluna representa uma classe de simetria, respectivamente A, AI e AII. As linhas representam o número de canais abertos na primeira guia $N_1 = 1, \dots, 3$ e os índices coloridos o número de canais abertos na segunda guia $N_2 = N_1, \dots, N_1 + 2$. As linhas contínuas são os resultados teóricos.	89
5.5	Distribuições da potência de ruído de disparo. As colunas representam as classes de simetria A, AI e AII, respectivamente. Na primeira guia temos apenas um canal aberto $N_1 = 1$ e os índices coloridos representam o número de canais abertos na segunda guia $N_2 = 1, \dots, 3$. As linhas contínuas são os resultados teóricos.	90
5.6	Distribuições dos tempos próprios para a classe de simetria A. O número de canais abertos cresce a partir do gráfico superior esquerdo $N = 1, \dots, 6$. As linhas contínuas são os resultados teóricos.	90
6.1	Média do tempo de Wigner em função do número de canais aberto N , com $\tau_H = 1$	92
6.2	Variância do tempo de Wigner em função do número de canais aberto N	93
6.3	Distribuição da condutância, classe A e $N_1 = N_2 = 2$	98

Lista de Tabelas

1.1	Lista dos comprimentos característicos. Adaptado de Mello e Kumar (2004).	2
1.2	Lista dos regimes de transporte mesoscópicos. Adaptado de Mello e Kumar (2004) e Weidenmüller et al. (1998).	3
2.1	Número de elementos de $Par(n)$ para alguns valores de n .	10
2.2	Diagramas de Young.	11
2.3	Diagramas de Young para $\lambda = [4^2, 2^2, 1]$ com α -content.	11
2.4	Conjugação de λ .	11
2.5	Definições para o diagrama de Young.	12
2.6	Normalizações dos polinômios de Jack. Adaptado de Dumitriu et al. (2007)	21
2.7	Conversões entre as três normalizações para os polinômios de Jack. Adaptado de Dumitriu et al. (2007)	22
2.8	Três classes clássicas de simetria dos Ensembles Gaussianos, classificadas pelo índice β , dependendo da presença ou ausência de simetrias de reversão temporal (SRT) e rotação de spin (SRS). $H_{\mu\nu}$ são os elementos da matriz hermitiana H e U é a matriz formada pelos autovetores de H . Adaptado de Beenakker (1997)	34
2.9	Tabela de Cartan. Dez classes de simetria dos Ensembles Circulares, classificadas pelos índices β e α , dependendo da presença ou ausência de simetrias de reversão temporal (SRT), rotação de spin (SRS), partícula-buraco (SPB) e subrede (SSR). $S_{\mu\nu}$ são os elementos da matriz unitária S . Adaptado de Nishigaki et al. (2003), Fulga et al. (2012) e Jacquod et al. (2012).	38
5.1	Parâmetros da função <i>gimibre</i> .	72
5.2	Parâmetros da função <i>gaussian</i> .	74
5.3	Parâmetros da função <i>circular</i> .	79
5.4	Comparação de desempenho entre as abordagens Hamiltoniana (<i>Hamiltonian</i>) e a proposta por Mezzadri (<i>Scattering</i>). Tempo, em segundos, para gerar e armazenar um ensemble circular com 10000 matrizes 4×4 para as respectivas simetrias. O método Hamiltoniano usa matrizes Gaussianas de dimensão 160×160 .	88
A.1	Funções da biblioteca MOPS utilizadas pela TDP.	99
A.2	Funções públicas da biblioteca TDP.	100
A.3	Funções privadas da biblioteca TDP.	100

Abreviações

TMA	Teoria das Matrizes Aleatórias
GE2D	Gás de Elétrons 2-Dimensional
EOG	Ensemble Ortogonal Gaussiano
EUG	Ensemble Unitário Gaussiano
ESG	Ensemble Simplético Gaussiano
EOC	Ensemble Ortogonal Circular
EUC	Ensemble Unitário Circular
ESC	Ensemble Simplético Circular
BdG	Bogoliubov-de Gennes
SRT	Simetria de Reversão Temporal
SRS	Simetria de Rotação de Spin
SPB	Simetria Partícula-Buraco
SSR	Simetria de Sub Rede
TDP	Time Delay Package
MOPS	Multivariate Orthogonal Polynomials Symbolically
iid	independentes e identicamente distribuídas

Constantes Físicas

$$\begin{aligned} \text{Constante de Planck} \quad h &= 6,626\,069\,3 \times 10^{-34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1} \\ &= 4,135\,667\,43 \times 10^{-15} \text{ eV s} \\ \text{Quantum de condutância} \quad \mathcal{G}_0 &= 7,7480917310(18) \times 10^{-5} \text{ S} \end{aligned}$$

Capítulo 1

Introdução

A *Teoria das Matrizes Aleatórias* (TMA) foi introduzida por Wishart [1] no início do século XX e tem encontrado aplicações em uma variedade de áreas da física, matemática, probabilidade, estatística e engenharia [2–5]. Foi aplicada pela primeira vez em sistemas físicos por Wigner e Dyson [6–9] como um modelo para núcleos atômicos complexos. Desde então, tem tido um enorme impacto na física e é hoje uma das principais ferramentas para descrever propriedades de sistemas quânticos complexos.

Podemos atribuir esse sucesso crescente da TMA a, principalmente, dois motivos. Primeiro, para matrizes no limite de grandes dimensões, as correlações estatísticas do espectro de um ensemble de matrizes são independentes da distribuição de probabilidade que define o ensemble, dependendo apenas de propriedades invariantes da distribuição [10, 11]. Segundo, as técnicas da TMA permitem o cálculo e a computação num grau que de outra maneira seria impossível alcançar no contexto em que são aplicadas.

1.1 Sistema Físico

Neste trabalho, como aplicação de interesse, a TMA fornece ferramentas para investigarmos as propriedades quânticas do transporte eletrônico em cavidades balísticas acopladas a reservatórios através de duas guias ideais [11–13] (figuras 1.1 e 1.2).

As dimensões físicas desses sistemas são tais que a natureza quântica do elétron torna-se importante e um tratamento puramente clássico da sua dinâmica é inadequado [14].

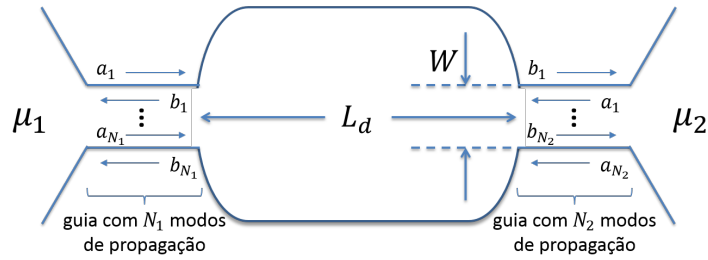


FIGURA 1.1: Idealização típica de uma cavidade balística acoplada a dois reservatórios, caracterizados pelos potenciais eletroquímicos μ_1 e μ_2 , através de guias ideais.

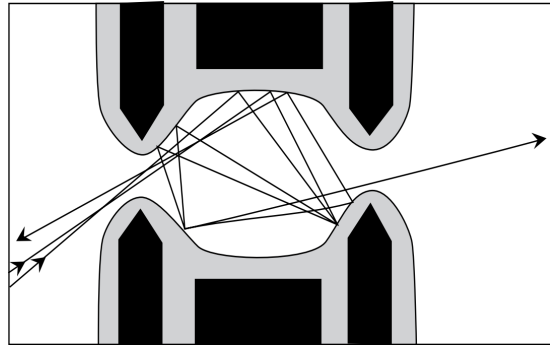


FIGURA 1.2: Realização de uma cavidade balística em um GE2D (visão superior). Branco: GE2D; cinza: regiões de repulsão; preto: visão superior dos gates. Os gates retangulares formam a cavidade enquanto os pares de gates com ponta estreita controlam as aberturas dos dois contatos balísticos. As trajetórias dos elétrons são espalhadas apenas na fronteira da cavidade. Fonte: Nazarov e Blanter (2009).

Para tratarmos o transporte nessas estruturas devemos considerar as escalas de comprimento relevantes (tabela 1.1), importantes para caracterizar os sistemas *mesoscópicos*.

Símbolo	Nome	Descrição
λ_F	Comprimento de onda de Fermi	Esta é a menor escala de comprimento. Em baixas temperaturas, apenas elétrons com energia próximas a de Fermi participam do transporte.
l	Caminho livre médio	É a distância média percorrida pelo elétron entre duas colisões elásticas.
ξ	Comprimento de localização	Determina a extensão espacial das funções de onda eletrônicas. Para condutores a função de onda se estende por toda a amostra.
L_ϕ	Comprimento de coerência de fase	É a distância média percorrida pelo elétron até que a função de onda que o descreve perca a coerência de fase.
L_d	Comprimento do sistema	É paralelo à direção da corrente e perpendicular à largura das guias W .

TABELA 1.1: Lista dos comprimentos característicos. Adaptado de Mello e Kumar (2004).

Um sistema é dito mesoscópico quando o comprimento de coerência de fase L_ϕ é

maior ou comparável ao tamanho do sistema L_d [15]. Comumente, a coerência de fase é perdida em espalhamentos inelásticos com outros elétrons ou fônons.

Com o decréscimo da temperatura, L_ϕ aumenta, tornando um sistema com $L_d \approx 1\mu m$ mesoscópico abaixo de $100mK$ [2]. Tipicamente, à baixas temperaturas, temos que $\lambda_F < l < \xi < L_\phi$, o que permite a caracterização de três regimes distintos de transporte (tabela 1.2).

Caracterização	Nome	Descrição
$L_d < l$	Balístico	O comprimento da amostra é menor que o livre caminho médio. Os elétrons se deslocam praticamente sem sofrer colisões.
$l < L_d < \xi$	Difusivo	O comprimento da amostra é maior que o livre caminho médio e menor que o comprimento de localização. Caracterizado pelas diversas colisões elásticas sofridas pelo elétron.
$\xi < L_d < L_\phi$	Localizado	O comprimento da amostra encontra-se entre o comprimento de localização e o comprimento de coerência de fase. As funções de onda dos elétrons permanecem localizadas de modo que a amostra se comporta como um isolante.

TABELA 1.2: Lista dos regimes de transporte mesoscópicos. Adaptado de Mello e Kumar (2004) e Weidenmüller et al. (1998).

1.2 Espalhamento

Outra consequência da baixa temperatura é a supressão dos fônons e, também, à baixa diferença de potencial, as interações entre os elétrons podem ser negligenciadas. Portanto, os elétrons dentro da cavidade espalham elasticamente [14]. Sendo assim, se as duas guias suportam, respectivamente, N_1 e N_2 canais quânticos [16], toda a informação do transporte eletrônico está codificada na matriz de espalhamento:

$$S = \begin{pmatrix} r_{N_1 \times N_1} & t'_{N_1 \times N_2} \\ t_{N_2 \times N_1} & r'_{N_2 \times N_2} \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Convencionou-se que os blocos r e t são as matrizes de reflexão e transmissão através da guia à esquerda da cavidade, enquanto t' e r' são os da guia à direita.

A conservação de corrente implica que S é unitária $S^{-1} = S^\dagger$. Como consequência direta da unitariedade temos que as quatro matrizes hermitianas tt^\dagger , $t't'^\dagger$, $1 - rr^\dagger$ e

$1 - r'r'^{\dagger}$ possuem o mesmo conjunto de autovalores T_1, T_2, \dots, T_N . Sendo cada um desses autovalores de transmissão um número real entre 0 e 1.

Os autovalores de transmissão determinam as propriedades de transporte. A mais comum é a condutância, que, para baixas diferenças de potencial e temperatura zero, é dada por [14]

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \sum_{n=1}^N T_n \quad (1.2)$$

onde $\mathcal{G}_0 \equiv 2e^2/h$. Essa equação é conhecida como fórmula de Landauer [14].

A segunda é a potência de ruído de disparo. A carga discreta do elétron causa flutuações na corrente dependentes do tempo $I(t) = \bar{I} + \delta I(t)$, que persiste mesmo a temperatura zero [17]. A potência de ruído de disparo está relacionada aos autovalores de transmissão por [14]

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 \sum_{n=1}^N T_n(1 - T_n) \quad (1.3)$$

na qual $\mathcal{P}_0 \equiv 2eV\mathcal{G}_0$. Note que N denota o número de canais quânticos abertos em uma das guias, não a dimensão da matriz de espalhamento, que é $(N_1 + N_2) \times (N_1 + N_2)$. Sem perda de generalidade, assumimos que $N_1 \geq N_2$ ou, de maneira equivalente, que $N = \min(N_1, N_2)$.

A principal suposição sobre sistemas do tipo descrito é que, devido a dinâmica caótica dentro da cavidade, a corrente elétrica apresenta características universais [2, 4] (figura 1.3), o que permite modelar o problema através da TMA.

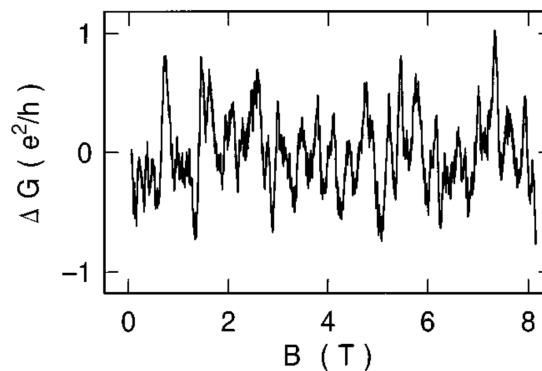


FIGURA 1.3: Flutuações da condutância como função de um campo magnético perpendicular aplicado em um fio de ouro com 310nm de comprimento e 25nm de largura à 10mK . Fonte: Beenakker (1997).

Em sistemas ergódicos, como cavidades caóticas, é natural fazer a suposição de máxima entropia [18] levando ao postulado de que a matriz de espalhamento é uniformemente distribuída sobre o grupo unitário, sendo obtida do ensemble Circular [3, 19]. Nesse caso, a *matriz de transmissão* tt^\dagger pertence a um dos Ensembles de Jacobi, portanto a densidade de probabilidade conjunta dos seus autovalores $T_1 \dots, T_N$ é [4, 13, 20]

$$P(T_1, \dots, T_N) = \frac{1}{Z_{\omega \equiv J}(\beta, N)} \prod_{j < k} |T_j - T_k|^\beta \prod_{i=1}^N T_i^{\beta/2(|N_1 - N_2| + 1) - 1} (1 - T_i)^{\gamma/2}, \quad (1.4)$$

onde $Z_{\omega \equiv J}$ é a integral de Selberg [19, 21] no peso de Jacobi. Se a matriz de espalhamento S pertence a um dos três ensembles clássicos de Dyson [4, 7], então $\gamma = 0$.

1.3 Tempo de Retardo

Embora essa abordagem seja bem sucedida na descrição das propriedades dos condutores coerentes [4, 18], ela não fornece nenhuma informação sobre a dependência da energia da matriz de espalhamento, que é necessária para obtenção da matriz de Wigner-Smith [22]:

$$Q = -i\hbar S^\dagger \frac{\partial S}{\partial E}. \quad (1.5)$$

Para construirmos matrizes de espalhamento com a dependência da energia usamos a abordagem Hamiltoniana [23–25]. Os autovalores da matriz Q são os tempos próprios τ_1, \dots, τ_N e seu traço normalizado é o tempo de Wigner [26, 27]:

$$\tau_W = \frac{1}{N} \text{Tr} Q. \quad (1.6)$$

Essas quantidades contêm informações sobre o tempo que uma partícula, no caso um elétron, passa dentro da região de espalhamento e, também, constituem os principais objetos de interesse de nossas duas primeiras contribuições descritas e discutidas nos capítulos 3 e 4.

Um importante avanço no estudo da matriz de Wigner-Smith foi o trabalho de Beenakker, Brouwer e Frahm, onde foram capazes de obter a distribuição conjunta dos tempos próprios [26]. Eles estabeleceram o relacionamento com o Ensemble de Laguerre, onde a distribuição conjunta do inverso dos tempos próprios, $\gamma_i = 1/\tau_i$, é dada

por:

$$P(\gamma_1, \dots, \gamma_N) = \frac{1}{Z_{\omega \equiv L}(\beta, N)} \prod_{j < k} |\gamma_j - \gamma_k|^\beta \prod_{i=1}^N e^{-\frac{\beta}{2} \tau_H \gamma_i} \gamma_i^{\frac{\beta}{2} N}. \quad (1.7)$$

Perceba que nesse caso, diferente da discussão sobre condutância e potência de ruído de disparo, N é o número total de canais $N_1 + N_2$, ou seja, a dimensão das matrizes S e Q .

Apesar da distribuição para os tempos próprios ser conhecida [26], as propriedades estatísticas da sua soma, o tempo de Wigner, continuam desconhecidas. Apenas as distribuições para um e dois canais foram deduzidas em [28] e [29], respectivamente as equações (3.3) e (3.4).

1.4 Objetivos

Estabelecemos três objetivos principais que resultaram nas contribuições deste trabalho, são eles:

1. calcular médias de estatísticas lineares nos autovalores da matriz de tempo de retardo;
2. calcular médias de estatísticas não lineares nos autovalores da matriz de tempo de retardo;
3. criar um programa em Python para gerar ensembles de matrizes aleatórias e calcular suas estatísticas numericamente.

O primeiro objetivo envolve médias de soma de potências

$$\langle \tau_1^n + \tau_2^n + \dots + \tau_N^n \rangle$$

e médias de produtos de soma de potências

$$\langle p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \dots p_{\lambda_k} \rangle$$

$$p_{\lambda_i}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N) = \sum_{j=1}^N \tau_j^{\lambda_i}.$$

Através dessas médias podemos obter expressões para as seguintes quantidades de interesse [27, 30]:

$$\langle \mathcal{M}_n \rangle = \frac{1}{N} \langle p_n(Q) \rangle \quad (\text{m\u00e9dia de momentos})$$

$$\langle \mathcal{M}_\lambda \rangle = \langle \mathcal{M}_{\lambda_1} \mathcal{M}_{\lambda_2} \dots \rangle = \frac{1}{N^{\ell(\lambda)}} \langle p_\lambda(Q) \rangle \quad (\text{m\u00e9dia de momentos generalizados})$$

$$\langle \tau_W^n \rangle = \langle \mathcal{M}_{1^n} \rangle = \langle \mathcal{M}_1^n \rangle \quad (\text{m\u00e9dia do tempo de Wigner})$$

$$\langle \tau_W^n \rangle_c = \langle \mathcal{M}_{1^n} \rangle - \sum_{m=1}^{n-1} \binom{n-1}{m-1} \langle \tau_W^m \rangle_c \langle \mathcal{M}_{1^{n-m}} \rangle \quad (\text{cumulante do tempo de Wigner})$$

O segundo objetivo envolve m\u00e9dias de produtos de pot\u00eancias

$$\langle \tau_1^{\lambda_1} \tau_2^{\lambda_2} \dots \tau_N^{\lambda_N} \rangle.$$

Elas surgem naturalmente quando consideramos momentos de estat\u00edsticas lineares como $\langle \mathcal{M}_n^k \rangle$ e, tamb\u00e9m, incorpora casos especiais como pot\u00eancias do determinante de Q ($(\det Q)^k$) e o tra\u00e7o de pot\u00eancias de Q ($\text{Tr } Q^k$).

O terceiro objetivo, o programa para gera\u00e7\u00e3o de matrizes aleat\u00f3rias, possui dois requisitos principais:

1. a capacidade de gerar matrizes para as 10 classes de simetria da classifica\u00e7\u00e3o de Altland-Zirnbauer [31–33] (tabela 2.9);
2. a implementa\u00e7\u00e3o da proposta de Mezzadri [34] de um algoritmo eficiente para a gera\u00e7\u00e3o de matrizes circulares.

1.5 Organiza\u00e7\u00e3o

Este trabalho est\u00e1 distribuído em *Referencial Te\u00f3rico* (cap\u00edtulo 2), *Contribui\u00e7\u00f5es* (cap\u00edtulos 3, 4 e 5) e *Perspectivas* (cap\u00edtulo 6). As contribui\u00e7\u00f5es possuem suas pr\u00f3prias introdu\u00e7\u00f5es e conclus\u00f5es.

No cap\u00edtulo 2 temos os conceitos necess\u00e1rios para o bom entendimento das ideias expostas nesta disserta\u00e7\u00e3o. A se\u00e7\u00e3o 2.5, *Resultados de Kaneko*, \u00e9 especialmente importante, pois o desenvolvimento da subse\u00e7\u00e3o 2.5.2 permitiu alcan\u00e7armos o nosso principal resultado, expresso na equa\u00e7\u00e3o (4.3).

No capítulo 3, buscando uma solução para calcular as médias de estatísticas lineares no autovalores do tempo de retardo, adaptamos o método desenvolvido por Macêdo e Macedo em [35], onde as estatísticas de contagem de carga no transporte quântico utilizam uma função geratriz hipergeométrica (3.20). O método obtido foi prontamente utilizado para obter todos os resultados já conhecidos, fórmulas gerais (3.47, 3.51) e resultados exatos (3.36, 3.37, 3.38), com a complexidade esperada e para qualquer classe de simetria. Uma biblioteca Maple, chamada de *Time Delay Package* (TDP) (apêndice A), foi escrita implementando o método e usada neste trabalho.

No capítulo 4 procuramos resultados inéditos. Em [36] Luque e Vivo apresentaram estatísticas não lineares dos permanentes nos autovalores de matrizes aleatórias invariantes, com resultados específicos para o ensemble de Jacobi para as três classes de simetrias de Dyson. De maneira semelhante, apresentaremos os resultados para o ensemble de Laguerre nos inversos dos autovalores, ou seja, as estatísticas não lineares para os autovalores das matrizes de tempo de retardo. Com a equação (4.8) de Luque e Vivo, encontrada em termos de hiperdeterminantes para $\beta = 2$, obtivemos uma fórmula geral (4.11) a partir da qual derivamos casos particulares (4.12, 4.13). Utilizando o método da função geratriz hipergeométrica, determinado no capítulo 3, derivamos na seção 4.3 resultados para qualquer β com o auxílio da biblioteca TDP.

No capítulo 5, seguindo ideias propostas na literatura [34], implementamos um algoritmo eficiente em Python para gerar numericamente matrizes para o ensemble Circular (seção 5.3), além do método Hamiltoniano [23–25] para geração de matrizes de Tempo de Retardo (seção 5.4), não nos restringindo às três classes clássicas (tabela 2.9). Rotinas para os ensembles de Ginibre e Gaussiano (seções 5.1 e 5.2) também são implementadas.

Algumas ideias foram parcialmente abordadas durante o desenvolvimento desta dissertação. Outras se mostraram desafios muito grandes para o curto espaço de tempo. No capítulo 6 registramos duas como perspectivas.

Capítulo 2

Fundamentos e Teoria

Neste capítulo apresentamos os conceitos utilizados na construção e justificativa de nossa abordagem e considerados necessários para o bom entendimento da nossa proposta.

2.1 Partições

Uma *partição* é uma sequência decrescente de inteiros positivos $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k]$ chamados de *partes*, tais que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$ [37–39]. O número de partes não zero é seu comprimento, $\ell(\lambda)$. Por $\lambda \vdash n$ ou $|\lambda| = n$ denotamos o peso de λ , definido como $\sum_{i=1}^{\ell(\lambda)} \lambda_i = n$. Portanto, $[4, 4, 2, 2, 1] \vdash 13$. Também usamos a notação compacta $[4^2, 2^2, 1] \equiv [4, 4, 2, 2, 1]$. Partições da forma

$$[k, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-k \text{ vezes}}] = [k, 1^{n-k}] \quad (2.1)$$

são chamadas de *hook* [37, 38, 40].

Sendo $Par(n)$ o conjunto de todas as partições de peso n , temos que

$$Par(1) = [1]$$

$$Par(2) = [2], [1, 1]$$

$$Par(3) = [3], [2, 1], [1, 1, 1]$$

$$Par(4) = [4], [3, 1], [2, 2], [2, 1, 1], [1, 1, 1, 1]$$

⋮

A soma $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots = n$ dos termos de uma partição pode ser escrita como

$$n = c_1 + 2c_2 + 3c_3 + \dots, \tag{2.2}$$

onde $c_i \geq 0$ é o número de vezes que o inteiro i aparece na partição. Por exemplo, para $\lambda = [6, 4, 4, 3, 2, 2, 2, 1, 1]$ temos

$$\begin{aligned} 25 &= 6 + 4 + 4 + 3 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 \\ &= 1(2) + 2(3) + 3(1) + 4(2) + 5(0) + 6(1). \end{aligned}$$

Dessa maneira, o número de soluções inteiras e não negativas da equação (2.2) corresponde ao número de partições de n , que denotaremos por $N_p(n)$. Este número pode ser obtido a partir da função geratriz [38]

$$\sum_{n=0}^{\infty} N_p(n)x^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}. \tag{2.3}$$

De fato, representando os fatores em (2.3) como séries geométricas

$$\begin{aligned} \sum N_p(n)x^n &= (1 + x + x^2 + \dots)(1 + x^2 + x^4 + \dots)(1 + x^3 + x^6 + \dots)\dots \\ &= \prod_{i=1}^{\infty} (1 + x^i + x^{2i} + x^{3i} + \dots). \end{aligned}$$

O produto dos monômios gera termos do tipo

$$x^{1c_1} x^{2c_2} x^{3c_3} \dots = x^{c_1+2c_2+3c_3+\dots}.$$

Portanto, o coeficiente $N_p(n)$ de x^n é o número de maneiras de escrevermos $n = c_1 + 2c_2 + 3c_3 + \dots$, ou seja, é o número de partições contidas no conjunto gerado por $Par(n)$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$N_p(n)$	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231

TABELA 2.1: Número de elementos de $Par(n)$ para alguns valores de n .

Partições são usualmente representadas pelos chamados diagramas de Young (ou diagramas de Ferrers) [40–42]. Uma partição λ é visualizada como uma coleção de caixas organizadas em $\ell(\lambda)$ linhas alinhadas à esquerda, com a linha i contendo λ_i caixas.

Se uma caixa ocupa a posição j na linha i , dizemos que ela possui coordenadas (i, j) . Formalmente podemos dizer que um diagrama de uma partição λ é o conjunto de caixas $\{(i, j) \in \mathbb{N}^2; 1 \leq i \leq \ell(\lambda); 1 \leq j \leq \lambda_i\}$.

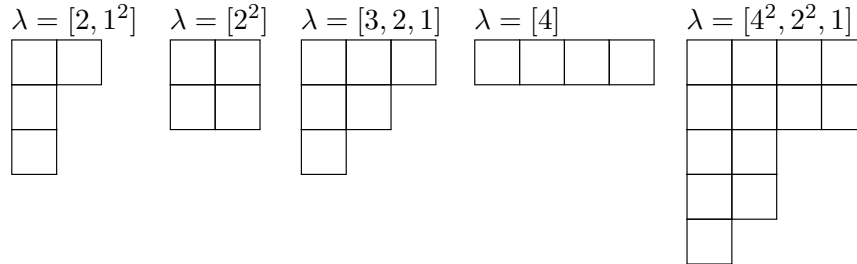


TABELA 2.2: Diagramas de Young.

Definimos o conteúdo de uma caixa como $c_{ij} = j - i$. Chamaremos esse conteúdo de *content*. O content pode ser generalizado para um α -content. Seja α um número real positivo, então, para qualquer caixa (i, j) de λ , definimos o α -content [39] como

$$c_{ij}^{(\alpha)} = j - i - \frac{i - 1}{\alpha}. \tag{2.4}$$

1-content				2-content			
0	1	2	3	0	1	2	3
-1	0	1	2	-2	-1	0	1
-2	-1			-4	-3		
-3	-2			-6	-5		
-4				-8			

TABELA 2.3: Diagramas de Young para $\lambda = [4^2, 2^2, 1]$ com α -content.

Para cada partição λ definimos a partição conjugada λ' obtida pela transposição do diagrama de λ (tabela 2.4). Dessa forma, λ_j é o número de caixas na j -ésima coluna de λ .

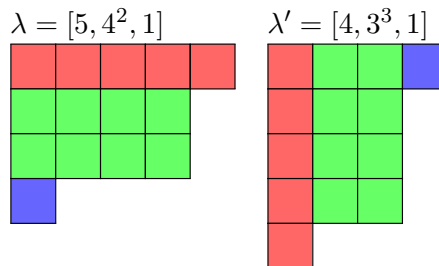


TABELA 2.4: Conjugação de λ .

Note que $\lambda'_1 = \ell(\lambda)$ e $\lambda_1 = \ell(\lambda')$. Para uma célula $s = (i, j)$ de um diagrama de Young, definimos [37, 38, 41, 42]:

$$\begin{aligned}
 a_\lambda(s) &= a_\lambda(i, j) = \lambda_i - j && \text{arm length,} \\
 l_\lambda(s) &= \lambda'_j - i && \text{leg length,} \\
 a'_\lambda(s) &= j - 1 && \text{co-arm length,} \\
 l'_\lambda(s) &= i - 1 && \text{co-leg length,} \\
 h_\lambda^*(s) &= l_\lambda(s) + \alpha(1 + a_\lambda(s)) && \text{upper hook length,} \\
 h_\lambda^\lambda(s) &= l_\lambda(s) + 1 + \alpha a_\lambda(s) && \text{lower hook length.}
 \end{aligned}$$

O *arm length* é o número de caixas à direita de s ; o *leg length* é o número de caixas abaixo de s . Similarmente, o *co-arm length* e o *co-leg length* são o número de caixas à esquerda e acima de s , respectivamente. Para $\alpha = 1$, $h_\lambda^*(s) = h_\lambda^\lambda(s)$ e representa o número de células à direita e abaixo de s , incluindo o próprio s .

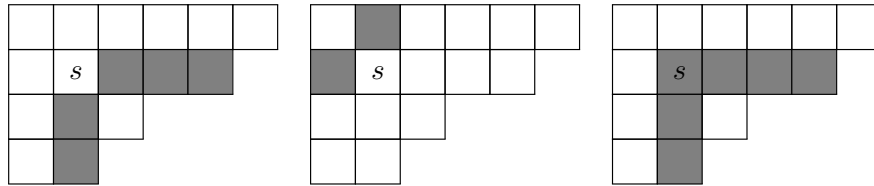


TABELA 2.5: Definições para o diagrama de Young.

As áreas cinzas no diagrama da esquerda são o arm length $a_\lambda(s) = 3$ e o leg length $l_\lambda(s) = 2$ de s para $\lambda = [6, 5, 3, 2]$. No centro são o co-arm length $a'_\lambda(s) = 1$ e o co-leg length $l'_\lambda(s) = 1$. Na direita é o hook length $h_\lambda^*(s) = h_\lambda^\lambda(s) = 6$ para $\alpha = 1$. Adaptado de Mezzadri e Reynolds [41].

É conveniente definirmos as seguintes quantidades:

$$c'(\lambda, \alpha) = \prod_{s \in \lambda} h_\lambda^*(s), \tag{2.5a}$$

$$c(\lambda, \alpha) = \prod_{s \in \lambda} h_\lambda^\lambda(s), \tag{2.5b}$$

$$j_\lambda^{(\alpha)} = c(\lambda, \alpha)c'(\lambda, \alpha). \tag{2.5c}$$

A constante $j_\lambda^{(\alpha)}$ é importante para a teoria dos polinômios de Jack (seção 2.3). Explicitamente

$$\begin{aligned} j_\lambda^{(\alpha)} &= \prod_{s \in \lambda} h_\lambda^*(s) h_\lambda^\lambda(s) \\ &= \prod_{s \in \lambda} [l_\lambda(s) + \alpha(a_\lambda(s) + 1)] [l_\lambda(s) + 1 + \alpha a_\lambda(s)] \\ &= \prod_{(i,j) \in \lambda} [\lambda'_j - i + \alpha(\lambda_i - j + 1)] [\lambda'_j - i + 1 + \alpha(\lambda_i - j)]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Outra quantidade importante neste trabalho relacionada às partições é a generalização do *símbolo de Pochhammer* [39, 43]

$$\begin{aligned} (N)_n &= N(N+1)(N+2) \dots (N+n-1) \\ &= \frac{\Gamma(N+n)}{\Gamma(N)} \\ &= \prod_{j=1}^n (N+j-1) \quad ; \quad (N)_0 = 1, \end{aligned} \quad (2.7)$$

definida como [39, 42]

$$\begin{aligned} (N)_\lambda^{(\alpha)} &= \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \left(N - \frac{i-1}{\alpha} \right)_{\lambda_i} = \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \frac{\Gamma(N - \frac{i-1}{\alpha} + \lambda_i)}{\Gamma(N - \frac{i-1}{\alpha})} \\ &= \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \prod_{j=1}^{\lambda_i} \left(N - \frac{i-1}{\alpha} + j - 1 \right) = \prod_{s \in \lambda} \left(N - \frac{l'_\lambda(s)}{\alpha} + a'_\lambda(s) \right) \quad ; \quad \alpha > 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

A conexão entre o símbolo de Pochhammer e o diagrama de Young torna-se evidente se o reescrevermos em termos do α -content (2.4)

$$(N)_\lambda^{(\alpha)} = \prod_{(i,j) \in \lambda} \left(N + c_{ij}^{(\alpha)} \right). \quad (2.9)$$

Sendo assim, estabelecemos as seguintes generalizações e notações para o *raising (rising)* e *lowering (falling) factorials* [38, 39, 42]:

$$\begin{aligned} [N]_{(\alpha)}^\lambda &= \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \left[N - \frac{i-1}{\alpha} \right]^{\lambda_i} = \prod_{(i,j) \in \lambda} \left(N + c_{ij}^{(\alpha)} \right), \\ [N]_\lambda^{(\alpha)} &= \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \left[N + \frac{i-1}{\alpha} \right]_{\lambda_i} = \prod_{(i,j) \in \lambda} \left(N - c_{ij}^{(\alpha)} \right). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Podemos definir relações de *ordem* para as partições. Uma relação particularmente útil é a chamada ordem de *dominância* ou ordem *natural* de $Par(n)$ e denotada por \preceq [37, 38, 41–43].

Desta forma, se $\mu, \lambda \in Par(n)$, definimos $\mu \preceq \lambda$ se $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_i \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_i$, $\forall i \geq 1$. Esta relação é uma ordem pois é:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Reflexiva} \quad : \mu \preceq \mu, \\ \text{Anti-simétrica} \quad : \mu \preceq \lambda \text{ e } \lambda \preceq \mu \rightarrow \lambda = \mu, \\ \text{Transitiva} \quad : \lambda \preceq \mu \text{ e } \mu \preceq \kappa \rightarrow \lambda \preceq \kappa. \end{array} \right.$$

Mas é uma relação de ordem total apenas para $n \leq 5$, não para $n \geq 6$. Por exemplo, para $n = 5$ temos:

$$\begin{aligned} Par(5) &= \{[5], [4, 1], [3, 2], [3, 1, 1], [2, 2, 1], [2, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1]\}, \\ [5] &\succeq [4, 1] \succeq [3, 2] \succeq [3, 1, 1] \succeq [2, 2, 1] \succeq [2, 1, 1, 1] \succeq [1, 1, 1, 1, 1]. \end{aligned}$$

Por sua vez, para $n = 6$:

$$\begin{aligned} Par(6) &= \{[6], [5, 1], [4, 2], [4, 1, 1], [3, 3], [3, 2, 1], [3, 1, 1, 1], [2, 2, 2], \\ &\quad [2, 2, 1, 1], [2, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1]\}. \end{aligned}$$

Vemos que $[4, 1, 1]$ e $[3, 3]$ não são compatíveis e, também, $[3, 1, 1, 1]$ e $[2, 2, 2]$.

Uma relação de ordem total em $Par(n)$ é a chamada ordem *lexicográfica* e denotada por \succcurlyeq .

Dadas as partições $\mu, \lambda \in Par(n)$, definimos $\lambda \succcurlyeq \mu$ se $\mu = \lambda$ ou se, para algum i , $\mu_1 = \lambda_1, \dots, \mu_{i-1} = \lambda_{i-1}$ e $\lambda_i > \mu_i$. Exemplo para $Par(6)$:

$$\begin{aligned} [6] &\succcurlyeq [5, 1] \succcurlyeq [4, 2] \succcurlyeq [4, 1, 1] \succcurlyeq [3, 3] \succcurlyeq [3, 2, 1] \succcurlyeq [3, 1, 1, 1] \succcurlyeq [2, 2, 2] \succcurlyeq \\ &\quad [2, 2, 1, 1] \succcurlyeq [2, 1, 1, 1, 1] \succcurlyeq [1, 1, 1, 1, 1, 1]. \end{aligned}$$

Observe que se $\mu \preceq \lambda$ então $\mu \leq \lambda$, mas a recíproca não é verdadeira.

2.2 Funções Simétricas

Uma função simétrica é uma série ou um polinômio em muitas variáveis com coeficientes racionais invariantes sob a permutação das variáveis [19, 37, 38]. Por exemplo, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2x_3$ é uma função simétrica em três variáveis, mas $x_1^2 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1$ não é, porque intercambiar x_1 e x_2 não mantém a função inalterada.

Escrever uma função simétrica explicitamente como um polinômio é similar a expressar um número numa base específica, como decimal, binária ou hexadecimal. E, assim como os números, algumas vezes precisamos expressá-las em termos dos seus *fatores primos* [37]. Os *primos* de uma função simétrica são as *funções simétricas elementares* [19]:

$$e_n(x_1, \dots, x_k) = m_{[1^n]} = \sum_{i_1 < \dots < i_n} x_{i_1} \cdots x_{i_n}. \quad (2.11)$$

Por exemplo,

$$e_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4.$$

Seja $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k]$ uma partição, ou seja, uma sequência finita de inteiros escritos em ordem decrescente. Então, a função simétrica elementar correspondente a λ é definida pelo produto [38]

$$e_\lambda = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \cdots e_{\lambda_k}.$$

O fato excepcional é que as funções simétricas elementares e_λ formam uma base para todas as funções simétricas, descrevendo-as unicamente. Esse é o chamado *Teorema Fundamental da Teoria das Funções Simétricas* [38, p. 83]:

$$\sum_{\lambda} c_{\lambda} e_{\lambda}. \quad (2.12)$$

Por exemplo, vamos escrever a função simétrica $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ em termos de funções simétricas elementares. Usaremos nesse exemplo as funções $e_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $e_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$ e $e_3 = x_1x_2x_3$. Iniciaremos com o cubo de e_1

$$e_1^3 = e_{[1,1,1]} = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3(x_1^2x_2 + x_2^2x_1 + x_1^2x_3 + x_3^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_2) + 6x_1x_2x_3. \quad (2.13)$$

Podemos substituir $6x_1x_2x_3$ por $6e_3$. Agora precisamos apenas escrever o termo $3(x_1^2x_2 + x_2^2x_1 + x_1^2x_3 + x_3^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_2)$. O produto

$$3e_1e_2 = 3(x_1^2x_2 + x_2^2x_1 + x_1^2x_3 + x_3^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_2) + 9x_1x_2x_3$$

é muito próximo, mas nos deixa com o termo extra $9x_1x_2x_3$. Podemos removê-lo fazendo $3e_1e_2 - 9e_3$. Usando esses resultados e resolvendo (2.13) para $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$, encontramos

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = e_1^3 - 3e_1e_2 + 3e_3 = e_{[1,1,1]} - 3e_{[2,1]} + 3e_{[3]}.$$

Embora a função simétrica elementar seja fundamental para o nosso trabalho, existem, ao menos, quatro outras bases naturais com as quais podemos expressar qualquer função simétrica. São elas [37, 38]:

m_λ monomial,

p_λ soma de potências,

h_λ homogênea completa,

s_λ Schur.

Para essas quatro bases e a função simétrica elementar, temos os seguintes exemplos:

$$\begin{aligned} e_{[3,2,2]} &= e_3e_2e_2 = x_1x_2x_3(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)^2, \\ p_{[3,2,2]} &= p_3p_2p_2 = (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2, \\ h_{[2,1]} &= h_2h_1 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)(x_1 + x_2 + x_3), \\ m_{[3,2,2]} &= x_1^3x_2^2x_3^2 + x_2^3x_1^2x_3^2 + x_3^3x_2^2x_1^2, \\ s_{[3,1]} &= m_{[3,1]} + m_{[2,2]} + 2m_{[2,1,1]}. \end{aligned}$$

Como podemos alternar entre as bases facilmente, temos bastante flexibilidade na abordagem de problemas envolvendo funções simétricas.

Neste trabalho, estamos interessados em duas transições específicas. Entre as bases de soma de potências e elementar e entre as bases monomial e de soma de potências.

Para demonstrar a transição da base elementar para a base de soma de potências começaremos mostrando que as funções simétricas elementares podem ser obtidas a

partir da função geratriz [19, 39]

$$\sum_{n \geq 0} e_n t^n = \prod_{i \geq 1} (1 + x_i t) \equiv E(t). \quad (2.14)$$

Por sua vez, as somas de potência são obtidas da função geratriz

$$\sum_{n \geq 1} p_n t^{n-1} = \sum_i \frac{x_i}{1 - x_i t} \equiv P(t). \quad (2.15)$$

Percebendo que

$$P(-t) = \frac{d}{dt} \ln E(t) = \frac{1}{E(t)} \frac{d}{dt} E(t) \quad (2.16)$$

calculamos

$$\begin{aligned} P(-t)E(t) &= \frac{d}{dt} E(t) \\ \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} p_n t^{n-1} \sum_{m \geq 0} e_m t^m &= \sum_{k \geq 1} k e_k t^{k-1} \\ \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 0} (-1)^{n-1} p_n e_m t^{n+m-1} &= \sum_{k \geq 1} k e_k t^{k-1}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Definindo $n + m = k$

$$\sum_{k \geq 1} \left(\sum_{n=1}^k (-1)^{n-1} p_n e_{k-n} \right) t^{k-1} = \sum_{k \geq 1} k e_k t^{k-1} \quad (2.18)$$

o que permite, por fim, determinar a seguinte relação de recorrência para mudança de base de funções simétricas elementares para soma de potências [19, 38]

$$k e_k = \sum_{n=1}^k (-1)^{n-1} p_n e_{k-n}. \quad (2.19)$$

Dessa forma:

$$\begin{aligned} e_1 &= p_1 \\ e_2 &= \frac{1}{2}(p_1 e_1 - p_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 - p_2) \\ e_3 &= \frac{1}{3}(p_1 e_2 - p_2 e_1 + p_3) = \frac{1}{6}(p_1^3 - 3p_1 p_2 + 2p_3) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Usando (2.2) e (2.19) generalizamos para

$$e_\lambda = e_{[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k]} = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \cdots e_{\lambda_k} = \prod_{i=1}^k e_{\lambda_i} \quad (2.20)$$

$$e_{\lambda_i} = \frac{1}{\lambda_i} \sum_{n=1}^{\lambda_i} (-1)^{n-1} p_n e_{\lambda_i - n}.$$

Partindo de (2.17) podemos demonstrar a transição inversa, ou seja, da base de soma de potências para a base elementar escrevendo

$$\sum_{k \geq 1} \left(\sum_{m=0}^{k-1} (-1)^{k-m-1} p_{k-m} e_m \right) t^{k-1} = \sum_{k \geq 1} k e_k t^{k-1}$$

$$\sum_{m=0}^{k-1} (-1)^{k-m-1} p_{k-m} e_m = k e_k$$

$$(-1)^{k-1} p_k + \sum_{m=1}^{k-1} (-1)^{k-m-1} p_{k-m} e_m = k e_k$$

e novamente determinando uma relação de recorrência [19, 38]

$$p_k = (-1)^{k-1} k e_k + \sum_{m=1}^{k-1} (-1)^{m-1} p_{k-m} e_m. \quad (2.21)$$

Dessa maneira:

$$p_1 = e_1$$

$$p_2 = -2e_2 + p_1 e_1 = e_1^2 - 2e_2$$

$$p_3 = 3e_3 + p_2 e_1 - p_1 e_2 = e_1^3 - 3e_1 e_2 + 3e_3$$

$$\vdots$$

E, de forma mais geral, sendo $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k]$ temos que

$$p_\lambda = p_{[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k]} = p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \cdots p_{\lambda_k} = \prod_{i=1}^k p_{\lambda_i} \quad (2.22)$$

$$p_{\lambda_i} = (-1)^{\lambda_i-1} \lambda_i e_{\lambda_i} + \sum_{m=1}^{\lambda_i-1} (-1)^{m-1} p_{\lambda_i-m} e_m.$$

A transição entre a base monomial e a base de soma de potências é um pouco mais complicada. Seja $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k]$ uma partição com $k \leq n$. Dado o conjunto de

variáveis x_1, x_2, \dots, x_n , a função monomial simétrica

$$m_\lambda = m_{[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k]}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

nessas variáveis é a soma do monômio $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_k^{\lambda_k}$ com todos os distintos monômios obtidos pela permutação das variáveis. Por exemplo, com $\lambda = [2, 1, 1]$ e $n = 4$:

$$\begin{aligned} m_{[2,1,1]} = & x_1^2 x_2 x_3 + x_1 x_2^2 x_3 + x_1 x_2 x_3^2 + x_1^2 x_2 x_4 \\ & + x_1 x_2^2 x_4 + x_1 x_2 x_4^2 + x_1^2 x_3 x_4 + x_1 x_3^2 x_4 \\ & + x_1 x_3 x_4^2 + x_2^2 x_3 x_4 + x_2 x_3^2 x_4 + x_2 x_3 x_4^2. \end{aligned}$$

Em particular, quando $\lambda = [k]$, temos a soma de potências [38]

$$m_{[k]} = p_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^k.$$

Da equação acima, fica claro que, para qualquer caso, $p_0(x_1, x_2, \dots, x_n) = n$.

Para cada partição $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k] = [1^{t_1} 2^{t_2} \dots k^{t_k}]$ com $k \leq n$, onde t_i indica a quantidade de vezes que um inteiro aparece na partição, a *função simétrica monomial aumentada* [44] é definida como

$$\begin{aligned} \tilde{m}_\lambda &= \tilde{m}_{[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k]}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= t_1! t_2! \dots t_k! m_\lambda \\ &= \lambda! m_\lambda. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Uma maneira simples de expressar a função simétrica monomial aumentada em termos de soma de potências é dada por [44]

$$\begin{aligned} \tilde{m}_{[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k]} &= p_{\lambda_k} \tilde{m}_{[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1}]} \\ &\quad - \sum_{i=1}^{k-1} \tilde{m}_{[\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i + \lambda_k, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_{k-1}]}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

onde \tilde{m} e p são funções de n variáveis, $n \geq k$.

2.3 Polinômios de Jack

Os polinômios de Jack são outra família de funções simétricas homogêneas, que dependem de uma partição e de um parâmetro α .

Seja $x = (x_1, \dots, x_N)$ um conjunto de variáveis e λ uma partição de comprimento $\ell(\lambda) = m \leq N$, o polinômio de Jack $C_\lambda^{(\alpha)}(x)$ satisfaz as seguintes propriedades [38][19]:

1. o polinômio é escrito como

$$C_\lambda^{(\alpha)}(x) = d_\lambda x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_m^{\lambda_m} + \text{termos de ordem menor}$$

onde d_λ é uma constante dada por

$$d_\lambda = n! \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \frac{1}{(\lambda_i - i + \ell(\lambda))!} \prod_{j=i+1}^{\ell(\lambda)} (\lambda_i - \lambda_j + j - i).$$

2. $C_\lambda^{(\alpha)}$ é uma autofunção do operador diferencial

$$\Delta^{(\alpha)} = \sum_{j=1}^N x_j^2 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{2}{\alpha} \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^N \frac{x_j^2}{x_j - x_k} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

3. A normalização de $C_\lambda^{(\alpha)}$ é fixada pela condição

$$(x_1 + \cdots + x_N)^n = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \ell(\lambda) \leq N}} C_\lambda^{(\alpha)}(x).$$

Para o caso em que $x = (1, 1, \dots, 1) = 1^N$, temos

$$\begin{aligned} C_\lambda^{(\alpha)}(1^N) &= \frac{\alpha^{2|\lambda|} |\lambda|!}{j_\lambda^{(\alpha)}} \left[\frac{N}{\alpha} \right]_\lambda^\alpha \\ &= \frac{\alpha^{2|\lambda|} |\lambda|!}{j_\lambda^{(\alpha)}} \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \prod_{j=1}^{\lambda_i} \left(\frac{N}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}(i-1) + j - 1 \right) \\ &= \frac{\alpha^{|\lambda|} |\lambda|!}{j_\lambda^{(\alpha)}} \prod_{(i,j) \in \lambda} (N - (i-1) + \alpha(j-1)). \end{aligned} \tag{2.25}$$

Esse é um resultado particularmente importante para a seção [2.5]. Sua conexão com o Diagrama de Young fica evidente se usarmos a definição (2.4)

$$C_\lambda^{(\alpha)}(1^N) = \frac{|\lambda|!}{j_\lambda^{(\alpha)}} \prod_{(i,j) \in \lambda} (\alpha N + c_{ij}^{(\alpha)}). \quad (2.26)$$

Os casos mais interessantes dos polinômios de Jack são quando $\alpha = 1$ e $\alpha = 2$, pois reduzem-se às funções de Schur s_λ e aos polinômios Zonais, respectivamente. Para esses casos temos [40]

$$j_\lambda^{(\alpha)} = \begin{cases} |\lambda|^2/d_\lambda^2, & \text{se } \alpha = 1; \\ |2\lambda|^2/d_{2\lambda}, & \text{se } \alpha = 2. \end{cases}$$

Existem definições equivalentes do polinômio de Jack que levam a diferentes normalizações. A definição ‘C’ será útil porque surge na teoria das funções hipergeométricas de argumento matricial. As outras definições são as normalizações ‘P’ e ‘J’. A primeira tem coeficiente $d_\lambda = 1$ (polinômio mônico) e a última possui o coeficiente do monômio $x_1 x_2 \cdots x_k$ igual a $k!$.

Normalização	Propriedade básica	Valor para $x = 1^N$
C	$(x_1 + \cdots + x_N)^n = \sum_{\ell(\lambda) \leq n} C_\lambda^{(\alpha)}(x)$	$C_\lambda^{(\alpha)}(1^N) = \frac{\alpha^{2 \lambda } \lambda !}{j_\lambda^{(\alpha)}} \left[\frac{N}{\alpha} \right]_\lambda^\alpha$
J	coeficiente de $x_1 \cdots x_k$ é $k!$	$J_\lambda^{(\alpha)}(1^N) = \alpha^{ \lambda } \left[\frac{N}{\alpha} \right]_\lambda^\alpha$
P	$d_\lambda = 1$ (polinômio mônico)	$P_\lambda^{(\alpha)}(1^N) = \frac{\alpha^{ \lambda }}{c(\alpha, \lambda)} \left[\frac{N}{\alpha} \right]_\lambda^\alpha$

TABELA 2.6: Normalizações dos polinômios de Jack. Adaptado de Dumitriu et al. (2007)

As relações das normalizações ‘P’ e ‘J’ com a definição ‘C’ são [42]

$$P_\lambda^{(\alpha)}(x) = \frac{c'(\lambda, \alpha)}{\alpha^{|\lambda|} |\lambda|!} C_\lambda^{(\alpha)}(x),$$

$$J_\lambda^{(\alpha)}(x) = \frac{j_\lambda^{(\alpha)}}{\alpha^{|\lambda|} |\lambda|!} C_\lambda^{(\alpha)}(x).$$

Os polinômios de Jack podem ser escritos na base de funções simétricas monomiais

$$m_\lambda(x) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} x_{\sigma_1}^{\lambda_1} x_{\sigma_2}^{\lambda_2} \cdots x_{\sigma_N}^{\lambda_N}. \quad (2.28)$$

	C	J	P
C		$\frac{\alpha^{ \lambda } \lambda !}{j_\lambda^{(\alpha)}}$	$\frac{\alpha^{ \lambda } \lambda !}{c'(\lambda,\alpha)}$
J	$\frac{j_\lambda^{(\alpha)}}{\alpha^{ \lambda } \lambda !}$		$c(\lambda,\alpha)$
P	$\frac{c'(\lambda,\alpha)}{\alpha^{ \lambda } \lambda !}$	$\frac{1}{c(\lambda,\alpha)}$	

TABELA 2.7: Conversões entre as três normalizações para os polinômios de Jack. Adaptado de Dumitriu et al. (2007)

de modo que [19, 38]

$$C_\lambda^{(\alpha)} = \sum_{\sigma \leq \lambda} v_{\lambda,\sigma}^{(\alpha)} m_\sigma. \tag{2.29}$$

Os coeficientes $v_{\lambda,\sigma}^\alpha$ podem ser calculados recursivamente [42]

$$v_{\lambda,\sigma}^{(\alpha)} = \frac{\frac{2}{\alpha}}{\rho_\lambda^{(\alpha)} - \rho_\sigma^{(\alpha)}} \sum_{\sigma < \mu \leq \lambda} ((l_i + t) - (l_j - t)) v_{\lambda,\mu}^{(\alpha)},$$

$$\rho_\lambda^{(\alpha)} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \left(\lambda_i - 1 - \frac{2}{\alpha}(i - 1) \right),$$

onde $\sigma = [l_1, \dots, l_i, \dots, l_j, \dots, l_m]$, $\mu = [l_1, \dots, l_i + t, \dots, l_j - t, \dots, l_m]$ e μ tem a propriedade de, quando apropriadamente reordenado, estar entre σ (estritamente) e λ em ordem lexicográfica.

Duas identidades dos polinômios de Jack são essenciais para nosso desenvolvimento. A primeira é [19]

$$\prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-\frac{1}{\alpha}} = \sum_\lambda \frac{1}{j_\lambda^{(\alpha)}} J_\lambda^{(\alpha)}(x) J_\lambda^{(\alpha)}(y)$$

$$= \sum_\lambda \frac{j_\lambda^{(\alpha)}}{\alpha^{2|\lambda|} (|\lambda|!)^2} C_\lambda^{(\alpha)}(x) C_\lambda^{(\alpha)}(y). \tag{2.30}$$

Fazendo $y_j = 1$ na equação acima, (2.30), obtemos

$$\prod_{i=1}^N (1 - x_i)^{-\frac{N}{\alpha}} = \sum_\lambda \frac{j_\lambda^{(\alpha)}}{\alpha^{2|\lambda|} (|\lambda|!)^2} C_\lambda^{(\alpha)}(x) C_\lambda^{(\alpha)}(1^N)$$

$$= \sum_\lambda \left[\frac{N}{\alpha} \right]_\lambda \frac{C_\lambda^{(\alpha)}(x)}{|\lambda|!} \tag{2.31}$$

que pode ser escrita como um determinante

$$(\det(1 - X))^{-b} = \sum_{\lambda} [b]_{\lambda}^{(\alpha)} \frac{C_{\lambda}^{(\alpha)}(x)}{|\lambda|!}. \quad (2.32)$$

A segunda identidade afirma que

$$(\text{Tr } X)^n = (x_1 + x_2 + \dots + x_N)^n = \sum_{|\lambda|=n} C_{\lambda}^{(\alpha)}(x). \quad (2.33)$$

Usando a expansão em série da função exponencial em conjunto com a identidade acima, (2.33),

$$e^{\text{Tr } X} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\text{Tr } X)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} \frac{C_{\lambda}^{(\alpha)}(x)}{n!} \quad (2.34)$$

encontramos

$$e^{\text{Tr } X} = \sum_{\lambda} \frac{C_{\lambda}^{(\alpha)}(x)}{n!}. \quad (2.35)$$

As séries (2.32) e (2.35) são casos particulares de funções hipergeométricas (2.37b) e (2.37a).

Exemplo: *polinômios de Jack para $|\lambda| \leq 3$*

$$\begin{aligned} |\lambda| = 1 & \left\{ \begin{array}{l} P_{(1)}^{(\alpha)} = m_{[1]} \end{array} \right. \\ |\lambda| = 2 & \left\{ \begin{array}{l} P_{[2]}^{(\alpha)} = m_{[2]} + \frac{\alpha}{1+\alpha} m_{[1,1]} \\ P_{[1,1]}^{(\alpha)} = m_{[1,1]} \end{array} \right. \\ |\lambda| = 3 & \left\{ \begin{array}{l} P_{[3]}^{(\alpha)} = m_{[3]} + \frac{3}{1+2\alpha} m_{[2,1]} + \frac{6}{(1+\alpha)(1+2\alpha)} m_{[1,1,1]} \\ P_{[2,1]}^{(\alpha)} = m_{[2,1]} + \frac{6}{2+\alpha} m_{[1,1,1]} \\ P_{[1,1,1]}^{(\alpha)} = m_{[1,1,1]} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Exemplo: *diferentes normalizações*

$$\begin{aligned} P_{[2,1]}^{(\alpha)} &= m_{[2,1]} + \frac{6}{2+\alpha} m_{[1,1,1]} \\ J_{[2,1]}^{(\alpha)} &= (2+\alpha)m_{[2,1]} + 6m_{[1,1,1]} \\ C_{[2,1]}^{(\alpha)} &= \frac{6\alpha}{1+2\alpha} m_{[2,1]} + \frac{36\alpha}{(1+2\alpha)(2+\alpha)} m_{[1,1,1]} \end{aligned}$$

2.4 Função Hipergeométrica de Argumento Matricial

A função hipergeométrica ${}_pF_q^{(\alpha)}(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; x)$ é definida pela série [45][46]

$${}_pF_q^{(\alpha)}(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; x) = \sum_{\lambda} \frac{[a_1]_{\lambda}^{(\alpha)} \cdots [a_p]_{\lambda}^{(\alpha)} C_{\lambda}^{(\alpha)}(x)}{[b_1]_{\lambda}^{(\alpha)} \cdots [b_q]_{\lambda}^{(\alpha)} |\lambda|!} \quad (2.36)$$

desde que $b_j - \frac{1}{\alpha}(i-1) > 0$ para $1 \leq j \leq q$ e $1 \leq i \leq N$.

As propriedades de convergência da função hipergeométrica são:

- se $p \leq q$ a série (2.36) converge absolutamente para todo $x \in \mathbb{C}^N$;
- se $p = q + 1$ a série converge absolutamente para $|x| < \rho$, para alguma constante positiva ρ ;
- se $p > q + 1$ a série diverge a menos que termine.

Alguns resultados para a função hipergeométrica [19]:

$${}_0F_0^{(\alpha)}(x) = \sum_{\lambda} \frac{C_{\lambda}^{(\alpha)}(x)}{|\lambda|!} = e^{\text{Tr } x}, \quad (2.37a)$$

$${}_1F_0^{(\alpha)}(a; x) = \sum_{\lambda} [a]_{\lambda}^{(\alpha)} \frac{C_{\lambda}^{(\alpha)}(x)}{|\lambda|!} = \det(1 - x)^{-a}, \quad (2.37b)$$

$${}_1F_1^{(\alpha)}(a; b; x) = \sum_{\lambda} \frac{[a]_{\lambda}^{(\alpha)} C_{\lambda}^{(\alpha)}(x)}{[b]_{\lambda}^{(\alpha)} |\lambda|!}, \quad (2.37c)$$

$${}_2F_1^{(\alpha)}(a, b; c; x) = \sum_{\lambda} \frac{[a]_{\lambda}^{(\alpha)} [b]_{\lambda}^{(\alpha)} C_{\lambda}^{(\alpha)}(x)}{[c]_{\lambda}^{(\alpha)} |\lambda|!}. \quad (2.37d)$$

Percebendo que a partir do limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a)_n}{a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(a+1) \cdots (a+n-1)}{a^n} = 1 \quad (2.38)$$

temos

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{[a]_{\lambda}^{(\alpha)}}{a^{|\lambda|}} = 1, \quad (2.39)$$

podemos escrever a *relação de confluência*

$$\begin{aligned}
 \lim_{b \rightarrow \infty} {}_2F_1^{(\alpha)}(a, b; c; \frac{1}{b}x) &= \lim_{b \rightarrow \infty} \sum_{\lambda} \frac{[a]_{\lambda}^{(\alpha)} [b]_{\lambda}^{(\alpha)} C_{\lambda}^{(\alpha)}(\frac{x}{b})}{[c]_{\lambda}^{(\alpha)} |\lambda|!} \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \sum_{\lambda} \frac{[a]_{\lambda}^{(\alpha)} [b]_{\lambda}^{(\alpha)} C_{\lambda}^{(\alpha)}(x)}{[c]_{\lambda}^{(\alpha)} b^{|\lambda|} |\lambda|!} \\
 &= \sum_{\lambda} \frac{[a]_{\lambda}^{(\alpha)} C_{\lambda}^{(\alpha)}(x)}{[c]_{\lambda}^{(\alpha)} |\lambda|!} \\
 &= {}_1F_1^{(\alpha)}(a; c; x).
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

De maneira análoga

$$\lim_{a \rightarrow \infty} {}_1F_1^{(\alpha)}(a; c; \frac{1}{a}x) = {}_0F_1^{(\alpha)}(c; x). \tag{2.41}$$

A função hipergeométrica ${}_2F_1^{(\alpha)}(a, b; c; x)$ é solução da equação diferencial parcial holonômica [21]

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^N \left\{ x_i(1-x_i) \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} + \left[c - \frac{1}{\alpha}(N-1) - \left(a + b + 1 - \frac{1}{\alpha}(N-1) \right) x_i \right] \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\} \\
 + \frac{2}{\alpha} \sum_{i \neq j} \frac{x_i(1-x_i)}{x_i - x_j} \frac{\partial F}{\partial x_i} = N a b F.
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

Para $N = 1$ obtemos a equação diferencial hipergeométrica usual

$$x(1-x) \frac{d^2 F}{dx^2} + [c - (a+b+1)x] \frac{dF}{dx} = abF \tag{2.43}$$

cuja solução é escrita como

$${}_2F_1(a; b; c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n x^n}{(c)_n n!}. \tag{2.44}$$

Motivados por (2.40) vamos fazer $x_i \rightarrow x_i/b$ e dividir (2.42) por b

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^N \left\{ x_i \left(1 - \frac{x_i}{b}\right) \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} + \left[c - \frac{1}{\alpha}(N-1) - \left(1 + \frac{1}{b} \left(a + 1 - \frac{1}{\alpha}(N-1) \right) \right) x_i \right] \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\} \\
 + \frac{2}{\alpha} \sum_{i \neq j} \frac{x_i}{x_i - x_j} \left(1 - \frac{x_i}{b}\right) \frac{\partial F}{\partial x_i} = N a b F.
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

Tomando o limite $b \rightarrow \infty$ obtemos a equação diferencial satisfeita pela função ${}_1F_1^{(\alpha)}(a; c; x)$ [45, 46]

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \left\{ x_i \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} + \left[c - \frac{1}{\alpha}(N-1) - x_i \right] \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\} \\ + \frac{2}{\alpha} \sum_{i \neq j} \frac{x_i}{x_i - x_j} \frac{\partial F}{\partial x_i} = NaF. \end{aligned} \quad (2.46)$$

2.5 Resultados de Kaneko

Em seu artigo [21], Kaneko estudou a seguinte generalização da integral de Selberg:

$$K_N(\lambda_1, \lambda_2, \lambda; \vec{t}) = \int_0^1 d^N x \prod_{i=1}^N \prod_{k=1}^M (x_i - t_k) \prod_{i < j} |x_i - x_j|^\lambda \prod_{i=1}^N x_i^{\lambda_1} (1 - x_i)^{\lambda_2}. \quad (2.47)$$

Na ausência de variáveis t , o que corresponde a $M = 0$, o valor da integral K_N é dado pelo resultado de Selberg [21]

$$\begin{aligned} S_N(\lambda_1, \lambda_2, \lambda) &= \int_0^1 d^N x \prod_{i < j} |x_i - x_j|^\lambda \prod_{i=1}^N x_i^{\lambda_1} (1 - x_i)^{\lambda_2} \\ &= \prod_{i=1}^N \frac{\Gamma(1 + i \frac{\lambda}{2}) \Gamma(\lambda_1 + 1 + (i-1) \frac{\lambda}{2}) \Gamma(\lambda_2 + 1 + (i-1) \frac{\lambda}{2})}{\Gamma(1 + \frac{\lambda}{2}) \Gamma(\lambda_1 + \lambda_2 + 2 + (N+i-2) \frac{\lambda}{2})}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Kaneko mostrou que a integral $K_N(\lambda_1, \lambda_2, \lambda; \vec{t})$ satisfaz um sistema holonômico de equações diferenciais parciais [21], o que o permitiu concluir que K_N está relacionada com as funções hipergeométricas de argumento matricial da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} K_N(\lambda_1, \lambda_2, \lambda; \vec{t}) &= S_N(\lambda_1 + M, \lambda_2, \lambda) \times \\ &\times {}_2F_1\left(\frac{\lambda}{2}\right) \left(-N, \frac{2}{\lambda}(\lambda_1 + \lambda_2 + M + 1) + N - 1; \frac{2}{\lambda}(\lambda_1 + M); \vec{t} \right). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Analisando a generalização da integral de Selberg (2.47) percebemos a relação dos resultados de Kaneko com a *teoria das matrizes aleatórias* (TMA). Com exceção do produto duplo, o integrando é a função de densidade de probabilidade do Ensemble de Jacobi, onde $\beta = \lambda$. Com os parâmetros λ_1 e λ_2 o Ensemble de Jacobi é a generalização dos Ensembles de Hermite, de Laguerre e o Circular.

Usaremos essa relação para calcular médias de quantidades de interesse para o nosso trabalho nos Ensembles de Jacobi e, também, de Laguerre.

2.5.1 Ensemble de Jacobi

Outra generalização da integral de Selberg estudada por Kaneko foi:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 d^N x \prod_{i=1}^N \prod_{k=1}^M (1 - x_i t_k)^{-\frac{\lambda}{2}} \prod_{i < j} |x_i - x_j|^\lambda \prod_{i=1}^N x_i^{\lambda_1} (1 - x_i)^{\lambda_2} \\ & = S_N(\lambda_1, \lambda_2, \lambda) \times \\ & \quad \times {}_2F_1\left(\frac{2}{\lambda}\right) \left(\frac{\lambda}{2} N, \frac{\lambda}{2} (N - 1) + \lambda_1 + 1; \lambda(N - 1) + \lambda_1 + \lambda_2 + 2; t_1, \dots, t_M \right). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Uma consequência importante de (2.50) é uma expressão para a média do polinômio de Jack $C_\lambda^{(\alpha)}(x)$ no Ensemble de Jacobi, cuja distribuição de probabilidade é dada por:

$$\frac{1}{S_N(\lambda_1, \lambda_2, \beta)} \prod_{i < j} |x_i - x_j|^\beta \prod_{i=1}^N x_i^{\lambda_1} (1 - x_i)^{\lambda_2}. \quad (2.51)$$

De fato, substituindo (2.30) e (2.37d) em (2.50) e usando (2.25), obtemos

$$\begin{aligned} \left\langle C_\kappa^{(\frac{2}{\beta})}(x) \right\rangle_J &= \frac{|\kappa! \alpha^{2|\kappa|} \left[\frac{\beta}{2} N \right]_\kappa^{(2/\beta)} \left[\frac{\beta}{2} (N - 1) + \lambda_1 + 1 \right]_\kappa^{(2/\beta)}}{j_\kappa^{(2/\beta)} [\lambda(N - 1) + \lambda_1 + \lambda_2 + 2]_\kappa^{(2/\beta)}} \\ &= \frac{\left[\frac{\beta}{2} (N - 1) + \lambda_1 + 1 \right]_\kappa^{(2/\beta)}}{[\beta(N - 1) + \lambda_1 + \lambda_2 + 2]_\kappa^{(2/\beta)}} C_\kappa^{(\frac{2}{\beta})}(1^N). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Fazendo $\alpha = 2/\beta$, concluímos que a média do polinômio de Jack para o peso de Jacobi é [21]

$$\left\langle C_\kappa^{(\alpha)}(x) \right\rangle_J = \frac{\left[\frac{1}{\alpha} (N - 1) + \lambda_1 + 1 \right]_\kappa^{(\alpha)}}{\left[\frac{2}{\alpha} (N - 1) + \lambda_1 + \lambda_2 + 2 \right]_\kappa^{(\alpha)}} C_\kappa^{(\alpha)}(1^N). \quad (2.53)$$

Uma abordagem para obtenção de expressões fechadas para observáveis de transporte que explora o resultado (2.53) e, também, o fato de que qualquer polinômio simétrico pode ser escrito em termos de polinômios de Jack foi desenvolvida por Macêdo e Macedo em [35].

2.5.2 Ensemble de Laguerre

Podemos seguir passos semelhantes para o Ensemble de Laguerre, definido por

$$\frac{1}{Z_N(\lambda_1, \beta)} \prod_{i < j} |x_i - x_j|^\beta \prod_{i=1}^N x_i^{\lambda_1} e^{-\frac{\beta}{2} x_i}. \quad (2.54)$$

Para escrever expressões análogas a (2.50) e (2.53) considere a transformação $x_1 \rightarrow \frac{\beta}{2} \frac{x_i}{L}$, $t_i \rightarrow \frac{\beta}{2} \frac{t_i}{L}$ e $\lambda_2 \rightarrow L$ em (2.47) [3], obtendo

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{2}{\beta} L} d^N x \prod_{i=1}^N \prod_{k=1}^M (x_i - t_k) \prod_{i < j} |x_i - x_j|^\beta \prod_{i=1}^N x_i^{\lambda_1} \left(1 - \frac{\beta x_i}{2L}\right)^L \\ &= \left(\frac{2}{\beta} L\right)^{\frac{\beta}{2} N(N-1)} \left(\frac{2}{\beta} L\right)^{N(1+M+\lambda_1)} S_N(\lambda_1 + M, L, \beta) \times \\ & \times {}_2F_1\left(\frac{2}{\beta}\right) \left(-N, \frac{2}{\beta}(\lambda_1 + L + M + 1) + N - 1; \frac{2}{\beta}(\lambda_1 + M); \frac{\beta t_1}{2L}, \dots, \frac{\beta t_M}{2L}\right). \end{aligned} \quad (2.55)$$

Da equação (2.48) para a integral de Selberg

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\beta}{2}\right)^{-N(1+\lambda_1+(N-1)\frac{\beta}{2})} S_N(\lambda_1, \lambda_2, \beta) \\ &= Z_N(\lambda_1, \beta) \prod_{i=1}^N \frac{\Gamma\left(1 + \lambda_2 + (i-1)\frac{\beta}{2}\right)}{\Gamma\left(2 + \lambda_1 + \lambda_2 + (N+i-2)\frac{\beta}{2}\right)}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Usando a aproximação de Stirling

$$\Gamma(z) \approx \sqrt{2\pi} z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} \quad ; \quad |z| \gg 1 \quad (2.57)$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma\left(1 + L + (i-1)\frac{\beta}{2}\right)}{\Gamma\left(2 + \lambda_1 + L + (N+i-2)\frac{\beta}{2}\right)} \approx \frac{L^{L+1} L^{(i-1)\frac{\beta}{2}} L^{-\frac{1}{2}} e^{-L}}{L^{L+\lambda_1+2} L^{(N+i-2)\frac{\beta}{2}} L^{-\frac{1}{2}} e^{-L}} \\ &= \frac{1}{L^{\lambda_1+1} L^{(N-1)\frac{\beta}{2}}}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Dessa forma, para $L \gg 1$,

$$\left(\frac{\beta}{2}\right)^{-N(1+\lambda_1+(N-1)\frac{\beta}{2})} S_N(\lambda_1, \lambda_2, \beta) \approx Z_N(\lambda_1, \beta) L^{-N(1+\lambda_1+(N-1)\frac{\beta}{2})}. \quad (2.59)$$

Tomando o limite $L \rightarrow \infty$ em (2.55) e usando

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\beta} L\right)^{N(1+M+\lambda_1+(N-1)\frac{\beta}{2})} S_N(\lambda_1 + M, L, \beta) = Z_N(\lambda_1 + M, \beta) \quad (2.60a)$$

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\beta x_i}{2L}\right)^L = e^{-\frac{\beta}{2} x_i} \quad (2.60b)$$

$$\lim_{L \rightarrow \infty} {}_2F_1^{(\alpha)}\left(a; \frac{2}{\beta} L; c; \frac{\beta \vec{t}}{2L}\right) = {}_1F_1^{(\alpha)}(a; c; \vec{t}) \quad (2.60c)$$

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{[\lambda_2 L]_{\kappa}^{(\alpha)}}{L^{|\kappa|}} = \lambda_2^{|\kappa|} \quad (2.60d)$$

temos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d^N x \prod_{i=1}^N \prod_{k=1}^M (x_i - t_k) \prod_{i < j} |x_i - x_j|^\beta \prod_{i=1}^N x_i^{\lambda_1} e^{-\frac{\beta}{2} x_i} \\ = Z_N(\lambda_1 + M, \beta) {}_1F_1\left(\frac{\beta}{2}\right)\left(-N; \frac{2}{\beta}(\lambda_1 + M); t_1, \dots, t_M\right). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Definindo a média sobre o peso de Laguerre por

$$\langle f(x) \rangle = \frac{1}{Z_N(\lambda_1, \beta)} \int_0^\infty d^N x f(x) \prod_{i < j} |x_i - x_j|^\beta \prod_{i=1}^N x_i^{\lambda_1} e^{-\frac{\beta}{2} x_i} \quad (2.62)$$

obtemos um resultado útil para o desenvolvimento da seção 3.2

$$\left\langle \prod_{i=1}^N \prod_{k=1}^M (x_i - t_k) \right\rangle = \frac{Z_N(\lambda_1 + M, \beta)}{Z_N(\lambda_1, \beta)} {}_1F_1\left(\frac{\beta}{2}\right)\left(-N; \frac{2}{\beta}(\lambda_1 + M); t_1, \dots, t_M\right). \quad (2.63)$$

Também podemos, de maneira semelhante ao que fizemos para o Ensemble de Jacobi, substituir (2.30) e (2.37d) em (2.50) e usar (2.25), mas dessa vez mantendo a forma

integral de (2.53)

$$\begin{aligned} & \int_0^1 d^N x C_{\kappa}^{(\alpha)}(x) \prod_{i<j} |x_i - x_j|^{\beta} \prod_{i=1}^N x_i^{\lambda_1} (1 - x_i)^{\lambda_2} \\ &= \frac{\left[\frac{(N-1)}{\alpha} + \lambda_1 + 1 \right]_{\kappa}^{(\alpha)}}{\left[2 \frac{(N-1)}{\alpha} + \lambda_1 + \lambda_2 + 2 \right]_{\kappa}^{(\alpha)}} C_{\kappa}^{(\alpha)}(1^N) S_N(\lambda_1, \lambda_2, \beta). \end{aligned} \quad (2.64)$$

Seguimos com as transformações, como em (2.55), $x_i \rightarrow \frac{\beta}{2} \frac{x_i}{L}$ e $\lambda_2 \rightarrow L$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{2}{\beta}L} d^N x C_{\kappa}^{(\alpha)}(x) \prod_{i<j} |x_i - x_j|^{\beta} \prod_{i=1}^N x_i^{\lambda_1} \left(1 - \frac{\beta}{2} \frac{x_i}{L}\right)^L \\ &= \left(\frac{2}{\beta}L\right)^{N(1+\lambda_1)} \left(\frac{2}{\beta}L\right)^{N(N-1)\frac{\beta}{2}} S_N(\lambda_1, \lambda_2, \beta) \times \\ & \times \frac{\left(\frac{2}{\beta}L\right)^{|\kappa|}}{\left[\frac{2}{\alpha}(N-1) + \lambda_1 + \lambda_2 + 2\right]_{\kappa}^{(\alpha)}} \left[\frac{1}{\alpha}(N-1) + \lambda_1 + 1\right]_{\kappa}^{(\alpha)} C_{\kappa}^{(\alpha)}(1^N). \end{aligned} \quad (2.65)$$

Tomando o limite $L \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} d^N x C_{\kappa}^{(\alpha)}(x) \prod_{i<j} |x_i - x_j|^{\beta} \prod_{i=1}^N x_i^{\lambda_1} e^{-\frac{\beta}{2}x_i} \\ &= Z_N(\lambda_1, \beta) \left[\frac{1}{\alpha}(N-1) + \lambda_1 + 1\right]_{\kappa}^{(\alpha)} C_{\kappa}^{(\alpha)}(1^N). \end{aligned} \quad (2.66)$$

concluimos que a média do polinômio de Jack no ensemble de Laguerre é

$$\left\langle C_{\kappa}^{(\alpha)}(x) \right\rangle_L = \left[\frac{1}{\alpha}(N-1) + \lambda_1 + 1\right]_{\kappa}^{(\alpha)} C_{\kappa}^{(\alpha)}(1^N). \quad (2.67)$$

2.6 Teoria de Matrizes Aleatórias

Ao longo dos últimos anos a Teoria de Matrizes Aleatórias (TMA) proporcionou ferramentas poderosas para investigar o transporte eletrônico através de cavidades balísticas (pontos quânticos). A densidade dos autovalores é de particular importância porque suas flutuações se manifestam globalmente no espectro das propriedades de suas estatísticas, o que é fundamental para problemas matemáticos ou físicos que requerem análise probabilística.

Neste trabalho estamos interessados em ensembles rotacionalmente invariantes representados por matrizes $N \times N$, para as quais a densidade de probabilidade conjunta dos N autovalores x_i pode ser escrita como

$$P(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{Z_\omega(\beta, N)} \prod_{j < k} |x_j - x_k|^\beta \prod_{i=1}^N \omega(x_i), \quad (2.68)$$

na qual β é o índice do ensemble ($\beta \in \{1, 2, 4\}$), $\omega(x)$ a função peso e $Z_\omega(\beta, N)$ é a constante de normalização. Os valores de β correspondem a ensembles de matrizes reais simétricas ($\beta = 1$), complexas hermitianas ($\beta = 2$) ou quaterniônicas auto-duais ($\beta = 4$). Os ensembles clássicos da Teoria das Matrizes Aleatórias correspondem às seguintes funções peso:

$$\omega(x) = e^{-x^2/2} \quad -\infty < x < \infty \quad \text{Ensemble Gaussiano} \quad (2.69a)$$

$$\omega(x) = e^{-x} x^{\alpha-1} \quad x > 0 \quad \text{Ensemble de Laguerre} \quad (2.69b)$$

$$\omega(x) = x^{\alpha-1} (1-x)^{\gamma/2} \quad 0 < x < 1 \quad \text{Ensemble de Jacobi} \quad (2.69c)$$

A constante de normalização $Z_\omega(\beta, N)$ pode ser calculada através da integral de Selberg

$$\begin{aligned} S_n(a, b, c) &= \int_0^1 d^n t \prod_{i=1}^n t_i^{\alpha-1} (1-t_i)^{b/2} \prod_{i < j} |t_i - t_j|^{2c} \\ &= \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\Gamma(a+jc)\Gamma(b/2+1+jc)\Gamma(1+(j+1)c)}{\Gamma(a+b/2+1+(n+j-1)c)\Gamma(c+1)} \end{aligned} \quad (2.70)$$

e suas generalizações. Em particular, temos:

$$Z_{\omega \equiv G}(\beta, N) = (2\pi)^{N/2} \prod_{j=1}^N \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\beta}{2}j\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{\beta}{2}\right)} \quad (2.71)$$

$$Z_{\omega \equiv L}(\beta, N) = \prod_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(\alpha + j\beta/2)\Gamma((j+1)\beta/2)}{\Gamma(\beta/2)} \quad (2.72)$$

$$Z_{\omega \equiv J}(\beta, N) = S_N(\alpha, \gamma, \beta/2) \quad (2.73)$$

Em aplicações físicas, comumente estamos interessados em estatísticas lineares nos N autovalores:

$$\mathcal{A} = \sum_{i=1}^N f(x_i). \quad (2.74)$$

Existem métodos para calcular, em princípio, os momentos e cumulantes de qualquer estatística linear para o Ensemble de Jacobi, mas apenas de algumas para o Ensemble de Laguerre. Menos é conhecido para as estatísticas não lineares, que envolvem produtos de diferentes autovalores. Por exemplo, a seguinte variável aleatória:

$$\mathcal{T} = \text{perm}(\Psi) := \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_N} \prod_{i=1}^N \psi_{\pi(i)}(x_i). \quad (2.75)$$

onde \mathfrak{S}_N é o grupo simétrico e a soma é sobre as permutações π dos N primeiros inteiros, $\{\psi_i(y)\}$ é o conjunto de N funções dadas e Ψ é uma matriz $N \times N$ com elementos $(\psi_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq N}$.

As médias para o Ensemble de Jacobi correspondem aos momentos dos autovalores de transmissão de uma corrente elétrica através de uma cavidade balística. Os momentos negativos do Ensemble de Laguerre são os momentos da densidade dos autovalores da matriz de tempo de retardo de Wigner-Smith.

2.6.1 Matriz de Espalhamento

Considere uma cavidade caótica aberta de dimensões mesoscópicas com N_1 e N_2 canais eletrônicos nos dois guias conectados. Quando o sistema é levado para fora do equilíbrio, pela aplicação de uma diferença de potencial, é estabelecida uma corrente através da cavidade que demonstra flutuação dependente do tempo, associada com a granularidade da carga do elétron, que persiste mesmo à temperatura zero.

Idealizamos esse sistema de espalhamento como consistindo de uma região de interação *compacta*, ou seja, uma região de volume finito, e de canais através dos quais essa região é acessível e onde a propagação das cargas é livre.

Restringindo o movimento das partículas à região compacta, temos um problema de estados ligados, onde o espectro é discreto. Ao acoplarmos os guias, muitos dos estados ligados tornam-se ressonâncias, que podem dominar o processo de espalhamento.

Representamos a região de interação pelas funções ortogonais φ_μ , ($\mu \in \{1, \dots, M\}$), e os canais pelas funções de onda $\chi_c(E)$, ($c \in \{1, \dots, N\}$), onde E é a energia total. Os estados dos canais não desaparecem na região de interação, mas são ortogonais às funções de onda dos estados ligados, $\langle \chi_c(E) | \varphi_\mu \rangle = 0$ para todo E , c e μ . Nessa base, o Hamiltoniano total tem a forma [23, 47]

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \sum_{\mu, \nu=1}^N |\varphi_\mu\rangle H_{\mu\nu} \langle \varphi_\nu| \\ & + \sum_{\mu=0}^M \sum_{c=1}^N \int_{\varepsilon_c}^{\infty} dE (|\chi_c(E)\rangle W_{\mu c} \langle \chi_c(E)|) \\ & + \sum_{c=1}^N \int_{\varepsilon_c}^{\infty} dE |\chi_c(E)\rangle E \langle \chi_c(E)|. \end{aligned} \quad (2.76)$$

na qual ε_c é a energia limiar no canal c . Quando $E > \varepsilon_c$ dizemos que o canal está aberto. O primeiro termo do Hamiltoniano envolve a matriz H de dimensão $M \times M$ que descreve o acoplamento dos estados ligados. O segundo termo contém a matriz W de dimensão $M \times N$ de acoplamento entre os canais e estados ligados. O terceiro termo é diagonal nos canais.

2.6.1.1 Sistemas fechados: Ensembles Gaussianos

A matriz H é hermitiana e seus elementos são números aleatórios independentes e de distribuição Gaussiana. Essas propriedades caracterizam o *Ensemble Gaussiano*. Existem três classes fundamentais de simetria, também conhecidas como classificação de Dyson, dependendo se os elementos de H são números reais, complexos ou quatérnios, caracterizados pelo índice $\beta = 1, 2$ ou 4 , respectivamente. Essas classes representam os graus de liberdade dos elementos da matriz H e estão sumarizadas na tabela 2.8. Classes adicionais estão enumeradas na tabela 2.9.

De uma maneira geral, um ensemble de matrizes Hermitianas está distribuído na forma

$$P(H) \propto e^{-\beta \text{Tr}V(H)} \quad (2.77)$$

na qual V é uma função de H . A escolha de $V(H) \propto H^2$ [48], um potencial parabólico, garante a normalização da distribuição de probabilidade e corresponde ao Ensemble

β	SRT	SRS	$H_{\mu\nu}$	U
1	sim	sim	real	ortogonal
2	não	-	complexo	unitário
4	sim	não	quatérnio real	simplético

TABELA 2.8: Três classes clássicas de simetria dos Ensembles Gaussianos, classificadas pelo índice β , dependendo da presença ou ausência de simetrias de reversão temporal (SRT) e rotação de spin (SRS). $H_{\mu\nu}$ são os elementos da matriz hermitiana H e U é a matriz formada pelos autovetores de H . Adaptado de Beenakker (1997)

Gaussiano, também conhecido como distribuição de Wigner-Dyson [10][49],

$$P(H) \propto e^{-\beta(\frac{\pi}{2\Delta})^2 M^{-1} \text{Tr} H^2}. \quad (2.78)$$

Seja E_j , ($j \in \{1, \dots, M\}$), os autovalores da matriz $M \times M$ hermitiana H e U a matriz dos seus autovetores. Para encontrar a distribuição dos autovalores E_j , usamos o jacobiano entre os elementos de volume dH e os elementos de volume de dU e $\prod_j dE_j$, respectivamente para a matriz U e para os autovalores E_j , [50]

$$dH = dU J(E_j) \prod_{j=1}^M dE_j \quad , \quad J(E_j) = \prod_{i < j}^M |E_i - E_j|^\beta. \quad (2.79)$$

O elemento de volume dU corresponde à medida invariante de Haar nos grupos ortogonal, ou unitário ou simplético. Isso significa que dU é uma medida única que é invariante sob a transformação $U \rightarrow VUV'$, onde V é uma matriz ortogonal, ou unitária ou simplética arbitrária.

O elemento de volume dU corresponde à medida invariante no grupo correspondente. A distribuição do autovalores E_j é dada por

$$\begin{aligned} P(E_j) &\propto J(E_j) \prod_{j=1}^N e^{-\beta V(E_j)} \\ &= c \prod_{i < j}^M |E_i - E_j|^\beta \prod_{j=1}^N e^{-\beta V(E_j)}. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Essa distribuição tem a forma da distribuição de Gibbs

$$P(E_j) = \exp \left(\beta \sum_{i < j} \ln |E_i - E_j| - \beta \sum_{j=1}^N V(E_j) \right). \quad (2.81)$$

Em (2.80) o jacobiano $J(E_j)$ causa a repulsão entre os níveis E_j e E_i , proporcional a $|E_i - E_j|^\beta$. O potencial V impede que o sistema se separe. Esse sistema é chamado de *Gás Coulombiano*, porque a repulsão logarítmica é equivalente a interação coulombiana entre duas linhas de carga idênticas e paralelas [48][7].

2.6.1.2 Sistemas abertos: Ensembles Circulares

Para estudar o espalhamento de elétrons precisamos calcular a *matriz de espalhamento* S . Essa matriz precisa ter dimensão muito menor que H . Cada linha e coluna da matriz de espalhamento representa um diferente canal e os elementos S_{ij} fornecem a probabilidade de que um elétron entrando na cavidade através do canal i saia através do canal j , ($i, j \in \{1, \dots, N\}$). A matriz S não é hermitiana como o hamiltoniano H , mas sim unitária

$$SS^\dagger = 1. \quad (2.82)$$

O hamiltoniano H é relacionado à matriz de espalhamento S através da formula de Weidenmüller [2, 4]:

$$S(E) = 1 - 2\pi i W^\dagger (E - H + i\pi W W^\dagger)^{-1} W. \quad (2.83)$$

Chamamos o termo $H - i\pi W W^\dagger$ de *Hamiltoniano efetivo não-hermitiano* H_{eff} .

A matriz W acopla os M níveis de energia da cavidade aos N ($N \ll M$) canais de espalhamento. Ela pode ser escolhida como diagonal retangular, cujos elementos da diagonal são dados pela fórmula [4, 23]:

$$w_i = \sqrt{\frac{N\Delta}{\pi^2\Gamma_i} (2 - \Gamma_i \pm 2\sqrt{1 - \Gamma_i})}. \quad (2.84)$$

Nessa fórmula, (2.84), Γ_i é a probabilidade de tunelamento do canal i ($i \in \{1, \dots, N\}$). Para o caso em que o acoplamento é perfeito (balístico) temos $\Gamma_i = 1$. O coeficiente Δ é o espaçamento médio entre os níveis, que é a distância média entre os níveis de energia adjacentes no bulk da distribuição de níveis de energia.

A densidade de estados é determinada pela matriz de espalhamento através da seguinte equação [51]:

$$\rho(E) = -\frac{i}{2\pi} \frac{d}{dE} \ln \det S(E). \quad (2.85)$$

Das equações (2.83) e (2.85) obtemos uma expressão para a densidades de estados no nível de Fermi ($E = 0$) em termos do hamiltoniano

$$\rho_0 = \text{Tr} \left(\left[1 - 2\pi i W^\dagger (H_{eff}^\dagger)^{-1} W \right] W^\dagger H_{eff}^{-2} W \right). \quad (2.86)$$

Assim como a distribuição de Wigner-Dyson descreve o Hamiltoniano H do sistema fechado, o *Ensemble Circular* [7] fornece as propriedades estatísticas da matriz de espalhamento S para sistemas abertos e consiste de matrizes unitárias. É uma elegante ferramenta matemática idealizada por Freeman Dyson. Em contraste com as matrizes hermitianas, as matrizes unitárias formam uma variedade (*manifold*) compacta, não sendo necessário introduzir o potencial V para garantir a normalização da sua distribuição de probabilidade.

Uma matriz S de dimensão $N \times N$ do Ensemble Circular possui autovalores $e^{i\phi_j}$ com $0 \leq \phi_j < 2\pi$ e $j = 1, \dots, N$, enquanto os autovetores formam uma matriz ortogonal ($\beta = 1$), ou unitária ($\beta = 2$) ou simplética ($\beta = 4$). A distribuição uniforme de S implica a distribuição

$$P(\phi_j) \propto \prod_{i,j} \left| e^{i\phi_i} - e^{i\phi_j} \right|^\beta \quad (2.87)$$

para as fases ϕ_j dos autovalores, que representam os níveis de energia. O espaçamento médio entre esses níveis é $\Delta = 2\pi/N$. Uma propriedade importante da universalidade da teoria das matrizes aleatórias é que, no limite $N \rightarrow \infty$, as estatísticas das autofases ϕ_j são as mesmas daquelas dos níveis de energia E_j do Ensemble Gaussiano.

O Ensemble Circular caracteriza sistemas onde os processos de espalhamento são igualmente prováveis, sujeitos às restrições de simetria. Considerando a abordagem de Landauer-Büttiker [14, 52–54], assumimos a definição usual de S , na qual os coeficientes da função de onda dos elétrons entrando e saindo da cavidade estão relacionadas pela matriz de espalhamento

$$S = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix} \quad (2.88)$$

onde (t, t') e (r, r') são as submatrizes de transmissão e reflexão entre diferentes canais.

A teoria prevê que muitas quantidade de interesse experimental são representadas por estatísticas lineares nos autovalores da matriz $N \times N$ hermitiana tt^\dagger , com $N =$

$\min(N_1, N_2)$. Por exemplo, a condutância e a potência de ruído de disparo adimensionais são dados respectivamente por:

$$\begin{aligned}\mathcal{G} &= \text{Tr}(tt^\dagger), \\ \mathcal{P} &= \text{Tr}\left(tt^\dagger(1 - tt^\dagger)\right).\end{aligned}$$

A TMA é conhecida por ser bastante efetiva ao descrever flutuações universais em cavidades abertas. A suposição mais simples é a de que a Matriz de Espalhamento S pertence ao ensemble de matrizes aleatória unitárias. Assumindo pontos de contato balísticos, uma abordagem de máxima entropia leva a distribuição de probabilidade de S a ser uniforme dentro do grupo unitário, ou seja, S pertence a um dos Ensembles Circulares.

A condição de unitariedade induz uma certa densidade de probabilidade conjunta nos autovalores de transmissão T_i da matriz tt^\dagger , da qual as estatísticas de interesse experimental podem ser, em princípio, obtidas. Essa distribuição de probabilidade conjunta tem a forma de Jacobi (2.69c)

$$P(T_1, \dots, T_N) = \frac{1}{Z_{\omega \equiv J}(\beta, N)} \prod_{j < k} |T_j - T_k|^\beta \prod_{i=1}^N T_i^{\alpha-1} (1 - T_i)^{\gamma/2} \quad (2.89)$$

onde os índices β e γ caracterizam, para cada categoria, as diferentes classes de simetria apresentadas na tabela 2.9 e $\alpha = \frac{\beta}{2}(|N_1 - N_2| + 1)$. Ainda na tabela 2.9, temos que

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I}_N \\ \mathbb{I}_N & 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_z = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_N & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_N \end{pmatrix}.$$

Os autovalores T_i são então variáveis correlacionadas, com valor entre 0 e 1, e possuem uma interpretação em termos da probabilidade de um elétron ser transmitido através de um dos canais.

Categoria	Classe	β	γ	SRT	SRS	SPB	SSR	U	S	$S_{\mu\nu}$
Wigner-Dyson	AI	1	0	+1	1	0	0	$\mathbb{U}(N)$	$U^T U$	\mathbb{R}
Wigner-Dyson	A	2	0	0	-	0	0	$\mathbb{U}(N)$	U	\mathbb{C}
Wigner-Dyson	AII	4	0	-1	0	+1	1	$\mathbb{U}(2N)$	$JU^T J^{-1}U$	\mathbb{H}
Quiral	AIII	2	0	0	-	0	1	$\mathbb{U}(2N)$	$\Sigma_z U^\dagger \Sigma_z U$	\mathbb{C}
Quiral	BDI	1	0	+1	1	+1	1	$\mathbb{SO}(2N)$	$\Sigma_z U^T \Sigma_z U$	\mathbb{R}
Quiral	CII	4	0	-1	0	-1	1	$\mathbb{S}_p(4N)$	$\Sigma_z U^\dagger \Sigma_z U$	\mathbb{H}
Bdg	D	2	-1	0	0	+1	0	$\mathbb{SO}(2N)$	U	\mathbb{R}
Bdg	C	2	1	0	1	-1	0	$\mathbb{S}_p(2N)$	U	\mathbb{H}
Bdg	DIII	1	-1	-1	0	+1	1	$\mathbb{SO}(4N)$	$JU^T J^{-1}U$	\mathbb{R}
Bdg	CI	4	2	+1	1	-1	1	$\mathbb{S}_p(4N)$	$\Sigma_z U^\dagger \Sigma_z U$	\mathbb{H}

TABELA 2.9: Tabela de Cartan. Dez classes de simetria dos Ensembles Circulares, classificadas pelos índices β e α , dependendo da presença ou ausência de simetrias de reversão temporal (SRT), rotação de spin (SRS), partícula-buraco (SPB) e subrede (SSR). $S_{\mu\nu}$ são os elementos da matriz unitária S . Adaptado de Nishigaki et al. (2003), Fulga et al. (2012) e Jacquod et al. (2012).

2.6.1.3 Comentários

A partir de (2.89) podemos, em princípio, obter todas as quantidades de interesse, como:

$$\mathcal{G} = \sum_{i=1}^N T_i \quad (\text{condutância}) \quad (2.90)$$

$$\mathcal{P} = \sum_{i=1}^N T_i(1 - T_i) \quad (\text{potência de ruído de disparo}) \quad (2.91)$$

$$\mathcal{M}_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N T_i^n \quad (\text{momentos}) \quad (2.92)$$

Fórmulas para a média, variância e distribuição completa da condutância e da potência de ruído de disparo são conhecidas e válidas para um número arbitrário de canais abertos e qualquer classe de simetria β .

2.6.2 Matriz de Tempo de Retardo

Os diversos observáveis relacionados ao tempo de retardo são obtidos a partir dos elementos da diagonal e dos autovalores τ_1, \dots, τ_N da matriz de tempo de retardo (ou

de Wigner-Smith) (1.5) [22, 55].

A abordagem da Teoria das Matrizes Aleatórias para o tempo de retardo é baseada na representação da matriz de Wigner-Smith em termos do Hamiltoniano não-hermitiano efetivo H_{eff} de sistemas abertos (2.83), que descreve a dependência da energia da matriz de espalhamento, permitindo sua diferenciação em (1.5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial E} &= \frac{\partial}{\partial E} \left[1 - 2\pi i W^\dagger (E - H_{eff})^{-1} W \right] \\ &= \left[2\pi i W^\dagger (E - H_{eff})^{-2} W \right]. \end{aligned} \quad (2.93)$$

Brower, Frahm e Beenakker [26] demonstraram que, para cavidades caóticas com contatos ideais, os inversos dos autovalores da matriz de tempo de retardo estão distribuídos de acordo com o Ensemble de Laguerre

$$P(\gamma_1, \dots, \gamma_N) = \frac{1}{Z_{\omega \equiv L}(\beta, N)} \prod_{j < k} |\gamma_j - \gamma_k|^\beta \prod_{i=1}^N e^{-\frac{\beta}{2} \tau_H \gamma_i} \gamma_i^{\frac{\beta}{2} N}, \quad (2.94)$$

onde $Z_{\omega \equiv L}$ é a constante de normalização no peso de Laguerre (2.72) e γ_i são os inversos dos *tempos próprios* τ_i , ou seja, $\gamma_i = 1/\tau_i$. Portanto, os tempos próprios são os autovalores da matriz de tempo de retardo

$$Q = V \begin{pmatrix} \tau_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \tau_N \end{pmatrix} V^\dagger, \quad (2.95)$$

na qual V é uma matriz unitária. Para demonstrar essa diferença representaremos a matriz de espalhamento S como

$$S = U \begin{pmatrix} e^{2i\eta_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{2i\eta_N} \end{pmatrix} U^\dagger = U e^{i\Theta} U^\dagger \quad (2.96)$$

onde $\Theta = \text{diag}(2\eta_1, \dots, 2\eta_N)$ reúne os N deslocamentos de fase e U é diferente da matriz V . A partir dessa representação, deduzimos a seguinte forma para a matriz de Wigner-Smith:

$$Q = U \frac{\partial \Theta}{\partial E} U^\dagger + i \left[S^\dagger \left(U \frac{\partial U^\dagger}{\partial E} \right) S - U \frac{\partial U^\dagger}{\partial E} \right]. \quad (2.97)$$

O primeiro termo de (2.97), que envolve a diagonalização da matriz de espalhamento, reúne os *tempos parciais*

$$\frac{\partial \Theta}{\partial E} = \text{diag}(\tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_N) \quad , \quad \tilde{\tau}_i = 2 \frac{\partial \eta_i}{\partial E}, \quad (2.98)$$

que são características intrínsecas da matriz de espalhamento, independente da base. O segundo termo é controlado por U , ou seja pela escolha da base. Essa é a origem da diferença entre tempo parcial e tempo próprio. A hermiticidade $Q = Q^\dagger$ segue da unitariedade de S .

2.6.2.1 Tempo parcial

A diferença entre tempo próprio e tempo parcial é importante porque, sendo os tempos parciais derivadas dos autovalores da matriz S , eles são propriedades intrínsecas do processo de espalhamento, enquanto o tempo próprio depende da escolha da base em que S é representada. Embora esses tempos não coincidam de maneira geral, eles satisfazem a regra de soma

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial E} \ln \det S = \sum_{i=1}^N \tilde{\tau}_i = \sum_{i=1}^N \tau_i = N\tau_W \quad (2.99)$$

onde N é o número total de canais de espalhamento nas guias,

$$N = \sum_{j=1}^n N_j, \quad (2.100)$$

n é o número de guias, cada uma com N_j canais de espalhamento, e τ_W é o tempo de Wigner.

2.6.2.2 Tempo de Wigner

O tempo de Wigner é definido como:

$$\tau_W(E) = -\frac{i}{N} \text{Tr} \left(S^\dagger \frac{\partial S}{\partial E} \right) = \frac{1}{N} \text{Tr} Q. \quad (2.101)$$

Um aspecto importante por trás do conceito do tempo de retardo é sua ligação com as propriedades espectrais de sistemas abertos com espectro contínuo. A conexão entre propriedades espectrais e de espalhamento [56][22][57] estabelece a relação (unidimensional)

$$\int_0^L dx |\psi_E(x)|^2 = \frac{1}{2\pi} \left(\tau_W(E) + \frac{\text{sen } \delta_e(E)}{2E} \right). \quad (2.102)$$

O lado esquerdo da equação acima está relacionada à densidade de estados local (DoS)

$$\langle x | \delta(E - H) | x \rangle = |\psi_E(x)|^2. \quad (2.103)$$

Desta maneira, a equação (2.102) mostra que o tempo de Wigner fornece uma medida do DoS no intervalo $[0, L]$ e pode ser escrita na forma mais geral [58]

$$\rho(E) = \int_0^L dx \rho(x, E) = \frac{1}{2i\pi} \text{Tr} \left(S^\dagger \frac{\partial S}{\partial E} + \frac{S - S^\dagger}{4E} \right), \quad (2.104)$$

que também se aplica a situações mais gerais. Essas igualdades são conhecidas como relações de Krein-Friedel [59] [56]. Em regime metálico, podemos negligenciar o termo $\text{Tr}(S - S^\dagger)/4E$ e reescrever a equação (2.104) como

$$\rho(E) \approx \frac{1}{2i\pi} \text{Tr} \left(S^\dagger \frac{\partial S}{\partial E} \right) = \frac{1}{2\pi\hbar} \text{Tr} Q, \quad (2.105)$$

tornando evidente a relação e a importância do tempo de Wigner. Essas relações foram ferramentas cruciais, usadas por Büttiker, para descrever as propriedades de *screening* [54] [53].

Em particular, de (2.105), a média de τ_W sobre uma janela estreita de energia é

$$\langle \tau_W \rangle = \frac{2\pi\hbar}{N} \bar{\rho} \quad (2.106)$$

na qual $\bar{\rho}$ é a média da densidade em torno de E . De (2.106) determina-se a escala de tempo fundamental de sistemas quânticos, o tempo de Heisenberg

$$\tau_H = 2\pi\hbar\bar{\rho} = \frac{2\pi\hbar}{\Delta}. \quad (2.107)$$

Sendo assim, concluímos que a média do tempo de Wigner, em unidades do tempo de Heisenberg, é

$$\langle \tau_W \rangle = \frac{\tau_H}{N}. \quad (2.108)$$

2.6.2.3 Comentários

Em contraste com as estatísticas de espalhamento, apenas alguns resultados para os momentos e cumulantes das estatísticas lineares do tempo próprio existem na literatura.

Um método para determinação sistemática dos cumulantes do tempo de Wigner foi proposto por Mezzadri e Simm [30], para todas as classes de simetria e qualquer número de canais abertos, usando uma equação diferencial não linear para sua função geratriz. Os autores apresentaram explicitamente os quatro primeiros cumulantes.

Expressões para a média do tempo de Wigner e o momento generalizado da matriz de tempo de retardo,

$$\mathcal{M}_{n_1, n_2, \dots} = \frac{1}{N} \text{Tr} Q^{n_1} \frac{1}{N} \text{Tr} Q^{n_2} \dots, \quad (2.109)$$

foram dadas por Novaes [27] usando matrizes aleatórias, mas apenas para $\beta = 2$.

Capítulo 3

Estatísticas Lineares da Matriz de Tempo de Retardo

Utilizando Teoria de Matrizes Aleatórias, Novaes em [27] apresentou estatísticas lineares nos autovalores da matriz de tempo de retardo e estendeu seus resultados às médias dos momentos generalizados, uma estatística não linear. O método utilizado conseguiu resultados gerais e compactos, mas restritos à classe de simetria $\beta = 2$. Neste capítulo, baseados no trabalho de Macêdo e Macedo [35], apresentaremos resultados para as três classes de simetria de Dyson. Também demonstraremos que esses resultados são equivalentes aos de Novaes.

3.1 Introdução

Um conceito útil para caracterizar os aspectos temporais do processo de espalhamento é o tempo de retardo, presente na matriz de Wigner-Smith (1.5) [22, 55]. Seus autovalores são os *tempos próprios* τ_1, \dots, τ_N e seu traço normalizado é o tempo de Wigner (1.6). Essas quantidades contêm informações sobre o tempo que uma partícula passa dentro da região de espalhamento e a distribuição conjunta do inverso dos tempos próprios, $\gamma_i = 1/\tau_i$, é dada pelo Ensemble de Laguerre (2.94) [26].

A distribuição (2.94) pode ser resolvida através da técnica de polinômios ortogonais [3] para determinar a densidade dos autovalores [26]:

$$\rho_N(\gamma) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{L_n^{(N)}(\gamma)^2 \omega(\gamma) n!}{(N+n)!}. \quad (3.1)$$

onde $L_n^{(N)}$ é o polinômio de Laguerre generalizado [60]. Substituindo $\gamma = 1/\tau$, aplicando o jacobiano $1/\tau^2$ e normalizando, obtemos o densidade dos tempos próprios:

$$\rho_N(\tau) = \frac{1}{N\tau^2} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{L_n^{(N)}(1/\tau)^2 \omega(1/\tau) n!}{(N+n)!}. \quad (3.2)$$

Apesar da distribuição para os tempos próprios ser conhecida, as propriedades estatísticas da sua soma, o tempo de Wigner, continuam desconhecidas. Apenas as distribuições para um e dois canais foram deduzidas em [28] e [29], respectivamente

$$\rho_1^{(\beta)}(\tau) = \frac{(\beta/2)^{\beta/2}}{\Gamma(\beta/2)} \tau^{-2-\beta/2} e^{-\beta/(2\tau)} \quad (3.3)$$

e

$$\rho_2^{(\beta)}(\tau) = \frac{\beta^{3\beta+2} \Gamma(3(\beta+1)/2)}{\Gamma(\beta+1) \Gamma(3\beta+2)} \tau^{-3(\beta+1)} U\left(\frac{\beta+1}{2}, 2(\beta+1); \beta/\tau\right) e^{-\beta/\tau}, \quad (3.4)$$

onde $U(a, b; z)$ é a função de Kummer, também conhecida como função hipergeométrica confluyente ${}_1F_1$ (2.40).

Resultados para as estatísticas lineares da matriz de tempo de retardo, para todas as classes de simetria e qualquer número de canais abertos, foram demonstrados por Mezzadri e Simm em [30] utilizando um método para determinação sistemática dos cumulantes

do tempo de Wigner. Os autores forneceram explicitamente os quatro primeiros cumulantes:

$$\langle \tau_W \rangle_c = \frac{\tau_H}{N} \quad (3.5a)$$

$$\langle \tau_W^2 \rangle_c = \frac{4 \tau_H^2}{N^2(N+1)(N\beta-2)} \quad (3.5b)$$

$$\langle \tau_W^3 \rangle_c = \frac{96 \tau_H^3}{N^3(N+2)(N+1)(N\beta-2)(N\beta-4)} \quad (3.5c)$$

$$\langle \tau_W^4 \rangle_c = \begin{cases} \frac{96(53N^2-68N-156)\tau_H^4}{N^4(N+3)(N+2)(N+1)^2(N-2)^2(N-4)(N-6)} & ; \beta = 1 \\ \frac{12(53N^2-77)\tau_H^4}{N^4(N+3)(N+2)(N+1)^2(N-1)^2(N-2)(N-3)} & ; \beta = 2 \\ \frac{12(53N^2+34N-39)\tau_H^4}{N^4(N+3)(N+2)(N+1)^2(2N-1)^2(N-1)(2N-3)} & ; \beta = 4 \end{cases} \quad (3.5d)$$

O método apresentado usa uma equação diferencial não linear como função geratriz e a complexidade dos resultados cresce com N .

Novaes em [27], usando TMA, calculou expressões gerais e compactas para a média do tempo de Wigner (observe que para $n = 1$ temos $\langle \tau_W \rangle = \tau_D$)

$$\langle \tau_W^n \rangle = \frac{\tau_D^n}{n!} \sum_{\lambda \vdash n} d_\lambda^2 \frac{[N]^\lambda}{[N]_\lambda} \quad (3.6)$$

e para a média dos momentos

$$\langle \mathcal{M}_n \rangle = \tau_D^n \frac{N^{n-1}}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \frac{[N-k]^n}{[N+k]_n}, \quad (3.7)$$

válidas apenas para $\beta = 2$. Diferente dos resultados de Mezzadri e Simm, a complexidade dos resultados de Novaes cresce com n , o peso da partição λ usada como parâmetro. Ele também demonstrou solução para momentos generalizados, uma estatística não linear do tipo

$$\langle \mathcal{M}_{n_1, n_2, \dots} \rangle = \left\langle \frac{1}{N} \text{Tr} Q^{n_1} \frac{1}{N} \text{Tr} Q^{n_2} \dots \right\rangle = \langle \mathcal{M}_{n_1} \mathcal{M}_{n_2} \dots \rangle. \quad (3.8)$$

Neste capítulo estudaremos as estatísticas lineares e o momento generalizado. No próximo analisaremos a estatística não linear do permanente.

Na seção seguinte desenvolveremos um método válido para qualquer β com complexidade crescendo apenas com o comprimento do parâmetro de partição $\ell(\lambda) = n$ e apropriado à implementação computacional.

3.2 Método da Função Geratriz Hipergeométrica

Inicialmente estamos interessados em quantidades do tipo (3.8), que estão relacionadas com as somas de potências da seguinte maneira

$$\mathcal{M}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots} = \frac{1}{N^{\ell(\lambda)}} p_\lambda(Q) = \frac{1}{N} p_{\lambda_1}(Q) \frac{1}{N} p_{\lambda_2}(Q) \dots, \quad (3.9)$$

na qual $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots]$ é uma partição de algum inteiro $|\lambda|$.

Podemos expandir os p_{λ_i} na base de funções simétricas elementares a partir da relação de recorrência [38]

$$p_{[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k]} = p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \dots p_{\lambda_k} = \prod_{i=1}^k p_{\lambda_i} \quad (3.10)$$

$$p_{\lambda_i} = (-1)^{\lambda_i-1} \lambda_i e_{\lambda_i} + \sum_{m=1}^{\lambda_i-1} (-1)^{m-1} p_{\lambda_i-m} e_m.$$

E as funções simétricas elementares podem ser obtidas a partir da função geratriz

$$\prod_{i=1}^N (t - x_i) = \sum_{j=0}^N (-1)^j e_j t^{N-j} \quad (3.11)$$

$$= \sum_{j=0}^N (-1)^{N-j} e_{N-j} t^j.$$

A segunda forma acima é particularmente útil. O fator $(-1)^N$ pode ser eliminado, resultando em

$$Z(t) = \prod_{i=1}^N (x_i - t) = \sum_{j=1}^N (-1)^j e_{N-j} t^j. \quad (3.12)$$

Assim, a função simétrica pode ser determinada por

$$e_{N-j} = \frac{(-1)^j}{j!} \left. \frac{d^j}{dt^j} Z(t) \right|_{t=0}. \quad (3.13)$$

A partir de (3.12) podemos deduzir que o produto de funções simétricas elementares é gerador por

$$\begin{aligned} Z(\vec{t}) &= \prod_{i=1}^N \prod_{k=1}^M (x_i - t_k) = \prod_{k=1}^M \prod_{j_k=1}^N (-1)^{j_k} e_{N-j_k} t_k^{j_k} \\ &= \sum_{j_1} \cdots \sum_{j_M} (-1)^{j_1+\cdots+j_M} e_{N-j_1} \cdots e_{N-j_M} t_1^{j_1} \cdots t_M^{j_M} \end{aligned} \quad (3.14)$$

e de (3.13) que o produto das funções simétricas elementares pode ser escrito como

$$e_{N-j_1} \cdots e_{N-j_M} = \frac{(-1)^{j_1+\cdots+j_M}}{j_1! \cdots j_M!} \frac{\partial^{j_1+\cdots+j_M}}{\partial t_1^{j_1} \cdots \partial t_M^{j_M}} Z(\vec{t}) \Big|_{\vec{t}=0}. \quad (3.15)$$

Dessa maneira, a média de um produto de funções simétricas elementares num ensemble é

$$\langle e_{N-j_1} \cdots e_{N-j_M} \rangle = \frac{(-1)^{j_1+\cdots+j_M}}{j_1! \cdots j_M!} \frac{\partial^{j_1+\cdots+j_M}}{\partial t_1^{j_1} \cdots \partial t_M^{j_M}} \Psi(\vec{t}) \Big|_{\vec{t}=0} \quad (3.16)$$

onde

$$\Psi(\vec{t}) = \left\langle \prod_{i=1}^N \prod_{k=1}^M (x_i - t_k) \right\rangle. \quad (3.17)$$

A equação (3.17) pode ser escrita em termos da função hipergeométrica. Como ponto de partida, considere o resultado de Kaneko (2.47, 2.49) (usaremos a notação de Kaneko):

$$\begin{aligned} &\int_0^1 d^N x \prod_{i=1}^N \prod_{k=1}^M (x_i - t_k) \prod_{i<j} |x_i - x_j|^\lambda \prod_{i=1}^N x_i^{\lambda_1} (1-x_i)^{\lambda_2} \\ &= S_N(\lambda_1 + M, \lambda_2, \lambda) \times \\ &\quad \times {}_2F_1\left(\frac{\lambda}{2}\right) \left(-N, \frac{2}{\lambda}(\lambda_1 + \lambda_2 + M + 1) + N - 1; \frac{2}{\lambda}(\lambda_1 + M); \vec{t} \right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Seguindo os passos da seção 2.5.2 chegamos ao seguinte resultado para a média no Ensemble de Laguerre (2.63)

$$\left\langle \prod_{i=1}^N \prod_{k=1}^M (x_i - t_k) \right\rangle = \frac{Z_N(\lambda_1 + M, \beta)}{Z_N(\lambda_1, \beta)} {}_1F_1\left(\frac{\beta}{2}\right) \left(-N; \frac{2}{\beta}(\lambda_1 + M); t_1, \dots, t_M \right) \quad (3.19)$$

mostrando que, em termos da função hipergeométrica, a função geratriz (3.17) é

$$\Psi(\vec{t}) = \frac{Z_N(\lambda_1 + M, \beta)}{Z_N(\lambda_1, \beta)} {}_1F_1\left(\frac{\beta}{2}\right) \left(-N; \frac{2}{\beta}(\lambda_1 + M); t_1, \dots, t_M\right). \quad (3.20)$$

Agora precisamos adaptar o resultado (3.16) para calcular a média do produto das funções simétricas elementares sobre os inversos das variáveis. Para isso, considere a identidade [19, p. 168]:

$$e_m(x^{-1}) = \frac{1}{x_1 \cdots x_N} e_{N-m}(x). \quad (3.21)$$

Com ela, o produto das funções simétricas elementares nos inversos das variáveis pode ser dado por

$$e_{j_1}(x^{-1})e_{j_2}(x^{-1}) \cdots e_{j_M}(x^{-1}) = \frac{1}{(x_1 \cdots x_N)^M} e_{N-j_1}(x)e_{N-j_2}(x) \cdots e_{N-j_M}(x). \quad (3.22)$$

Para calcularmos a média desse novo produto, incorporamos o termo $1/(x_1 \cdots x_N)^M$ ao produtório do Ensemble de Laguerre (2.54)

$$\frac{1}{Z_N(\lambda_1, \beta)} \prod_{i < j} |x_i - x_j|^\beta \prod_{i=1}^N x_i^{\lambda_1 - M} e^{-\frac{\beta}{2}x_i}. \quad (3.23)$$

Com isso podemos usar o resultado (3.16) no limite $\lambda_1 \rightarrow \lambda_1 - M$ para determinar a média do produto das funções simétricas elementares nos inversos das variáveis no Ensemble de Laguerre:

$$\begin{aligned} \langle e_{j_1}(x^{-1})e_{j_2}(x^{-1}) \cdots e_{j_M}(x^{-1}) \rangle \\ = \frac{Z_N(\lambda_1 - M, \beta)}{Z_N(\lambda_1, \beta)} \langle e_{N-j_1}(x)e_{N-j_2}(x) \cdots e_{N-j_M}(x) \rangle \Big|_{\lambda_1 \rightarrow \lambda_1 - M}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Como ilustração, antes de generalizarmos, vamos analisar o caso particular $\langle e_1(x^{-1}) \rangle$ como exemplo da aplicação de (3.24) (em unidades do tempo de Heisenberg $t \rightarrow \tau_H t$)

$$\begin{aligned} \langle e_1(x^{-1}) \rangle &= \frac{Z_N(\lambda_1 - 1, \beta)}{Z_N(\lambda_1, \beta)} \langle e_{N-1}(x) \rangle \Big|_{\lambda_1 \rightarrow \lambda_1 - 1} \\ &= \frac{Z_N(\lambda_1 - 1, \beta)}{Z_N(\lambda_1, \beta)} \left(-\frac{\partial}{\partial t} \Psi(t) \Big|_{t=0} \right) \Big|_{\lambda_1 \rightarrow \lambda_1 - 1} \\ &= \frac{Z_N(\lambda_1 - 1, \beta)}{Z_N(\lambda_1, \beta)} \left[-\frac{\partial}{\partial t} \frac{Z_N(\lambda_1 + 1, \beta)}{Z_N(\lambda_1, \beta)} {}_1F_1 \left(-N; \frac{2}{\beta}(\lambda_1 + 1); \tau_H t \right) \Big|_{t=0} \right] \Big|_{\lambda_1 \rightarrow \lambda_1 - 1}. \end{aligned}$$

Sabendo que a função hipergeométrica confluyente tem série

$${}_1F_1(a; c; t) = 1 + \frac{a}{c}t + \dots$$

e usando a parametrização do tempo de retardo (2.94), $\lambda_1 = N\beta/2$, concluímos nosso exemplo com

$$\begin{aligned} \langle e_1(x^{-1}) \rangle &= \frac{N}{\frac{2}{\beta}\lambda_1} \tau_H \\ \langle e_1(x^{-1}) \rangle &= \tau_H. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Seguindo com a generalização, mantendo a parametrização do tempo de retardo, percebendo que as constantes Z_N se anulam ao aplicarmos o limite $\lambda_1 \rightarrow \lambda_1 - M$ e usando a identidade (2.37c), criamos uma nova função geratriz

$$\begin{aligned} \psi(t_1, \dots, t_M) &= {}_1F_1\left(\frac{\beta}{2}\right)(-N; N; \tau_H t_1, \dots, \tau_H t_M) \\ &= \sum_{\kappa} \frac{[-N]_{\kappa}^{(\alpha)} \tau_H^{|\kappa|}}{[N]_{\kappa}^{(\alpha)} |\kappa|!} C_{\kappa}^{(\alpha)}(t_1, \dots, t_M). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Os polinômios de Jack, por sua vez, podem ser escritos em termos de funções monomiais simétricas (2.29)

$$C_{\kappa}^{(\alpha)} = \sum_{\lambda \leq \kappa} v_{\kappa, \lambda}^{(\alpha)} m_{\lambda}. \quad (3.27)$$

onde o somatório corre sobre todas as partições λ com mesmo peso que κ ($|\kappa| = |\lambda|$) e menores ou igual a κ ($\lambda \leq \kappa$). Sendo assim, a nova função geratriz passa a ser dada por

$$\psi(\vec{t}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\kappa \vdash n} \sum_{\lambda \leq \kappa} \frac{\gamma_{\kappa}^{(\alpha)}}{|\kappa|!} v_{\kappa, \lambda}^{(\alpha)} m_{\lambda}(\vec{t}) \quad (3.28)$$

onde definimos

$$\gamma_{\kappa}^{(\alpha)} \equiv \frac{[-N]_{\kappa}^{(\alpha)}}{[N]_{\kappa}^{(\alpha)}} \tau_H^{|\kappa|}. \quad (3.29)$$

Com as conclusões da generalização e usando (3.16, 3.28), temos que a média (3.24) pode ser reescrita como

$$\langle e_{j_1}(x^{-1}) e_{j_2}(x^{-1}) \cdots e_{j_M}(x^{-1}) \rangle = \frac{(-1)^{j_1 + \dots + j_M}}{j_1! \cdots j_M!} \frac{\partial^{j_1 + \dots + j_M}}{\partial t_1^{j_1} \cdots \partial t_M^{j_M}} \psi(\vec{t}) \Big|_{\vec{t}=0}. \quad (3.30)$$

Percebendo que as derivadas acima irão anular qualquer termo de (3.28) em que $\lambda \neq [j_1, \dots, j_M]$, ficamos apenas com as partições κ maiores ou iguais a $\lambda = [j_1, \dots, j_M]$. Calculando as derivadas da função monomial em λ

$$\left. \frac{\partial^{|\lambda|}}{\partial t_1^{j_1} \dots \partial t_M^{j_M}} m_\lambda(\vec{t}) \right|_{\vec{t}=0} = j_1! \dots j_M! \quad (3.31)$$

cancelamos os fatoriais no quociente de (3.30).

Finalmente, chegamos ao principal resultado do nosso trabalho, uma equação para a média de funções simétricas elementares nos inversos das variáveis no Ensemble de Laguerre:

$$\langle e_\lambda \rangle = \frac{(-1)^{|\lambda|}}{|\lambda|!} \sum_{\kappa \geq \lambda} \gamma_\kappa^{(\alpha)} v_{\kappa, \lambda}^{(\alpha)}. \quad (3.32)$$

Como uma aplicação do método, nós criamos rotinas no Maple para calcular o valor médio de quantidades polinomiais como os momentos (3.7)

$$\langle \mathcal{M}_\lambda \rangle = \frac{1}{N^{\ell(\lambda)}} \langle p_\lambda(Q) \rangle \quad (3.33)$$

os momentos generalizados (3.8)

$$\langle \mathcal{M}_{n_1, n_2, \dots} \rangle = \frac{1}{N^{\ell(\lambda)}} \langle p_{n_1}(Q) p_{n_2}(Q) \dots \rangle = \frac{1}{N^{\ell(\lambda)}} \langle \text{Tr } Q^{n_1} \text{Tr } Q^{n_2} \dots \rangle \quad (3.34)$$

ou qualquer cumulante do tempo de Wigner (3.5a) através da relação de recorrência

$$\langle \tau_W^n \rangle_c = \langle \mathcal{M}_{1^n} \rangle - \sum_{m=1}^{n-1} \binom{n-1}{m-1} \langle \tau_W^m \rangle_c \langle \mathcal{M}_{1^{n-m}} \rangle, \quad (3.35)$$

para qualquer classe de simetria β .

As rotinas expandem essas quantidades em termos de funções simétricas elementares usando a relação de recorrência (2.22) e, em seguida, aplicam a equação (3.32) nas expressões resultantes.

A seguir estão alguns exemplos de resultados particulares, calculados com o auxílio da biblioteca Maple (apêndice A) que desenvolvemos.

Exemplo 1: *Momentos*

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{M}_1 \rangle &= \frac{\tau_H}{N} \\
\langle \mathcal{M}_2 \rangle &= \frac{2\tau_H^2 \beta}{(N\beta - 2)(N + 1)} \\
\langle \mathcal{M}_3 \rangle &= \frac{6N\tau_H^3 \beta^2}{(N\beta - 4)(N\beta - 2)(N + 2)(N + 1)} \\
\langle \mathcal{M}_4 \rangle &= \frac{2(11N^2\beta + 13N\beta - 26N + 2)N\tau_H^4 \beta^3}{(N\beta - 6)(N\beta - 4)(N\beta + \beta - 2)(N\beta - 2)(N + 3)(N + 2)(N + 1)}
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Exemplo 2: *Momentos Generalizados*

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{M}_{1,1} \rangle &= \frac{(N^2\beta + N\beta - 2N + 2)\tau_H^2}{N^2(N\beta - 2)(N + 1)} \\
\langle \mathcal{M}_{2,1} \rangle &= \frac{2(N^2\beta + 2N\beta - 4N + 4)\tau_H^3 \beta}{N(N\beta - 4)(N\beta - 2)(N + 2)(N + 1)} \\
\langle \mathcal{M}_{1,1,1} \rangle &= \frac{(N^4\beta^2 + 3N^3\beta^2 - 6N^3\beta + 2N^2\beta^2 - 6N^2\beta + 8N^2 + 12N\beta - 24N + 16)\tau_H^3}{N^3(N\beta - 4)(N\beta - 2)(N + 2)(N + 1)}
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Exemplo 3: *Cumulantes do Tempo de Wigner*

$$\begin{aligned}
\langle \tau_W^1 \rangle_c &= \frac{\tau_H}{N} \\
\langle \tau_W^2 \rangle_c &= \frac{4\tau_H^2}{N^2(N\beta - 2)(N + 1)} \\
\langle \tau_W^3 \rangle_c &= \frac{96\tau_H^3}{N^3(N\beta - 4)(N\beta - 2)(N + 2)(N + 1)} \\
\langle \tau_W^4 \rangle_c &= \frac{96\tau_H^4(53N^3\beta^2 + 121N^2\beta^2 - 242N^2\beta + 66N\beta^2 - 418N\beta + 264N - 156\beta + 312)}{N^4(N\beta - 6)(N\beta - 4)(N\beta + \beta - 2)(N\beta - 2)^2(N + 3)(N + 2)(N + 1)^2}
\end{aligned} \tag{3.38}$$

3.3 Fórmula Geral da Média para $\beta = 2$ **3.3.1 Tempo de Wigner**

Aqui mostraremos que nossos resultados implicam uma expressão para a média do tempo de Wigner e também que essa expressão é equivalente à encontrada por Novaes em [27].

A media do tempo de Wigner, em termos de soma de potências, é definida como

$$\langle \tau_W^n \rangle = \frac{1}{N^n} \langle p_{[1^n]}(Q) \rangle, \quad (3.39)$$

que pode ser reescrita na base de funções simétricas elementares (note que $\lambda = [1^n]$)

$$\langle \tau_W^n \rangle = \frac{1}{N^n} \langle [e_1(Q)]^n \rangle. \quad (3.40)$$

Usando a equação (3.32) para as médias dos monômios das funções simétricas elementares em (3.40) (aqui trocamos κ por λ para seguir a notação usada por Novaes):

$$\begin{aligned} \langle \tau_W^n \rangle &= \frac{1}{n!} \left(\frac{-\tau_H}{N} \right)^n \sum_{\lambda \vdash n} \frac{[-N]_{(\alpha)}^\lambda}{[N]_{(\alpha)}^\lambda} v_{\lambda, [1^n]}^{(\alpha)} \\ &= (-1)^n n! \left(\frac{\tau_H \alpha}{N} \right)^n \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{j_\lambda^{(\alpha)}} \frac{[-N]_{(\alpha)}^\lambda}{[N]_{(\alpha)}^\lambda}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

onde $[x]_{(\alpha)}^\lambda$ é a generalização do *rising factorial* e de [40] usamos

$$j_\lambda^{(\alpha)} = 2^n n!^2 \sum_{\mu \vdash |\lambda|} \frac{2^{r(\mu)}}{z_\mu} \left(\theta_\lambda^{(\alpha)}(\mu) \right)^2 = \begin{cases} |\lambda|!^2 / d_\lambda^2, & \text{se } \alpha = 1; \\ |2\lambda|!^2 / d_{2\lambda}, & \text{se } \alpha = 2. \end{cases} \quad (3.42)$$

Substituindo (3.42) em (3.41) e fazendo $\alpha = 1$ ($\beta = 2$)

$$\langle \tau_W^n \rangle = (-1)^n n! \frac{\tau_H^n}{N^n} \sum_{\lambda \vdash n} \frac{d_\lambda^2}{|\lambda|!^2} \frac{[-N]_{(1)}^\lambda}{[N]_{(1)}^\lambda} \quad (3.43)$$

$$= (-1)^n \frac{1}{N^n} \frac{\tau_H^n}{n!} \sum_{\lambda \vdash n} d_\lambda^2 \frac{[-N]^\lambda}{[N]^\lambda}. \quad (3.44)$$

Percebendo que

$$\begin{aligned}
 (-1)^n [-N]_{(\alpha)}^\lambda &= (-1)^n \prod_{i=1}^{l(\lambda)} \left[-N - \frac{i-1}{\alpha} \right]^{\lambda_i} \\
 &= \prod_{i=1}^{l(\lambda)} (-1)^{\lambda_i} \prod_{j=1}^{\lambda_i} \left(-N - \frac{i-1}{\alpha} + j - 1 \right) \\
 &= \prod_{i=1}^{l(\lambda)} \prod_{j=1}^{\lambda_i} (-1) \left(-N - \frac{i-1}{\alpha} + j - 1 \right) \\
 &= \prod_{i=1}^{l(\lambda)} \prod_{j=1}^{\lambda_i} \left(N + \frac{i-1}{\alpha} - j + 1 \right) \\
 &= [N]_{\lambda}^{(\alpha)},
 \end{aligned}$$

onde $[N]_{\lambda}^{(\alpha)}$ é a generalização do *lowering factorial*, encontramos a seguinte expressão compacta para a média do tempo de Wigner

$$\boxed{\langle \tau_W^n \rangle = \frac{1}{N^n} \frac{\tau_H^n}{n!} \sum_{\lambda \vdash n} d_{\lambda}^2 \frac{[N]_{\lambda}}{[N]_{\lambda}}}. \quad (3.45)$$

Esse último resultado é similar ao de Novaes:

$$\langle \tau_W^n \rangle = \frac{\tau_D^n}{n!} \sum_{\lambda \vdash n} d_{\lambda}^2 \frac{[N]_{\lambda}}{[N]_{\lambda}}. \quad (3.46)$$

As diferenças são o tempo de Heisenberg e a inversão da razão entre as generalizações dos *factorials*.

Nós mostraremos a seguir que, embora $\frac{[N]_\lambda}{[N]^\lambda} \neq \frac{[N]^\lambda}{[N]_\lambda}$, os somatórios são iguais. Ou seja $\sum_{\lambda \vdash n} \frac{[N]_\lambda}{[N]^\lambda} = \sum_{\lambda \vdash n} \frac{[N]^\lambda}{[N]_\lambda}$.

$$\begin{aligned}
 \sum_{\lambda \vdash n} \frac{[N]_\lambda}{[N]^\lambda} &= \sum_{\lambda \vdash n} \prod_{i=1}^{l(\lambda)} \prod_{j=1}^{\lambda_i} \frac{N+i-j}{N-i+j} \\
 &= \prod_{i=1}^1 \prod_{j=1}^n \frac{N+i-j}{N-i+j} + \cdots + \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^1 \frac{N+i-j}{N-i+j} \\
 &= \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^1 \frac{N+i-j}{N-i+j} + \cdots + \prod_{i=1}^1 \prod_{j=1}^n \frac{N+i-j}{N-i+j} \\
 &= \prod_{j=1}^1 \prod_{i=1}^n \frac{N-j+i}{N+j-i} + \cdots + \prod_{j=1}^n \prod_{i=1}^1 \frac{N-j+i}{N+j-i} \\
 &= \sum_{\lambda \vdash n} \prod_{j=1}^{l(\lambda)} \prod_{i=1}^{\lambda_j} \frac{N-j+i}{N+j-i} \\
 &= \sum_{\lambda \vdash n} \frac{[N]^\lambda}{[N]_\lambda} \quad Q.E.D
 \end{aligned}$$

Finalmente, usando o último resultado e a relação $\tau_H/N = \tau_D$, onde τ_D é o tempo de permanência clássico [27], em (3.45), obtemos

$$\langle \tau_W^n \rangle = \frac{1}{N^n} \frac{(N\tau_D)^n}{n!} \sum_{\lambda \vdash n} d_\lambda^2 \frac{[N]_\lambda}{[N]^\lambda} \quad (3.47)$$

$$= \boxed{\frac{\tau_D^n}{n!} \sum_{\lambda \vdash n} d_\lambda^2 \frac{[N]^\lambda}{[N]_\lambda}} \quad (3.48)$$

que é igual à (3.46), como queríamos demonstrar.

3.3.2 Momentos

Nossos resultados também implicam uma expressão para a média do momento equivalente à encontrada por Novaes (3.7).

Das identidades de Newton [38], temos (também poderíamos usar a relação de recorrência (2.22))

$$p_n = \det \begin{bmatrix} e_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2e_2 & e_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 3e_3 & e_2 & e_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ne_n & e_{n-1} & e_{n-2} & e_{n-3} & \dots & e_1 \end{bmatrix}, \quad (3.49)$$

de onde podemos ver que

$$\begin{aligned} p_1 &= e_1 \\ p_2 &= e_1^2 - 2e_2 \\ p_3 &= e_1^3 - 3e_1e_2 + 3e_3 \\ p_4 &= e_1^4 - 4e_1^2e_2 + 4e_1e_3 + 2e_2^2 - 4e_4 \\ p_5 &= e_1^5 - 5e_1^3e_2 + 5e_1^2e_3 + 5e_1e_2^2 - 5e_1e_4 - 5e_2e_3 + 5e_5 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Para calcular a média de cada soma de potências aplicamos a equação (3.32) sobre cada monômio dos polinômios acima:

$$\begin{aligned} \langle p_1 \rangle &= \langle e_1 \rangle \\ \langle p_2 \rangle &= \langle e_1^2 \rangle - 2\langle e_2 \rangle \\ \langle p_3 \rangle &= \langle e_1^3 \rangle - 3\langle e_1e_2 \rangle + 3\langle e_3 \rangle \\ \langle p_4 \rangle &= \langle e_1^4 \rangle - 4\langle e_1^2e_2 \rangle + 4\langle e_1e_3 \rangle + 2\langle e_2^2 \rangle - 4\langle e_4 \rangle \\ \langle p_5 \rangle &= \langle e_1^5 \rangle - 5\langle e_1^3e_2 \rangle + 5\langle e_1^2e_3 \rangle + 5\langle e_1e_2^2 \rangle - 5\langle e_1e_4 \rangle - 5\langle e_2e_3 \rangle + 5\langle e_5 \rangle \\ &\vdots \end{aligned}$$

Executando as médias (a seguir exibirei apenas o lado direito dessas expressões e não incluirei p_4 e p_5 porque as expressões são muito longas):

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^1}{1!} \gamma_1^\alpha v_{1,1}^\alpha \\ & \frac{(-1)^2}{2!} \left(\gamma_2^\alpha v_{2,[1^2]}^\alpha - 2 \gamma_2^\alpha v_{2,2}^\alpha + \gamma_{[1^2]}^\alpha v_{[1^2],[1^2]}^\alpha \right) \\ & \frac{(-1)^3}{3!} \left(\gamma_3^\alpha v_{3,[1^3]}^\alpha - 3 \gamma_3^\alpha v_{3,[2,1]}^\alpha + 3 \gamma_3^\alpha v_{3,3}^\alpha + \gamma_{[2,1]}^\alpha v_{[2,1],[1^3]}^\alpha - 3 \gamma_{[2,1]}^\alpha v_{[2,1],[2,1]}^\alpha + \gamma_{[1^3]}^\alpha v_{[1^3],[1^3]}^\alpha \right) \\ & \quad \vdots \end{aligned}$$

Agora, fazendo $\alpha = 1$ (equivalente a $\beta = 2$) e calculando os coeficientes $v_{\kappa,\lambda}^{(\alpha)}$ simplificamos as expressões:

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^1}{1!} (1\gamma_1) \\ & \frac{(-1)^2}{2!} (-1\gamma_1 + 1\gamma_{[1^2]}) \\ & \frac{(-1)^3}{3!} (1\gamma_3 - 2\gamma_{[2,1]} + 1\gamma_{[1^3]}) \\ & \frac{(-1)^4}{4!} (-1\gamma_4 + 3\gamma_{[3,1]} - 3\gamma_{[2,1^2]} + 1\gamma_{[1^4]}) \\ & \frac{(-1)^5}{5!} (1\gamma_5 - 4\gamma_{[4,1]} + 6\gamma_{[3,1^2]} - 4\gamma_{[2,1^3]} + 1\gamma_{[1^5]}) \\ & \quad \vdots \end{aligned}$$

Exibi apenas o lado direito das expressões para que fique evidente que os coeficientes dos γ formam um triangulo de Pascal com sinal alternante. Percebendo isso, podemos reescrever as expressões da seguinte forma (removi p_5):

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^1}{1!} \left((-1)^0 \binom{0}{0} \gamma_1 \right) \\ & \frac{(-1)^2}{2!} \left((-1)^1 \binom{1}{1} \gamma_2 + \binom{1}{0} (-1)^0 \gamma_{[1^2]} \right) \\ & \frac{(-1)^3}{3!} \left((-1)^2 \binom{2}{2} \gamma_3 + (-1)^1 \binom{2}{1} \gamma_{[2,1]} + (-1)^0 \binom{2}{0} \gamma_{[1^3]} \right) \\ & \frac{(-1)^4}{4!} \left((-1)^3 \binom{3}{3} \gamma_4 + (-1)^2 \binom{3}{2} \gamma_{[3,1]} + (-1)^1 \binom{3}{1} \gamma_{[2,1^2]} + (-1)^0 \binom{3}{0} \gamma_{[1^4]} \right) \\ & \quad \vdots \end{aligned}$$

Do padrão que surge e aproveitando o fato de termos apenas partições do tipo Hook $[n - k, 1^k]$, podemos escrever uma expressão generalizada para as médias:

$$\begin{aligned}
 \langle p_n \rangle &= \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \gamma_{[n-k, 1^k]} \\
 &= \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \frac{[-N]_{[n-k, 1^k]}}{[N]_{[n-k, 1^k]}} (N\tau_D)^{|[n-k, 1^k]|} \\
 &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \frac{[N]_{[n-k, 1^k]}}{[N]_{[n-k, 1^k]}} (N\tau_D)^n \\
 &= \frac{(N\tau_D)^n}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \frac{[N]_{[n-k, 1^k]}}{[N]_{[n-k, 1^k]}}
 \end{aligned}$$

A seguir demonstraremos que, para partições Hook, $\frac{[N]_{[n-k, 1^k]}}{[N]_{[n-k, 1^k]}} = \frac{[N+k]_n}{[N-k]_n}$, simplificando ainda mais a expressão encontrada acima:

$$\begin{aligned}
 \frac{[N]_\lambda}{[N]^\lambda} &= \frac{\prod_{i=1}^{k+1} [N+i-1]_{\lambda_i}}{\prod_{i=1}^{k+1} [N-i+1]_{\lambda_i}} && ; \lambda = [n-k, 1^k]; \ell(\lambda) = k+1 \\
 &= \frac{[N]_{n-k} [N+1]_1 \dots [N+k-1]_1 [N+k]_1}{[N]^{n-k} [N-1]_1 \dots [N-k+1]_1 [N-k]_1} \\
 &= \frac{[N]_{n-k} (N+1) \dots (N+k-1) (N+k)}{[N]^{n-k} (N-1) \dots (N-k+1) (N-k)}.
 \end{aligned}$$

Abaixo expandirei o primeiro termo do produto acima:

$$\frac{[N]_{n-k}}{[N]^{n-k}} = \frac{N(N-1) \dots (N-n+k+2)(N-n+k+1)}{N(N+1) \dots (N+n-k-2)(N+n-k-1)}.$$

Substituindo a expansão no produto:

$$\begin{aligned}
 \frac{[N]_\lambda}{[N]^\lambda} &= \frac{(N+k)(N+k-1) \dots (N+k-n+2)(N+k-n+1)}{(N-k)(N-k+1) \dots (N-k+n-2)(N-k+n-1)} \\
 &= \frac{[N+k]_n}{[N-k]_n} \quad Q.E.D.
 \end{aligned}$$

O cancelamento de termos entre o numerador e denominador nos dá a expressão acima. O numerador e denominador são a definição do *lowering* e *rising factorial* de $N+k$ e $N-k$ em n termos, respectivamente.

Também demonstraremos que $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{[N-k]_n^n}{[N+k]_n^n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{[N+k]_n^n}{[N-k]_n^n}$ (interessante perceber como o N percorre os produtos):

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{[N-k]_n^n}{[N+k]_n^n} &= \frac{N(N+1)\dots(N-1+n-1)(N+n-1)}{N(N-1)\dots(N+1-n+1)(N-n+1)} & k=0 \\
 &+ \frac{(N-1)N\dots(N-1+n-1)}{(N+1)N\dots(N+1-n+1)} & k=1 \\
 &+ \dots \\
 &+ \frac{(N+1-n+1)\dots N(N+1)}{(N-1+n-1)\dots N(N-1)} & k=n-2 \\
 &+ \frac{(N-n+1)(N+1-n+1)\dots(N-1)N}{(N+n-1)(N-1+n-1)\dots(N+1)N} & k=n-1 \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{[N+k]_n^n}{[N-k]_n^n} \quad Q.E.D.
 \end{aligned}$$

Perceba que ao alterar a ordem dos termos do somatório e, também, do produtório em cada termo obtemos exatamente a expansão de $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{[N+k]_n^n}{[N-k]_n^n}$. Sendo assim, podemos escrever a expressão generalizada da média $\langle p_n \rangle$ como:

$$\langle p_n \rangle = \frac{(N\tau_D)^n}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \frac{[N-k]_n^n}{[N+k]_n^n}. \quad (3.50)$$

Utilizando a equação (3.33) com esta última (3.50), temos que a média do momento $\langle \mathcal{M}_n \rangle$ é dada por

$$\boxed{\langle \mathcal{M}_n \rangle = \tau_D^n \frac{N^{n-1}}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \frac{[N-k]_n^n}{[N+k]_n^n}}, \quad (3.51)$$

que é exatamente a equação encontrada por Novaes em seu artigo [27], através de um método diferente.

3.4 Conclusões

O trabalho que nos chamou atenção para o problema do tempo de retardo foi o artigo de Novaes [27]. Nele foram obtidos resultados compactos para quantidades de interesse, mas apenas para $\beta = 2$.

Pesquisando a literatura em busca de resultados semelhantes, encontramos o artigo de Mezzadri e Simm [30] no qual os autores derivam uma equação diferencial não linear que caracteriza a função geratriz dos cumulantes do tempo de Wigner, para todas as classes de simetria de Wigner-Dyson. No entanto, além de utilizarem um método não usual, os resultados possuem complexidade que cresce com N , o número de variáveis de integração.

O resultado de Novaes não possui esse problema, com complexidade crescendo apenas com o comprimento do parâmetro de partição $\ell(\lambda) = n$.

Buscando uma solução com as qualidades dos dois métodos, adaptamos a abordagem desenvolvida por Macêdo e Macedo em [35], onde as estatísticas de contagem de carga no transporte quântico utilizam uma função geratriz hipergeométrica.

Dessa maneira, alcançamos o objetivo pretendido de estabelecer um método para calcular médias de quantidades envolvendo os autovalores da matriz de tempo de retardo, o qual é válido para qualquer β com complexidade crescendo com n e apropriado à implementação computacional. Uma biblioteca Maple foi escrita implementando o método e usada neste trabalho.

Capítulo 4

Estatísticas Não Lineares da Matriz de Tempo de Retardo

Em [36] Luque e Vivo apresentaram estatísticas não lineares dos permanentes nos autovalores de matrizes aleatórias invariantes, com resultados específicos para o ensemble de Jacobi para as três classes de simetrias de Dyson. De maneira semelhante, apresentaremos os resultados para o ensemble de Laguerre nos inversos dos autovalores, ou seja, as estatísticas não lineares para os autovalores das matrizes de tempo de retardo. Com a equação (4.8) de Luque e Vivo, encontrada em termos de hiperdeterminantes para $\beta = 2$, obtivemos uma fórmula geral (4.11) a partir da qual derivamos casos particulares (4.12, 4.13). Utilizando o método da função geratriz hipergeométrica, determinado no capítulo 3, derivamos na seção 4.3 resultados para qualquer β com o auxílio da biblioteca TDP.

4.1 Introdução

Brower, Frahm e Beenakker em [26] mostraram que, para cavidades caóticas com pontos de contato ideais, os inversos dos autovalores da matriz de tempo de retardo de Wigner-Smith (1.5) [22, 55] estão distribuídos de acordo com o Ensemble de Laguerre (2.94).

Resultados para as médias e cumulantes de estatísticas lineares dos tempos próprios já existem. Um método para determinação sistemática dos cumulantes do tempo de

Wigner

$$\tau_W = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tau_i \quad (4.1)$$

foi proposto por Mezzadri e Simm em [61] para todas as classes de simetria e qualquer número de canais abertos, usando uma equação diferencial não linear como função geratriz. Os autores forneceram explicitamente os quatro primeiros cumulantes.

Expressões para as médias do tempo de Wigner e dos momentos generalizados da matriz de tempo de retardo

$$\mathcal{M}_{n_1, n_2, \dots} = \frac{1}{N} \text{Tr} Q^{n_1} \frac{1}{N} \text{Tr} Q^{n_2} \dots \quad (4.2)$$

foram dadas por Novaes em [27] utilizando matrizes aleatórias, mas apenas para $\beta = 2$.

Na seção 3.2 nós definimos, usando resultados de Kaneko [21] e de Macêdo e Macedo [35], o método da função geratriz hipergeométrica que permite o cálculo da média de qualquer estatística linear envolvendo os autovalores da matriz de tempo de retardo, incluindo o tempo de Wigner, os momentos generalizados e os cumulantes do tempo de Wigner, para as três classes de simetria e qualquer número de canais abertos. Aqui, para obter as médias de estatísticas não lineares, estenderemos esse trabalho utilizando seu resultado principal (3.32)

$$\langle e_\lambda(x^{-1}) \rangle = \frac{1}{|\lambda|!} \sum_{\kappa \geq \lambda} \gamma_\kappa^{(\alpha)} v_{\kappa, \lambda}^{(\alpha)} \quad (4.3)$$

$$\gamma_\kappa^{(\alpha)} = \tau_H^{|\kappa|} \frac{[N]_\kappa^{(\alpha)}}{[N]_{(\alpha)}^\kappa}$$

no qual $v_{\kappa, \lambda}^{(\alpha)}$ são os coeficiente do polinômio de Jack, τ_H é o tempo de Heisenberg. $[N]_\kappa^{(\alpha)}$ e $[N]_{(\alpha)}^\kappa$ são generalizações do *falling* e do *rising shifted factorials* [21], respectivamente

$$[N]_\kappa^{(\alpha)} = \prod_{i=1}^{\ell(\kappa)} \left[N + \frac{i-1}{\alpha} \right]_{\kappa_i}$$

$$[N]_{(\alpha)}^\kappa = \prod_{i=1}^{\ell(\kappa)} \left[N - \frac{i-1}{\alpha} \right]^{\kappa_i}.$$

O último também é conhecido como o símbolo de Pochhammer generalizado [42].

Como em [36], usaremos a estatística dos permanentes, definida por quantidades do tipo

$$\mathcal{T} = \text{perm}(\Psi) := \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_N} \prod_{i=1}^N \psi_{\pi(i)}(\gamma_i) \quad (4.4)$$

onde \mathfrak{S}_N é o grupo simétrico e o somatório corre sobre as permutações π dos primeiros N inteiros, $\{\psi_i(x)\}$ é um conjunto de N funções escolhidas e Ψ é uma matriz $N \times N$ com elementos $(\psi_i(\gamma_j))_{1 \leq i, j \leq N}$.

4.2 Fórmula Geral da Média para $\beta = 2$

A partir deste ponto nosso objetivo é encontrar uma expressão geral para a média do produto dos autovalores da matriz de tempo de retardo da seguinte maneira

$$\langle \tau_1^{\lambda_1} \dots \tau_N^{\lambda_N} \rangle \quad (4.5)$$

na qual λ_i é uma das partes da partição λ . Sabendo que os autovalores são o inverso das variáveis do Ensemble de Laguerre, $\tau_i = 1/\gamma_i$, podemos reescrever a média como

$$\langle \gamma_1^{-\lambda_1} \dots \gamma_N^{-\lambda_N} \rangle \quad (4.6)$$

o que implica que o conjunto de funções do permanente é

$$\psi_i(x) = x^{-\lambda_i}. \quad (4.7)$$

Como ponto de partida, iremos usar o resultado principal da seção 2 de [36]

$$\langle \text{perm}(\Psi) \rangle = \frac{N!}{Z_\omega(2, N)} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \det \left(\int dx \omega(x) \psi_{\sigma(i)}(x) x^{i+j-2} \right)_{1 \leq i, j \leq N}. \quad (4.8)$$

Dado o conjunto de funções (4.7) temos de [36] que

$$\langle \text{perm}(\Psi) \rangle = N! \langle \gamma_1^{-\lambda_1} \dots \gamma_N^{-\lambda_N} \rangle \quad (4.9)$$

portanto

$$\langle \tau_1^{\lambda_1} \dots \tau_N^{\lambda_N} \rangle = \frac{\langle \text{perm}(\Psi) \rangle}{N!}. \quad (4.10)$$

Substituindo a equação (4.8) em (4.10), usando o peso de Laguerre $\omega(x) = e^{-\tau_H x} x^{\alpha-1}$, compactando $Z_{\omega \equiv L}(2, N) = Z$, e resolvendo a integral:

$$\begin{aligned} \langle \tau_1^{\lambda_1} \cdots \tau_N^{\lambda_N} \rangle_\alpha &= \frac{1}{Z} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \det \left(\int_0^\infty dx x^{\alpha - \lambda_{\sigma(i)} + i + j - 3} e^{-\tau_H x} \right)_{1 \leq i, j \leq N} \\ &= \frac{1}{Z} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \det \left[\tau_H^{-(1 + \alpha - \lambda_{\sigma(i)} + i + j - 3)} \Gamma(1 + \alpha - \lambda_{\sigma(i)} + i + j - 3) \right]_{1 \leq i, j \leq N} \\ &= \frac{1}{Z} \frac{1}{\tau_H^{2N^2 - n}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \det [(N - \lambda_{\sigma(i)} + i + j - 2)!]_{1 \leq i, j \leq N}. \end{aligned}$$

Na última linha acima fizemos $|\lambda| = n$, e $\alpha = N + 1$ de acordo com a parametrização da equação (2.94).

Fazendo $x_i = (N - \lambda_{\sigma(i)} + i - 2)$ e fatorando $(x_i + 1)!$ de cada linha do determinante, temos que cada elemento ij é um polinômio monic em x_i de grau $j - 1$, portanto equivalente ao determinante de Vandermonde $\Delta(x)$, o que leva a

$$\begin{aligned} \langle \tau_1^{\lambda_1} \cdots \tau_N^{\lambda_N} \rangle &= \frac{1}{Z} \frac{1}{\tau_H^{2N^2 - n}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \det [(x_i + j)!]_{1 \leq i, j \leq N} \\ &= \frac{1}{Z} \frac{1}{\tau_H^{2N^2 - n}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \prod_{i=1}^N (x_i + 1)! \det \left(x_i^{j-1} \right)_{1 \leq i, j \leq N} \\ &= \frac{1}{Z} \frac{1}{\tau_H^{2N^2 - n}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \prod_{i=1}^N (x_i + 1)! \Delta(x) \\ &= \frac{1}{Z} \frac{1}{\tau_H^{2N^2 - n}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \prod_{i=1}^N (x_i + 1)! \prod_{1 \leq j < i \leq N} (x_i - x_j) \\ &= \frac{1}{Z} \frac{1}{\tau_H^{2N^2 - n}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \prod_{i=1}^N (x_i + 1)! \prod_{1 \leq j < i \leq N} (N - \lambda_{\sigma(i)} + i - 2 - N + \lambda_{\sigma(j)} - j + 2) \\ &= \frac{1}{Z} \frac{1}{\tau_H^{2N^2 - n}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \prod_{i=1}^N (x_i + 1)! \prod_{1 \leq j < i \leq N} (-\lambda_{\sigma(i)} + i + \lambda_{\sigma(j)} - j). \end{aligned}$$

Calculando $Z_{\omega \equiv L}(2, N)$ [27][19]

$$Z_{\omega \equiv L}(2, N) = \frac{1}{\tau_H^{2N^2}} \prod_{i=1}^N (N + i - 1)! i!$$

e substituindo na última expressão, concluímos que a média das estatísticas não lineares do tempo próprio é

$$\langle \tau_1^{\lambda_1} \cdots \tau_N^{\lambda_N} \rangle = \frac{\tau_H^n}{\prod_{i=1}^N (N+i-1)! i!} \times \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \prod_{i=1}^N (x_i + 1)! \prod_{1 \leq j < i \leq N} (-\lambda_{\sigma(i)} + i + \lambda_{\sigma(j)} - j). \quad (4.11)$$

A partir de última equação geral podemos calcular casos particulares como exemplos.

Exemplo 1: *Média do primeiro momento*

Este primeiro caso particular permite comparar resultados existentes obtidos com estatísticas lineares. Com $\lambda = [1, 0, \dots, 0]$, e portanto $n = 1$, podemos calcular a média do primeiro momento, que é um resultado conhecido.

$$\begin{aligned} \langle \tau_1^1 \cdots \tau_N^0 \rangle &= \frac{\tau_H^1 (N-1)!}{\prod_{i=1}^N (N+i-1)! i!} \prod_{i=1}^{N+1} \frac{(N-2+i)!}{N!} \prod_{i=1}^N \frac{i!}{(N-1)!} \\ &= \frac{\tau_H [(N-1)!]^2}{\prod_{i=1}^N (N+i-1)! i!} \prod_{i=2}^{N+1} \frac{(N-2+i)!}{N!} \prod_{i=1}^N \frac{i!}{(N-1)!} \\ &= \frac{\tau_H (N-1)!}{\prod_{i=1}^N (N+i-1)! i! N!} \prod_{i=1}^N (N+i-1)! \prod_{i=1}^N i! \\ &= \boxed{\frac{\tau_H}{N}}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Exemplo 2: *Média do determinante*

Com $[\lambda_i = \kappa \forall i]$ podemos determinar uma solução compacta para a média de qualquer potência do determinante.

$$\begin{aligned} \langle \tau_1^\kappa \cdots \tau_N^\kappa \rangle &= \frac{\tau_H^{\kappa N} N!}{\prod_{i=1}^N (N+i-1)! i!} \prod_{i=1}^N (N-\kappa+i-1)! \prod_{i=1}^N \frac{i!}{N!} \\ &= \tau_H^{\kappa N} \frac{\prod_{i=1}^N (N-\kappa+i-1)!}{\prod_{i=1}^N (N+i-1)!} \\ &= \boxed{\tau_H^{\kappa N} \frac{1}{\prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^\kappa (N+i-j)}}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

4.3 Método da Função Geratriz Hipergeométrica

Para usarmos o método da função geratriz hipergeométrica, precisamos expandir a expressão em termos de funções simétricas elementares. Para isso usaremos a seguinte identidade do permanente [38]

$$\text{perm}(\gamma_i^{\lambda_j})_{1 \leq i, j \leq N} = \lambda! m_\lambda = \tilde{m}_\lambda \quad (4.14)$$

onde \tilde{m}_λ é a função simétrica monomial aumentada [44]. Portanto, a média do permanente é dada por

$$\langle \text{perm}(\Psi) \rangle = \langle \tilde{m}_\lambda \rangle = N! \langle \gamma_1^{-\lambda_1} \cdots \gamma_N^{-\lambda_N} \rangle \quad (4.15)$$

e a média da estatística não linear dos autovalores da matriz de tempo de retardo por

$$\langle \tau_1^{\lambda_1} \cdots \tau_N^{\lambda_N} \rangle = \frac{\langle \tilde{m}_\lambda \rangle}{N!}. \quad (4.16)$$

Para aplicarmos a equação (4.3) reescrevemos \tilde{m}_λ na base de funções simétricas elementares. Faremos isso em dois passos. O primeiro é usar a seguinte relação de recorrência [44] para reescrever a função simétrica monomial aumentada em termos de soma de potências

$$\begin{aligned} \tilde{m}_{[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k]} &= p_{\lambda_k} \tilde{m}_{[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1}]} \\ &\quad - \sum_{i=1}^{k-1} \tilde{m}_{[\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i + \lambda_k, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_{k-1}]}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

A segunda é expandir o resultado acima na base de funções simétricas elementares com a relação de recorrência abaixo [38]

$$\begin{aligned} p_{[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k]} &= p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \cdots p_{\lambda_k} \\ &= \prod_{i=1}^k p_{\lambda_i} \\ p_{\lambda_i} &= (-1)^{\lambda_i - 1} \lambda_i e_{\lambda_i} \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\lambda_i - 1} (-1)^{m-1} p_{\lambda_i - m} e_m. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Finalmente, aplicamos a equação (4.3) diretamente na expressão resultante. Dessa maneira, podemos dividir a solução em três passos:

1. Usar a recorrência (4.17) para expandir a função simétrica monomial aumentada em termos de soma de potências;
2. Usar a recorrência (4.18) para expandir a expressão resultante do passo anterior em termos de funções simétricas elementares;
3. Aplicar a expressão (4.3) para a média da função simétrica elementar com variável invertida na expressão obtida no passo 2.

Vamos ilustrar o método com os seguintes exemplos, calculados com o auxílio da biblioteca Maple que desenvolvemos.

Exemplo 3: *Média do primeiro momento*

Vamos repetir as condições do exemplo 1, $\lambda = [1, 0, \dots, 0]$.

$$\begin{aligned}
 \langle \tau_1^1 \tau_2^0 \cdots \tau_N^0 \rangle &= \frac{\langle \tilde{m}_{[1,0,\dots,0]} \rangle}{N!} = \frac{\lambda!}{N!} \langle m_{[1,0,\dots,0]} \rangle \\
 &= \frac{(N-1)!}{N!} \langle p_1 \rangle && \text{primeiro passo} \\
 &= \frac{\langle e_1 \rangle}{N} && \text{segundo passo} \\
 &= -\frac{\tau_H \gamma_1^{(\beta/2)} v_{1,1}^{(\beta/2)}}{N} && \text{terceiro passo} \\
 &= -\frac{\tau_H \gamma_1^{(\beta/2)}}{N} \\
 &= \boxed{\frac{\tau_H}{N}}.
 \end{aligned}$$

Exemplo 4: *Média do determinante*

Não podemos obter um resultado geral como o do exemplo 2, pois temos que especificar

a partição, mas usaremos condições similares com $\lambda = [1, 1, 1, 0, \dots, 0]$ e $N \geq 3$.

$$\begin{aligned}
 \langle \tau_1^1 \tau_2^1 \tau_3^1 \tau_4^0 \dots \tau_N^0 \rangle &= \frac{\langle \tilde{m}_{[1,1,1,0,\dots,0]} \rangle}{N!} = \frac{(N-3)! 3!}{N!} \langle m_{[1,1,1,0,\dots,0]} \rangle \\
 &= \frac{\langle p_1^3 - 3p_1 p_2 + 2p_3 \rangle}{(N-2)(N-1)N} && \text{primeiro passo} \\
 &= \frac{6 \langle e_3 \rangle}{(N-2)(N-1)N} && \text{segundo passo} \\
 &= -\frac{\tau_H^3 \gamma_3^{(\beta/2)} v_{3,3}^{(\beta/2)}}{(N-2)(N-1)N} && \text{terceiro passo} \\
 &= -\frac{\tau_H^3 \gamma_3^{(\beta/2)}}{(N-2)(N-1)N} \\
 &= \boxed{\frac{\tau_H^3}{N(N+1)(N+2)}}.
 \end{aligned}$$

Como esperado esse resultado é o mesmo que o do exemplo 2 para $N = 3$ e $\kappa = 1$.

Exemplo 5: *Algo novo*

Tornaremos as coisas um pouco mais complicadas, mas não muito, considerando $\lambda = [2, 1, 0, \dots, 0]$.

$$\begin{aligned}
 \langle \tau_1^2 \tau_2^1 \tau_3^0 \dots \tau_N^0 \rangle &= \frac{\langle \tilde{m}_{[2,1,0,\dots,0]} \rangle}{N!} = \frac{(N-2)! 1!}{N!} \langle m_{[2,1,0,\dots,0]} \rangle \\
 &= \frac{\langle p_1 p_2 - p_3 \rangle}{(N-1)N} && \text{primeiro passo} \\
 &= \frac{\langle e_1 e_2 - 3e_3 \rangle}{(N-1)N} && \text{segundo passo} \\
 &= -\frac{\tau_H^3 \left(\gamma_3^{(\beta/2)} v_{3,[2,1]}^{(\beta/2)} - 3 \gamma_3^{(\beta/2)} v_{3,3}^{(\beta/2)} + \gamma_{[2,1]}^{(\beta/2)} v_{[2,1],[2,1]}^{(\beta/2)} \right)}{6(N-1)N} && \text{terceiro passo} \\
 &= \frac{\beta \tau_H^3 \left(-\gamma_{[2,1]}^{(\beta/2)} + \gamma_3^{(\beta/2)} \right)}{2(N-1)N(\beta+1)} \\
 &= \boxed{\frac{2\beta \tau_H^3}{(N\beta-2)(N+1)(N+2)}}.
 \end{aligned}$$

4.4 Conclusões

Motivados pelo problema do tempo de retardo em cavidades caóticas, nós consideramos as estatísticas não lineares de permanentes no inverso dos autovalores no Ensemble de Laguerre. Na seção 4.2 usamos o resultado de Luque e Vivo [36] para obtermos formulas gerais e compactas, mas esse método provou ser inapropriado para implementação

computacional por duas razões. A primeira é a manipulação simbólica não trivial e a segunda o crescimento da complexidade com N , ou seja, o número de variáveis de integração. Na seção 4.3 usamos o método da função geratriz hipergeométrica (seção 3.2) que usa funções simétricas elementares, sendo apropriado para implementação computacional e cuja complexidade dos resultados cresce com $|\lambda|$, não N . Uma biblioteca Maple foi desenvolvida pela implementação desse método e usada nesse trabalho.

Capítulo 5

Gerando Ensembles de Matrizes Aleatórias

O principal objetivo da Teoria de Matrizes Aleatórias (TMA) é proporcionar uma compreensão das diversas propriedades de matrizes com elementos definidos aleatoriamente a partir de distribuições de probabilidade, comumente chamadas de ensembles de matrizes aleatórias.

Embora a vantagem do uso da TMA esteja na possibilidade de calcularmos quantidades físicas e matemáticas analiticamente, algumas vezes é necessário recorrermos às simulações numéricas. Neste capítulo, seguindo ideias propostas na literatura [34], implementamos um algoritmo eficiente em Python para gerar numericamente essas matrizes para o ensemble Circular (seção 5.3), além do método Hamiltoniano [23–25] para geração de matrizes de Tempo de Retardo (seção 5.4), não nos restringindo às três classes clássicas (tabela 2.9). Rotinas para os ensembles de Ginibre e Gaussiano (seções 5.1 e 5.2) também são implementadas.

O método proposto consiste em operações de Álgebra Linear, que implementamos em Python utilizando a biblioteca *NumPy* com técnicas de *vetorização* e *broadcasting*. Resumidamente, o algoritmo para o ensemble Circular, objeto principal deste capítulo, possui 5 passos básicos envolvendo (1) a criação de uma matriz complexa com elementos aleatórios, (2) sua decomposição QR , (3) a criação de uma matriz diagonal a partir dos elementos diagonais de R divididos pelos seus módulos, (4) a multiplicação da matriz Q pela matriz diagonal criada anteriormente, que resulta numa matriz distribuída com a

medida de Haar, e, finalmente, (5) a aplicação da simetria desejada, correspondente a uma das classes.

Os resultados obtidos foram aplicados ao problema do transporte eletrônico através de uma cavidade balística acoplada a dois terminais ideais suportando N_1 e N_2 canais abertos. O espalhamento das ondas dos elétrons pode ser descrito pela matriz de espalhamento S . Essa matriz pode ser substituída por uma matriz aleatória uniformemente distribuída no grupo unitário com a medida de Haar e com as simetrias apropriadas, como as calculadas no algoritmo.

Matrizes de tempo de retardo são calculadas através do método Hamiltoniano, que faz uso do Ensemble Gaussiano para a criação dos Hamiltonianos utilizados na equação de Mahaux-Weindemuller (2.83). As matrizes de espalhamento resultantes possuem dependência da energia e podem ser utilizadas na equação de Wigner-Smith (1.5) para a determinação da matriz de tempo de retardo Q .

Utilizando a hipótese de ergodicidade, calculamos médias dos observáveis, como condutância, potência de ruído de disparo, tempo próprio, tempo de Wigner, e distribuições completas de propriedades estatísticas (seções 5.5, 5.6 e 5.7). Esses observáveis de interesse são calculados através de ensembles de matrizes S ou Q e estão, por exemplo, codificadas nos traços $G = \text{Tr}(tt^\dagger)$, onde t , dentro da abordagem de espalhamento de Landauer-Büttiker [14, 52], é a matriz de transmissão e os autovalores de tt^\dagger são tratados como variáveis aleatórias correlacionadas.

Para validar o resultado do trabalho comparamos resultados conhecidos para essas propriedades com as quantidades obtidas através do algoritmo, concluindo que as matrizes geradas possuem as propriedades esperadas.

5.1 Ensemble de Ginibre

O Ensemble de Ginibre é bastante simples. O espaço das matrizes do Ensemble de Ginibre é $GL(N, \mathbb{C})$, o conjunto de todas as matrizes $N \times N$ invertíveis complexas $Z = (z_{jk})$. Os elementos das matrizes são variáveis aleatórias complexas normais distribuídas identicamente e independentemente (iid):

$$p(z_{jk}) = \frac{1}{\pi} e^{-|z_{jk}|^2}. \quad (5.1)$$

Como os elementos são iid, sua densidade de probabilidade conjunta é:

$$\begin{aligned}
 P(Z) &= \frac{1}{\pi N^2} \prod_{j,k=1}^N e^{-|z_{jk}|^2} \\
 &= \frac{1}{\pi N^2} \exp\left(-\sum_{j,k=1}^N |z_{jk}|^2\right) \\
 &= \frac{1}{\pi N^2} \exp(-\text{Tr} Z^* Z).
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

De uma maneira geral a implementação computacional é direta, com exceção das matrizes com elementos quaterniônicos. Poucas linguagens de programação possuem suporte nativo à esse conjunto de números.

Mas os quatérnios admitem representação em termos das matrizes 2×2

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

Por exemplo, o quatérnio $q = a + bi_1 + ci_2 + di_3$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) pode ser mapeado pela matriz complexa

$$A = aI_2 + be_1 + ce_2 + de_3 = \begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

onde $z = a + ib$ e $w = c + id$.

Podemos generalizar o conceito para uma matriz quaterniônica $N \times N$ qualquer \mathcal{Q} , a qual pode ser representada em termos de uma matriz $2N \times 2N$ complexa Q usando a decomposição

$$\mathcal{Q} \rightarrow Q = Q_0 \otimes I_2 + Q_1 \otimes e_1 + Q_2 \otimes e_2 + Q_3 \otimes e_3, \tag{5.5}$$

na qual Q_0, Q_1, Q_2 e Q_3 são matrizes $N \times N$ reais arbitrárias. Observe as linhas 8 a 12 do código 5.1.1.

O Ensemble de Ginibre é a base para a geração dos outros ensembles.

5.1.1 Código Python

parâmetro	descrição
b	Indica se os elementos da matriz são reais (b=1), complexos (b=2) ou quaterniônicos (b=4).
n	A dimensão da matriz

TABELA 5.1: Parâmetros da função *ginibre*.

```

1 def ginibre(beta = 1, n = 2):
2     if beta==1:
3         return _np.random.randn(n, n)
4     elif beta==2:
5         return _np.random.randn(n, n) + 1j * _np.random.randn(n, n)
6     elif beta==4:
7         _n = n // 2
8         Q0 = _np.random.randn(_n, _n)
9         Q1 = _np.random.randn(_n, _n)
10        Q2 = _np.random.randn(_n, _n)
11        Q3 = _np.random.randn(_n, _n)
12        return (_np.kron(Q0, I2) + _np.kron(Q1, e1) + _np.kron(Q2, e2) + _np.
        kron(Q3, e3))

```

5.2 Ensemble Gaussiano

Matrizes do Ensemble Gaussiano podem representar Hamiltonianos de sistemas fechados. Essa característica já foi discutida em 2.6.1.1, portanto iremos nos concentrar na implementação computacional.

O Ensemble Gaussiano inicia a partir de matrizes do Ensemble de Ginibre (linhas 4 a 11 do código 5.2.3) e para as três classes clássicas de simetria (A, AI e AII) a única diferença é a hermiticidade (linha 39 de 5.2.3).

Para as categorias Quiral e BdG (tabela 2.9) precisamos incluir as restrições de simetria. Vamos discutir essas categorias separadamente seguindo a representação dos operadores de simetria de acordo com Fulga et al. [32].

5.2.1 Classes Quirais

A categoria Quiral é composta pelas classes AIII, BDI e CII (tabela 2.9) e, para essa categoria, sempre aplicamos a simetria Quiral $H = -\tau_z H \tau_z$ (linha 18 de 5.2.3).

Classe **AIII**: não possui nenhuma restrição de simetria adicional, então continuaremos com as duas restantes.

Classe **BDI**: possui simetria de reversão temporal $H = \tau_z H^* \tau_z$ e simetria partícula-buraco $H = -H^*$. Pelo fato de termos iniciado a rotina com um Hamiltoniano puramente imaginário (linha 7), não será necessário aplicarmos essas simetrias.

Classe **CII**: também possui simetria de reversão temporal $H = \sigma_y H^* \sigma_y$ e partícula-buraco $H = -\tau_z \sigma_y H^* \tau_z \sigma_y$. A linha 25 do código 5.2.3 é a combinação dessas simetrias.

5.2.2 Classes BdG

Classe **D**: possui restrição de simetria partícula-buraco $H = -H^*$, mas o Hamiltoniano foi iniciado como uma matriz puramente imaginária [62], então não é necessário aplicarmos as simetrias.

Classe **DIII**: possui restrição de simetria de reversão temporal $H = \tau_y H^* \tau_y$ e partícula-buraco $H = -\tau_x H^* \tau_x$, mas o Hamiltoniano foi iniciado como uma matriz simplética (5.5), então não é necessário aplicarmos as simetrias.

Classe **C**: possui restrição partícula-buraco $H = -\tau_y H^* \tau_y$. A linha 25 do código é a aplicação dessa simetria.

Classe **CI**: assim como a classe C, possui restrição partícula-buraco $H = -\tau_y H^* \tau_y$ e, também, de reversão temporal $H = \tau_x H^* \tau_x$. Podemos ignorar a aplicação da simetria temporal por causa da hermiticidade da matriz.

5.2.3 Código Python

```

1 def gaussian(sym=SymmetryClass.A, n=2, hermitian=False, sigma=1.):
2     global _C
3
4     if (sym in _real_space):

```

parâmetro	descrição
sym	Uma das simetrias de Altland-Zirnbauer
n	A dimensão do Hamiltoniano (matriz Gaussiana). Deve ser par para todas as classes, exceto A, D e AI. Apenas para a classe CII deve ser um múltiplo de 4.
hermitian	Garante (true) ou não (false) a hermiticidade da matriz. Foi incluído apenas por conveniência.
sigma	Variância da distribuição normal dos elementos da matriz.

TABELA 5.2: Parâmetros da função *gaussian*.

```

5     H = ginibre(beta = 1, n = n)
6     elif (sym in _imaginary_space):
7         H = 1j * _np.random.randn(n, n)
8     elif (sym in _complex_space):
9         H = ginibre(beta = 2, n = n)
10    else:
11        H = ginibre(beta = 4, n = n)
12
13    if (sym in _chiral):
14        global _C1
15        if (_C1.shape[0] != n):
16            _C1 = _np.kron(_np.eye(n // 2), e1)
17
18    H = (H + _C1.dot(H.dot(_C1)))
19
20    if (sym == SymmetryClass.CII):
21        global _C2
22        if (_C2.shape[0] != n):
23            _C2 = _np.kron(_np.eye(n // 4), e4)
24
25    H = (H - (_C2.dot(H.dot(_C2))).conj())
26    else:
27        H *= _np.sqrt(2/(_syms_beta[sym]**2))
28
29    if (sym in _bdg):
30        if (sym == SymmetryClass.C or sym == SymmetryClass.CI):
31            if (_C.shape[0] != n):
32                _C = _np.kron(_np.eye(n // 2), e2)
33

```

```

34     H = (H + (_C.dot(H.dot(_C))).conj())
35
36     H *= sigma
37
38     if (hermitian):
39         H = (H + H.T.conj()) / 2
40
41     return H

```

5.3 Ensemble Circular

O algoritmo utilizado para criação das matrizes circulares foi proposto por Mezzadri [34]. Ele possui desempenho superior às alternativas, como o método Hamiltoniano ou a parametrização [63], sendo baseado nas propriedades invariantes da medida de Haar.

Gerar uma matriz Z do Ensemble de Ginibre (seção 5.1) é o primeiro passo para produzir a matriz aleatória circular. Segundo Eaton [64], sendo Z uma matriz do Ensemble de Ginibre e aplicarmos a ortonormalização de Gram-Schmidt às suas colunas, a matriz resultante Q de $Z = QR$ é unitária e distribuída na medida de Haar.

Infelizmente, a implementação do algoritmo de Gram-Schmidt não é numericamente estável. Porém, observando que R é uma matriz triangular superior e invertível, vemos que o algoritmo do Sympy realiza, de fato, a decomposição QR (isso é válido para qualquer pacote que utilize os algoritmos das rotinas LAPACK [65]). A maioria dos pacotes de álgebra linear não implementam essa rotina usando Gram-Schmidt, mas sim reflexões *Householder*, que são numericamente estáveis.

Com essa última observação resolvemos o problema da estabilidade numérica, mas encontramos outro. A decomposição QR não produz matrizes na medida de Haar porque a fatoração não é única.

Para resolver esse segundo problema começamos definindo o grupo de matrizes diagonais unitárias como

$$\Lambda(N) = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_N} \end{pmatrix} = \text{diag}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_N}), \quad (5.6)$$

então as matrizes

$$Q' = Q\Lambda \quad \text{e} \quad R' = \Lambda^{-1}R \quad (5.7)$$

continuam, respectivamente, unitária e triangular superior. O que implica

$$Z = QR = Q'R'. \quad (5.8)$$

Portanto, a decomposição QR define o mapa multivalorado

$$QR : GL(N, \mathbb{C}) \rightarrow U(N) \times T(N), \quad (5.9)$$

no qual $T(N)$ denota o grupo das matrizes triangulares superiores invertíveis.

Precisamos introduzir uma variação do mapeamento (5.9) que seja não apenas de valor único, mas também bijetivo, definido como

$$\overline{QR} : GL(N, \mathbb{C}) \rightarrow U(N) \times \Gamma(N), \quad (5.10)$$

onde $\Gamma(N) = T(N)/\Lambda(N)$ é o espaço da coclasse à direita de $\Lambda(N)$ em $T(N)$, ou seja, se $t \in T$ então $\Lambda t = \{\lambda t : \lambda \in \Lambda\}$.

A principal ferramenta para alcançarmos (5.10) é a invariância da medida de Haar sob a multiplicação e sua singularidade. Portanto, nossa escolha para a decomposição precisa ser tal que

$$Z \rightarrow (Q, \gamma) \quad \text{então} \quad UZ \rightarrow (UQ, \gamma) \quad (5.11)$$

para qualquer $U \in U(N)$, mantendo o γ inalterado.

Como $P(Z)$ é uma densidade de probabilidade (5.2), ela é normalizável

$$\int_{\mathbb{C}^{N^2}} P(Z) dZ = 1, \quad (5.12)$$

onde $dZ = \prod_{j,k=1}^N dx_{jk} dy_{jk}$ e $z_{jk} = x_{jk} + iy_{jk}$. Então, se $d\mu_G$ é um volume infinitesimal ou uma medida em \mathbb{C}^{N^2} , podemos escrever

$$d\mu_G(Z) = P(Z) dZ. \quad (5.13)$$

A medida do Ensemble de Ginibre é invariante sob multiplicação de Z pela esquerda e direita por matrizes unitárias

$$d\mu_G(UZ) = d\mu_G(ZV) = d\mu_G(Z), \quad U, V \in U(N). \quad (5.14)$$

Se o mapeamento (5.10) satisfaz a hipótese (5.14), então ele decompõe a medida (5.13) do Ensemble de Ginibre como

$$\begin{aligned} d\mu_G(UZ) &= d\mu_G(Z) \\ &= d\mu(UQ, \gamma) = d\mu(Q, \gamma) \\ &= d\mu_H(Q) \times d\mu_{\Gamma(N)}(\gamma) \end{aligned} \quad (5.15)$$

Podemos então definir os passos para criarmos uma matriz aleatória unitária com distribuição dada pela medida de Haar:

1. Criar uma matriz Z do Ensemble de Ginibre de dimensão $N \times N$ (linhas 5 a 10 do código 5.3.4);
2. Alimentar Z na rotina de decomposição QR, onde (Q,R) é o resultado (linha 12);
3. Criar a seguinte matriz diagonal

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{r_{11}}{|r_{11}|} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{r_{NN}}{|r_{NN}|} \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

onde r_{jj} são os elementos da diagonal de R (linhas 13 e 14);

4. O elementos da diagonal de $R' = \Lambda^{-1}R$ são sempre reais e estritamente positivos, portanto a matriz $Q' = Q\Lambda$ é distribuída na medida de Haar (linha 16);
5. Aplicar a restrição de simetria (tabela 2.9) apropriada à classe desejada (linhas 18 a 59).

Cada uma das 10 classes de simetria da classificação de Altland-Zirnbauer (tabela 2.9) será tratada separadamente nas seções seguintes.

5.3.1 Classes de Wigner-Dyson

Classe **A**: na classificação de Dyson é chamada de Unitária ($\beta = 2$) e não possui qualquer restrição de simetria (linha 36).

Classe **AI**: essa é a classe Ortogonal ($\beta = 1$) e possui apenas simetria de reversão temporal $r = r^T$ (linha 29).

Classe **AII**: também conhecida como classe Simplética ($\beta = 4$), possui simetria de reversão temporal $r = -r^T$ e (linha 42).

5.3.2 Classes Quirais

Todas as classes Quirais possuem a restrição de simetria $s = s^\dagger$ (linhas 49 e 59).

Classe **AIII**: não possui qualquer tipo de restrição de simetria adicional.

Classe **BDI**: possui simetria de reversão temporal $r = r^T$ e partícula-buraco $r = r^*$. Como essa matriz foi inicializada a partir Ensemble de Ginibre com elementos reais, não é necessário aplicar as simetrias (linha 6).

Classe **CII**: possui simetria de reversão temporal $r = \sigma_y r^T \sigma_y$ e partícula-partícula $r = \sigma_y r^* \sigma_y$. Como foi inicializada a partir do Ensemble de Ginibre com elementos quaterniônicos na representação complexa (5.5) não precisamos aplicar as simetrias adicionais (linha 8).

5.3.3 Classes BdG

Classe **D**: possui simetria partícula-buraco $r = r^*$. Como essa matriz foi inicializada a partir Ensemble de Ginibre com elementos reais, não é necessário aplicar as simetrias (linha 6).

Classe **DIII**: possui simetria de reversão temporal $r = -r^T$ e partícula-buraco $r = -r^*$. A única diferença em relação à classe BDI é o sinal da restrição (linhas 19 a 26).

Classe **C**: possui simetria partícula-buraco $r = \sigma_y r^* \sigma_y$. Assim como a classe CII foi inicializada a partir do Ensemble de Ginibre com elementos quaterniônicos na representação complexa (5.5) não precisamos aplicar as simetrias adicionais (linha 8).

Classe **CI**: possui simetria de reversão temporal $-\sigma_y r^T \sigma_y$ e simetria partícula-buraco $r = -\sigma_y r^* \sigma_y$. A única diferença em relação à classe CII é o sinal das simetrias (linhas 29 a 34).

5.3.4 Código Python

parâmetro	descrição
sym	Uma das simetrias de Altland-Zirnbauer.
n	A dimensão da matriz Circular. Deve ser par para as classes C, CI, CII, AII e DIII.
charge	Invariante topológico da matriz. Para as simetrias D e DIII pode assumir os valores 1 e -1, para AIII e BDI de 0 a n e CII de 0 a n/2.

TABELA 5.3: Parâmetros da função *circular*.

```

1 def circular(sym=SymmetryClass.A, n=2, charge=None):
2     if (_syms_beta[sym] == 4 or sym == SymmetryClass.CI or sym ==
3         SymmetryClass.DIII):
4
5         n = 2*n
6
7     if (sym == SymmetryClass.BDI or sym == SymmetryClass.DIII or sym ==
8         SymmetryClass.D):
9         H = ginibre(beta = 1, n = n)
10    elif (sym == SymmetryClass.CII or sym == SymmetryClass.CI or sym ==
11        SymmetryClass.C):
12        H = ginibre(beta = 4, n = n)
13    else:
14        H = ginibre(beta = 2, n = n)
15
16    q, r = _np.linalg.qr(H)
17    d = r.diagonal()
18    l = d / _np.absolute(d)
19
20    S = _np.multiply(q, l)
21
22    if ((sym == SymmetryClass.D or sym == SymmetryClass.DIII) and charge is
23        not None):
24        det = _np.linalg.det(S)
25        if (sym == SymmetryClass.DIII):
26            det *= (-1) ** (n // 2)

```

```

22     if (charge > 0) != (det > 0):
23         idx = _np.arange(n)
24         idx[-1] -= 1
25         idx[-2] += 1
26         S = S[idx]
27
28     if (sym == SymmetryClass.AI or sym == SymmetryClass.CI):
29         S = S.T.dot( S )
30         if (sym == SymmetryClass.CI):
31             tau_z = _np.array((n // 2) * [1, -1])
32             idx_x = _np.arange(n) + tau_z
33             S = 1j * tau_z * S[:, idx_x]
34         return S
35     elif (sym == SymmetryClass.A):
36         return S
37     elif (sym == SymmetryClass.AII or sym == SymmetryClass.DIII):
38         global _J
39         if (_J.shape[0] != n):
40             _J = _np.kron(e2, _np.eye(n // 2))
41
42         return 1j * S.T.dot(_J.dot(S))
43     elif (sym == SymmetryClass.AIII or sym == SymmetryClass.BDI):
44         if charge is None:
45             diag = 2 * _np.random.randint(2, size=(n,)) - 1
46         else:
47             diag = _np.array(charge * [-1] + (n - charge) * [1])
48
49         return _np.dot(diag * S.T.conj(), S)
50
51     elif (sym == SymmetryClass.CII):
52         if charge is None:
53             diag = 2 * _np.random.randint(2, size=(n // 2,)) - 1
54             diag = _np.resize(diag, (2, n // 2)).T.flatten()
55         else:
56             charge *= 2
57             diag = _np.array(charge * [-1] + (n - charge) * [1])
58
59         return _np.dot(diag * S.T.conj(), S)
60
61     return S

```

5.4 Ensemble de Tempo de Retardo

Analisando a equação de Wigner-Smith (1.5) no nível de Fermi

$$Q = -i\hbar \lim_{E \rightarrow 0} S^\dagger \frac{\partial S}{\partial E} \quad (5.17)$$

vemos que é necessária uma abordagem para a geração de matrizes de espalhamento S com dependência da energia para calcularmos o Ensemble de Tempo de Retardo. A abordagem escolhida é a Hamiltoniana [47].

Isso significa que a matriz de espalhamento pode ser escrita na forma (2.83)

$$S = 1 - 2\pi i W^\dagger (E - H_{eff})^{-1} W \quad (5.18)$$

na qual $H_{eff} = H - i\pi W W^\dagger$ (linha 16 do código 5.4.1) e o Hamiltoniano H pode ser representado por uma matriz do Ensemble Gaussiano (linha 6).

Dessa maneira, expandindo a equação de Wigner-Smith, a matriz de tempo de retardo é dada por

$$\begin{aligned} Q &= -i\hbar \lim_{E \rightarrow 0} \left[1 - 2\pi i W^\dagger (E - H_{eff})^{-1} W \right]^\dagger \left[2\pi i W^\dagger (E - H_{eff})^{-2} W \right] \\ &= -i\hbar \left[1 - 2\pi i W^\dagger (-H_{eff})^{-1} W \right]^\dagger \left[2\pi i W^\dagger (-H_{eff})^{-2} W \right]. \end{aligned} \quad (5.19)$$

cuja representação no código está dividida nas linhas 18 a 23.

5.4.1 Código Python

```

1 def timedelay(sym=SymmetryClass.A, n=2, m=160):
2     h_bar = 1.
3     delta = 1./n
4     sigma = _mt.sqrt( m/(2.*_syms_beta[sym]) ) * ((2.*delta)/_mt.pi)
5
6     H = gaussian(sym, m, True, sigma)
7
8     global _W
9     global _Wadj
10    if (_W.shape[0] != m or _W.shape[1] != n):
11        _W = _np.zeros(shape=(m, n), dtype=float)

```

```

12     i , j      = _np.indices(_W.shape)
13     _W[i==j] = _mt.sqrt(m*delta) / _np.pi
14     _Wadj     = _W.conjugate().transpose()
15
16     A = 1j*_np.pi*_W.dot(_Wadj) - H
17
18     G = _np.linalg.inv( A )
19
20     S = _np.eye(n) - 2.*_np.pi*1j * _Wadj.dot(          G.dot(_W) )
21     dS =                2.*_np.pi*1j * _Wadj.dot( (G.dot(G)).dot(_W) )
22
23     Q = -1j * h_bar * S.conjugate().transpose().dot(dS)
24
25     return Q

```

5.5 Estatísticas Circulares

Uma matriz unitária sempre pode ser diagonalizada em $U(N)$. Portanto, seus autovalores $\{e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_N}\}$ pertencem ao círculo unitário no plano complexo.

Um cálculo clássico na TMA consiste em computar correlações estatísticas entre os argumentos θ_j dos autovalores. A função de correlação mais simples é a densidade de autovalores $\rho(\theta)$, chamado de correlação de um ponto. Como a medida de Haar é uma distribuição uniforme, cada autovalor precisa ter o mesmo peso, assim a densidade normalizada é

$$\rho(\theta) = \frac{1}{2\pi}. \quad (5.20)$$

Outra estatística simples de determinar e que codifica a informação das correlações espectrais é a distribuição de espaçamento. Para matrizes unitárias ela é definida listando os argumentos dos autovalores em ordem crescente

$$\theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \theta_N. \quad (5.21)$$

Os espaçamentos normalizados entre os consecutivos autovalores são

$$s_j = \frac{N}{2\pi}(\theta_{j+1} - \theta_j), \quad j = 1, \dots, N. \quad (5.22)$$

Ao conjunto dessas estatísticas demos o nome de Estatísticas Circulares. Elas estão implementadas numa classe chamada *CircularStatistics*, com uso exemplificado abaixo:

```

1 import ufrpe.physics.quantumtransport as qt
2 cs = qt.ensemble.CircularStatistics(size=10000, N=100, sym=qt.rmt.
    SymmetryClass.A)
3 cs.plot_eigenvalue_distribution()
4 plt.show()
5 cs.plot_phase_distribution()
6 plt.show()
7 cs.plot_phase_spacing_distribution()
8 plt.show()

```

Na linha 2 calculamos as Estatísticas Circulares de um ensemble de 10000 matrizes 100×100 da classe A (Unitária $\beta = 2$). Em seguida, nas linhas 3 a 8, plotamos os gráficos da distribuição dos autovalores no plano complexo (linha 3), da distribuição das fases (linha 5) e da distribuição dos espaçamento (linha 7). Os valores numéricos usados para a montagem dos gráficos estão disponíveis nas propriedades *eigenvalue*, *phase* e *phase_spacing* da classe.

A seguir estão os gráficos resultantes do código usado como exemplo. As linhas azuis nas figuras 5.1a e 5.1b são os resultados teóricos para comparação. Em 5.1a o resultado teórico é dado pela distribuição constante (5.20) e em 5.1b pela conjectura de Wigner [2]

$$\rho(s) = 2 \frac{\Gamma(\beta/2 + 1)^{\beta+1}}{\Gamma((\beta + 1)/2)^{\beta+2}} s^\beta \exp\left(-\frac{\Gamma(\beta/2 + 1)^2}{\Gamma((\beta + 1)/2)^2} s^2\right). \quad (5.23)$$

5.6 Estatísticas de Espalhamento

Em 2.6.1.2 vimos que as matrizes de espalhamento S possuem estrutura de bloco

$$S = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

com matrizes $N_1 \times N_2$ de reflexão r e r' e de transmissão t e t' .

A conservação de corrente implica que S é unitária $S^{-1} = S^\dagger$. Como consequência direta da unitariedade temos que as quatro matrizes hermitianas tt^\dagger , $t't'^\dagger$, $1 - rr^\dagger$ e

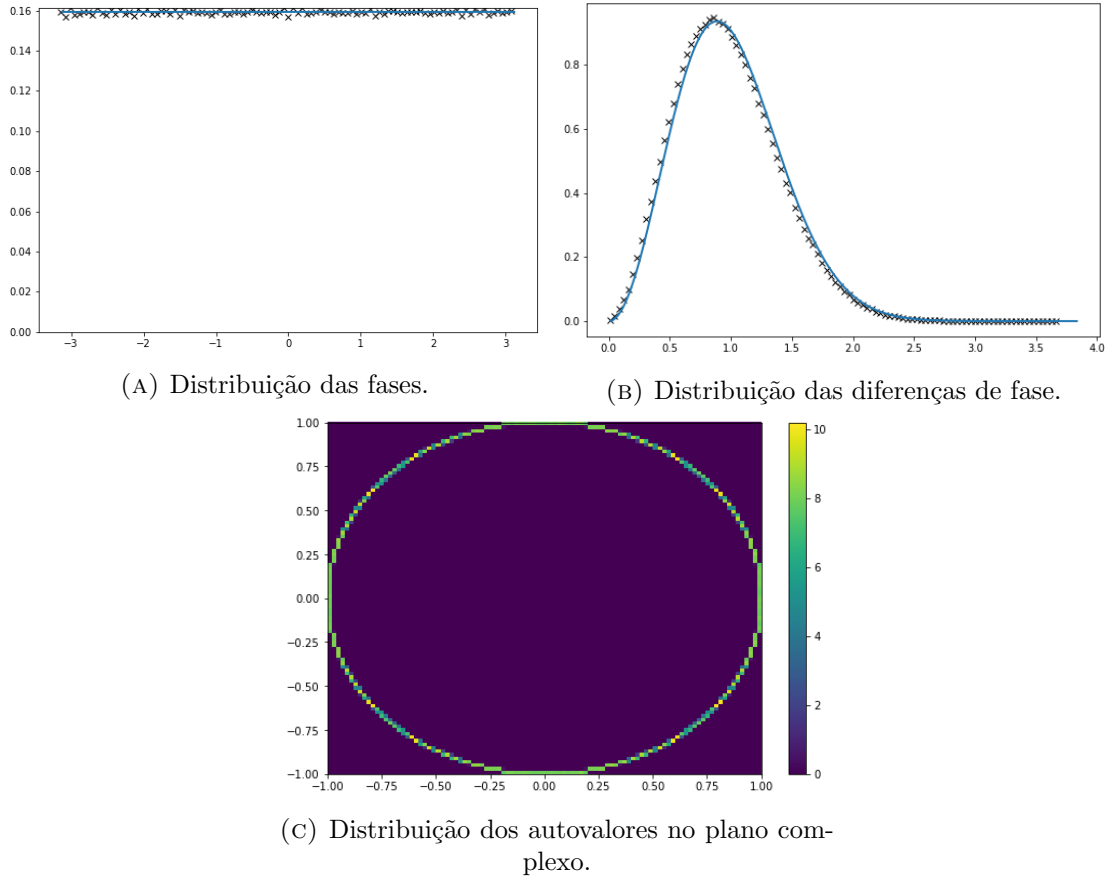


FIGURA 5.1: Estatísticas circulares para a classe de simetria A e dimensão $N = 100$. As linhas contínuas em (A) e (B) são os resultados teóricos.

$1 - r'r'^{\dagger}$ possuem o mesmo conjunto de autovalores T_1, T_2, \dots, T_N . Sendo cada um desses autovalores de transmissão um número real entre 0 e 1.

Os autovalores de transmissão determinam as propriedades de transporte. A primeira é a condutância, que, para baixas diferenças de potencial e temperatura zero, é dada por (1.2) [14]. Essa equação é conhecida como fórmula de Landauer [14].

A segunda é a potência de ruído de disparo. A carga discreta do elétron causa flutuações na corrente dependentes do tempo $I(t) = \bar{I} + \delta I(t)$, que persiste mesmo a temperatura zero. A potência de ruído de disparo está relacionado aos autovalores de transmissão por (1.3) [14].

Essas duas propriedades de transporte chamamos de Estatísticas de Espalhamento, que são representadas pela classe *ScatteringStatistics*, exemplificada abaixo:

```

1 import ufrpe.physics.quantumtransport as qt
2 ss = qt.ensemble.ScatteringStatistics(size=100000, N1=2, N2=2, sym=qt.rmt.SymmetryClass.A)
    
```

```

3 ss.plot_conductance_distribution(average=True, variance=False)
4 plt.show()
5 ss.plot_shot_noise_distribution(average=True, variance=False)
6 plt.show()

```

Na linha 2 calculamos as Estatísticas de Espalhamento de um ensemble de 100000 matrizes 4×4 ($N_1 = N_2 = 2$) da classe A (unitária $\beta = 2$). Em seguida, nas linhas 3 a 8, plotamos os gráficos da distribuição da condutância (linha 3) e da distribuição da potência de ruído de disparo (linha 5). Os valores numéricos usados na montagem dos gráficos estão disponíveis nas propriedades *conductance* e *shot_noise* da classe.

Abaixo estão os gráficos resultantes do código usado como exemplo. As linhas azuis nas figuras 5.2a e 5.2b são resultados teóricos para comparação. O tracejado vermelho é a média numérica. Ela está tão próxima da teórica, tracejado azul, que a está sobrepondo.

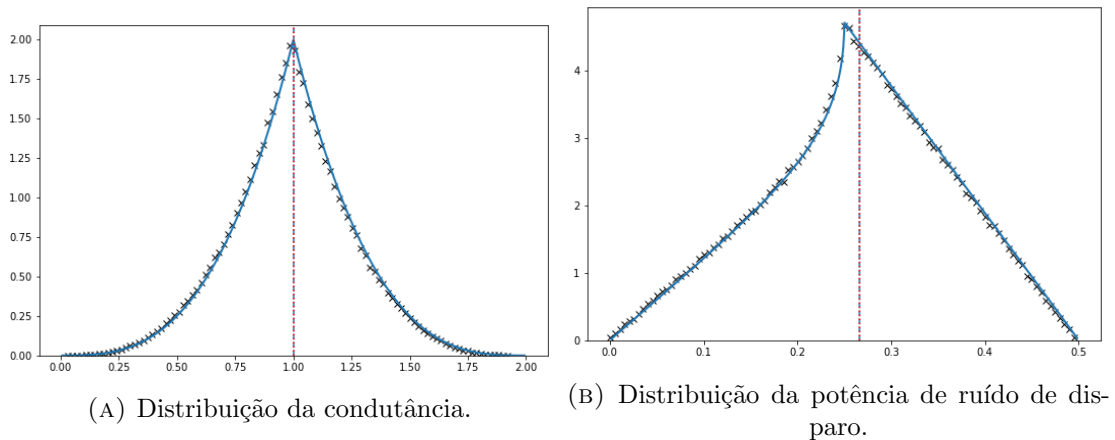


FIGURA 5.2: Estatísticas de espalhamento para a classe de simetria A e dimensão $N = 4$ ($N_1 = N_2 = 2$). As linhas contínuas são os resultados teóricos. Os tracejados verticais são as médias das distribuições.

5.7 Estatísticas de Tempo de Retardo

A matriz de tempo de retardo é hermitiana e seus autovalores são os tempos próprios $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$.

Os tempos próprios são os tempos de vida de estados metaestáveis e as correspondentes autofunções Ψ_i descrevem esses estados metaestáveis.

Vimos em 2.6.2 que os inversos dos autovalores da matriz de tempo de retardo estão distribuídos de acordo com o Ensemble de Laguerre (2.94).

O tempo de vida medido é a média dos tempos próprios, chamada de tempo de permanência τ_D ou média do tempo de Wigner (1.6).

As Estatísticas de Tempo de Retardo são a distribuição conjunta dos tempos próprios e a distribuição do tempo de Wigner, implementadas na classe chamada *TimeDelayStatistics*, com uso exemplificado abaixo:

```

1 import ufrpe.physics.quantumtransport as qt
2 ts = qt.ensemble.TimeDelayStatistics(size=100000, N=2, sym=qt.rmt.
    SymmetryClass.A)
3 ts.plot_proper_time_distribution(average=True)
4 plt.show()
5 ts.plot_wigner_time_distribution(average=True)
6 plt.show()

```

Na linha 2 calculamos as Estatísticas de Tempo de Retardo de um ensemble de 100000 matrizes 2×2 da classe A (unitária $\beta = 2$). Em seguida, nas linhas 3 a 6, plotamos os gráficos da distribuição dos tempos próprios (linha 3) e da distribuição do tempo de Wigner (linha 5). Os valores numéricos usados na montagem dos gráficos estão disponíveis nas propriedades *proper_time* e *wigner_time*.

Abaixo estão os gráficos resultantes do código usado como exemplo. A linha contínua (azul) na figura 5.3a é o resultado da densidade dos autovalores (tempos próprios) (3.2) para comparação. O tracejado vermelho é a média numérica. Ela está tão próxima da teórica, tracejada azul, que a está sobrepondo.

Embora o resultado analítico para a distribuição conjunta dos tempos próprios seja conhecida para qualquer N , o resultado para a distribuição do tempo de Wigner é conhecida apenas para $N = 1$, quando coincide com a distribuição do tempo próprio, e para $N = 2$, respectivamente [28]

$$P_1^{(\beta)}(\tau) = \frac{(\beta/2)^{\beta/2}}{\Gamma(\beta/2)} \tau^{-2-\beta/2} e^{-\beta/(2\tau)} \quad (5.25)$$

e [29]

$$P_2^{(\beta)}(\tau) = \frac{\beta^{3\beta+2}\Gamma(3(\beta+1)/2)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(3\beta+2)} \times \tau^{-3(\beta+1)} U\left(\frac{\beta+1}{2}, 2(\beta+1); \beta/\tau\right) e^{-\beta/\tau} \quad (5.26)$$

onde $U(a, b; z)$ é a função de Kummer ou função confluyente hipergeométrica. As médias para $\beta = 1$ e $\beta = 4$ não convergem e para $\beta = 2$ é zero, quando deveriam ser bem definidas e independentes de β

$$\langle \tau_W \rangle = \frac{\tau_H}{N}. \quad (5.27)$$

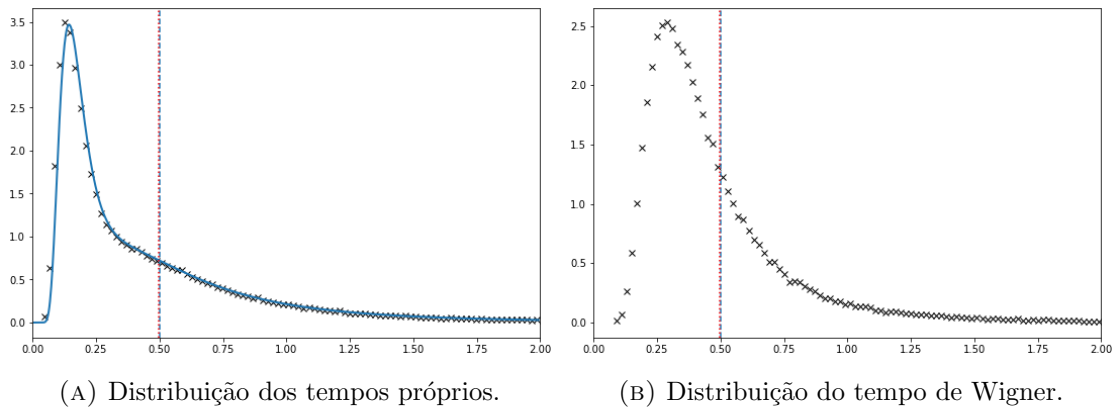


FIGURA 5.3: Estatísticas de tempo de retardo para a classe de simetria A e dimensão $N = 2$. A linha contínua em (A) é o resultado teórico. Os tracejados verticais são as médias das distribuições.

5.8 Conclusões

Como esperado, o algoritmo proposto por Mezzadri [34] para geração dos ensembles circulares possui desempenho superior ao Hamiltoniano, usado para comparação (tabela 5.4). No programa chamamos a abordagem de Mezzadri de *Scattering* e a Hamiltoniana de *Hamiltonian*.

Abaixo está o código utilizado para gerar uma matriz circular utilizando a abordagem Hamiltoniana. Na linha 9 vemos a dependência do método *gaussian*, já descrito na seção 5.2.

```

1 def circular(sym=SymmetryClass.A, n=2, m=160):
2     if ((sym in _symplectic_space) or (sym in _chiral) or sym ==
        SymmetryClass.C or sym == SymmetryClass.CI):

```

Categoria	Classe	<i>Hamiltonian</i>	<i>Scattering</i>
Wigner-Dyson	AI	30,28	0,97
Wigner-Dyson	A	46,21	0,89
Wigner-Dyson	AII	266,01	1,17
Quiral	AIII	393,21	1,17
Quiral	BDI	310,04	1,03
Quiral	CII	504,14	2,83
Bdg	D	33,16	0,74
Bdg	C	390,12	2,13
Bdg	DIII	303,43	0,96
Bdg	CI	397,54	2,46

TABELA 5.4: Comparação de desempenho entre as abordagens Hamiltoniana (*Hamiltonian*) e a proposta por Mezzadri (*Scattering*). Tempo, em segundos, para gerar e armazenar um ensemble circular com 10000 matrizes 4×4 para as respectivas simetrias. O método Hamiltoniano usa matrizes Gaussianas de dimensão 160×160 .

```

3     m = 2*m
4     n = 2*n
5
6     delta = 1./n
7     sigma = _mt.sqrt( m/(2.* _syms_beta[sym]) ) * ((2.* delta)/_mt.pi)
8
9     H = gaussian(sym, m, True, sigma)
10
11     global _W
12     global _Wadj
13     if (_W.shape[0] != m or _W.shape[1] != n):
14         _W = _np.zeros(shape=(m, n), dtype=float)
15         i, j = _np.indices(_W.shape)
16         _W[i==j] = _mt.sqrt(m*delta) / _np.pi
17         _Wadj = _W.conjugate().transpose()
18
19     A = 1j*_np.pi*_W.dot(_Wadj) - H
20     G = _np.linalg.inv( A )
21     S = _np.eye(n) - 2*_np.pi*1j*_Wadj.dot( G.dot(_W) )
22
23     return S

```

A concordância dos histogramas com as distribuições analíticas e com os resultados

conhecidos é excelente. A figuras 5.4 comparam as distribuições da condutância e as figuras 5.5 as distribuições da potência de ruído de disparo, para todas as classes de Wigner-Dyson ($\beta = 1, 2, 4$).

As figuras 5.6 comparam as distribuições dos tempos próprios para a classe A e $N = 1, \dots, 6$. Interessante perceber o degrau que surge a cada canal aberto. Não encontramos uma justificativa física para essa característica.

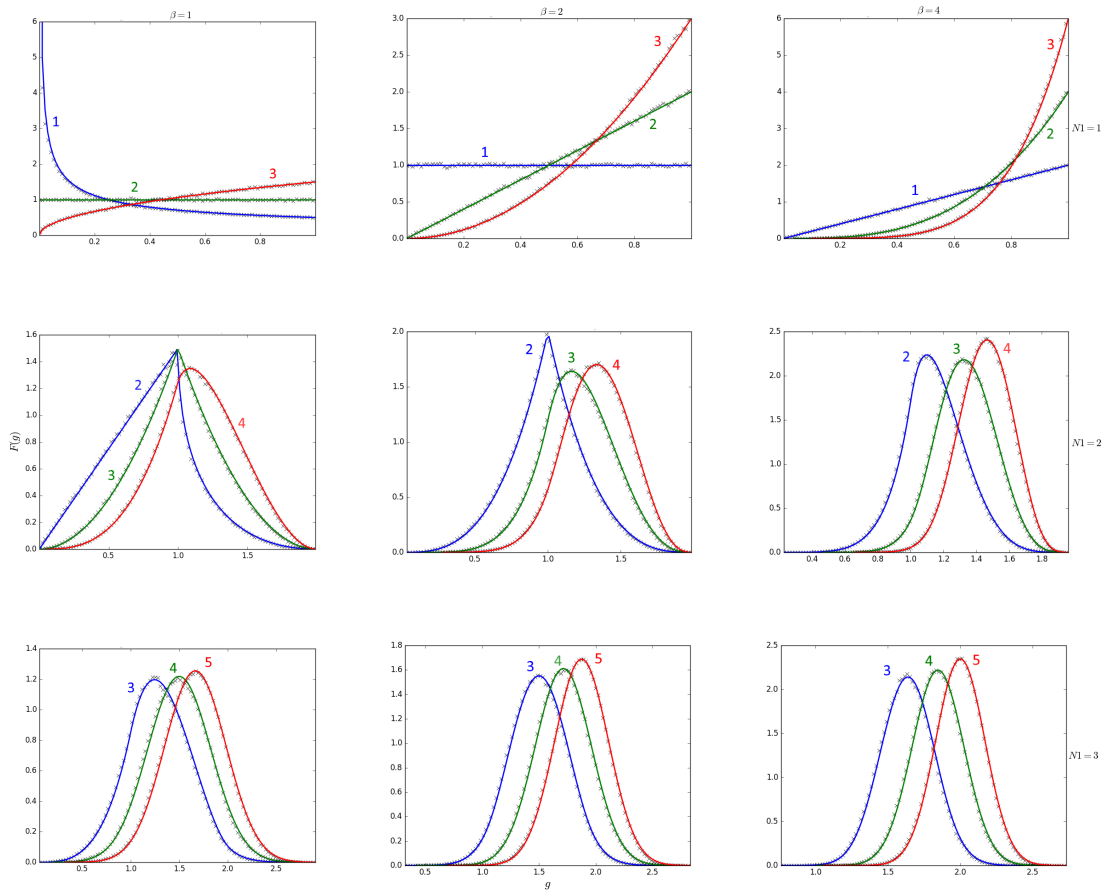


FIGURA 5.4: Distribuições da condutância. Cada coluna representa uma classe de simetria, respectivamente A, AI e AII. As linhas representam o número de canais abertos na primeira guia $N_1 = 1, \dots, 3$ e os índices coloridos o número de canais abertos na segunda guia $N_2 = N_1, \dots, N_1 + 2$. As linhas contínuas são os resultados teóricos.

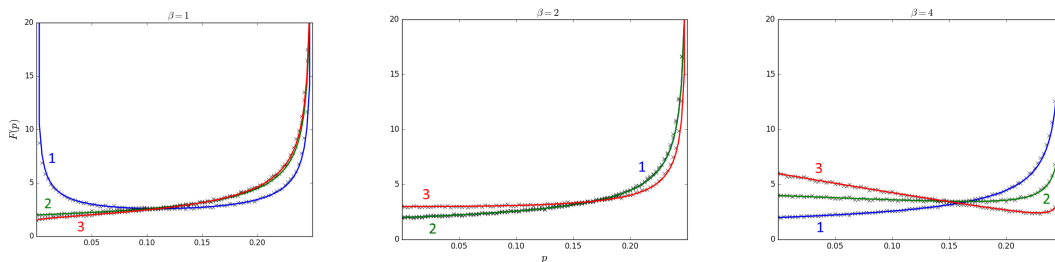


FIGURA 5.5: Distribuições da potência de ruído de disparo. As colunas representam as classes de simetria A, AI e AII, respectivamente. Na primeira guia temos apenas um canal aberto $N_1 = 1$ e os índices coloridos representam o número de canais abertos na segunda guia $N_2 = 1, \dots, 3$. As linhas contínuas são os resultados teóricos.

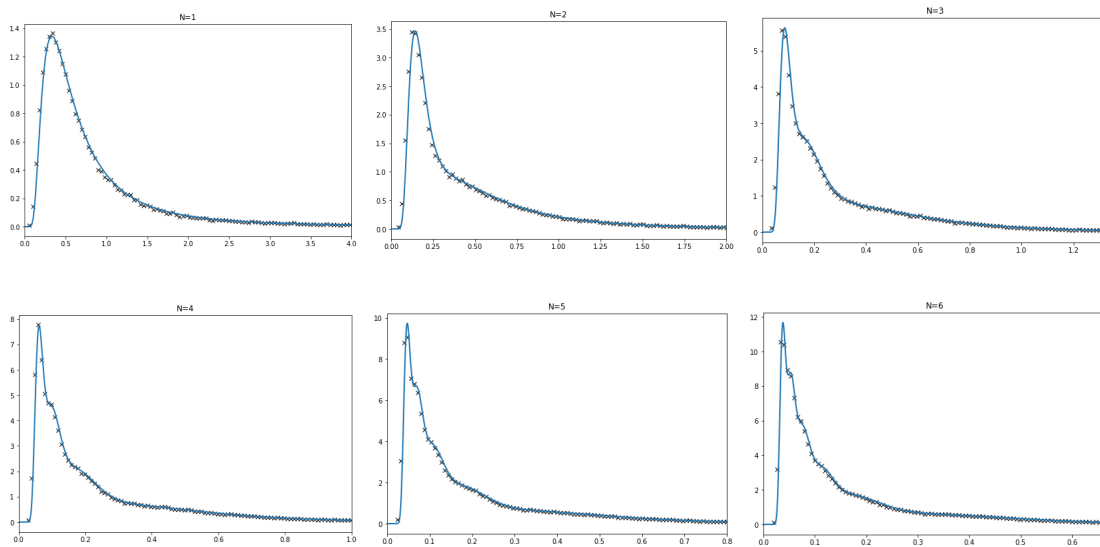


FIGURA 5.6: Distribuições dos tempos próprios para a classe de simetria A. O número de canais abertos cresce a partir do gráfico superior esquerdo $N = 1, \dots, 6$. As linhas contínuas são os resultados teóricos.

Capítulo 6

Perspectivas e Conclusão

Algumas ideias foram parcialmente abordadas durante o desenvolvimento deste trabalho. Outras se mostraram desafios muito grandes para o curto espaço de tempo. Aqui registramos algumas.

6.1 Singularidade da Variância do Tempo de Retardo

Vamos assumir uma região de espalhamento na qual a dinâmica clássica é fortemente caótica, conectada ao exterior por pequenas aberturas, perfeitamente transparentes. Nas aberturas existem N canais abertos, de maneira que as matrizes S e Q possuem dimensão $N \times N$.

Essa região de espalhamento, ou cavidade, assim definida, possui uma taxa de decaimento clássico bem definido Γ , de tal maneira que a probabilidade de uma partícula ser encontrada dentro da cavidade decai exponencialmente no tempo como $e^{-\Gamma t}$. A quantidade $\tau_D = 1/\Gamma$ é chamada de *tempo de permanência* clássica.

Quando o comprimento de onda da partícula é muito menor que o tamanho da cavidade, as matrizes S e Q são funções da energia fortemente oscilantes, sendo vantajoso uma abordagem estatística. Uma dessas abordagens é a TMA, onde é feita a hipótese de que S se comporta como uma matriz unitária aleatória, distribuída uniformemente no grupo unitário de acordo com o Ensemble de Jacobi.

A matriz Q , estatisticamente independente de S , é hermitiana e os inversos dos seus autovalores distribuídos de acordo com o Ensemble de Laguerre.

Nosso trabalho consistiu, em grande parte, de médias sobre estatísticas dos autovalores de Q . Durante a análise dos resultados, percebemos que as singularidades aparecem comumente nas estatísticas do tempo de retardo, mas uma em especial chamou nossa atenção. A singularidade na variância do tempo de Wigner em sistemas com simetria de reversão temporal ($\beta = 1$).

A média do tempo de Wigner é bem definida e depende apenas da quantidade de canais abertos, sendo independente da classe de simetria $\langle \tau_W \rangle = \tau_H/N$:

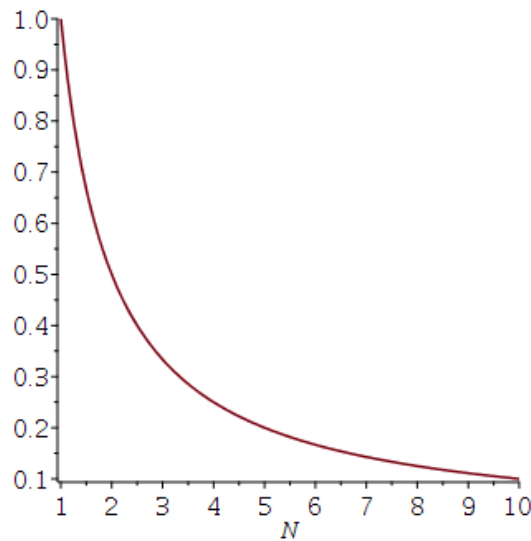


FIGURA 6.1: Média do tempo de Wigner em função do número de canais aberto N , com $\tau_H = 1$.

A variância, diferentemente, depende de N e β :

$$\begin{aligned} \langle \tau_W^2 \rangle_c &= \langle \tau_W^2 \rangle - \langle \tau_W \rangle^2 \\ &= \frac{(N^2\beta + N\beta - 2N + 2) \tau_H^2}{N^2 (N\beta - 2)(N + 1)} - \frac{\tau_H}{N} \\ &= \frac{4\tau_H^2}{N^2 (N\beta - 2)(N + 1)}. \end{aligned}$$

Na fórmula acima fica claro que, para $\beta = 1$ e $N = 2$, temos uma singularidade, também demonstrada na figura 6.2.

Nossa hipótese para justificar esse comportamento é que, para cavidades com reversão temporal preservada e dois canais abertos, são estabelecidos modos de Fabry-Pérot, onde

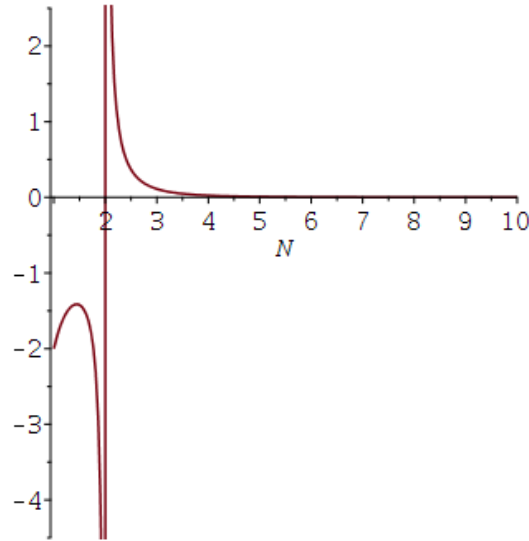


FIGURA 6.2: Variância do tempo de Wigner em função do número de canais aberto N .

a partícula espalhada, o elétron, não sente as aberturas e permanece na cavidade por um tempo indefinido.

Não respondemos algumas perguntas, como a partir de que momento não poderemos mais ignorar a interação elétron-elétron, caso exista acúmulo de carga na cavidade.

Também gostaríamos de destacar que essa singularidade pode ser estudada experimentalmente utilizando, por exemplo, ondas mecânicas em placa de alumínio [66].

6.2 Distribuições Completas da Condutância

Ao iniciarmos nosso trabalho com o algoritmo de geração de ensembles de matrizes aleatórias (capítulo 5) uma de nossas preocupações foi validar os resultados. A maneira mais direta para isso seria comparar os histogramas das distribuições obtidos numericamente com funções das distribuições exatas.

Seguindo os passos de Kumar e Pandey [67] conseguimos resultados para qualquer número de canais abertos N_1 e N_2 e, também, todas as classes de simetria da categoria de Wigner-Dyson (tabela 2.9).

Os autores mostraram que a Transformada de Laplace das distribuições podem ser expressas em termos de determinantes, para o caso unitário, e Pfaffianos, para os casos

ortogonal e simplético. Após calculadas, a *Transformada Inversa de Laplace* determina as distribuições exatas.

As integrais envolvidas nos cálculos são calculadas usando o método de integração sobre variáveis alternantes de Mehta [3].

Os resultados existem para cada combinação de número de canais abertos e simetria. Portanto, torna-se trabalhoso efetuar todos os cálculos manualmente. Assim, decidimos criar um programa no Mathematica para obtermos a função de qualquer distribuição da condutância para as classes de Wigner-Dyson. O programa é baseado fortemente na capacidade do Mathematica conseguir resolver as Transformadas Inversas de Laplace.

Nossa intenção inicial era criar a rotina simbólica no Python usando a biblioteca Sympy. Assim, as expressões para as distribuições exatas seriam obtidas diretamente a partir do nosso programa (capítulo 5). Infelizmente, a implementação da Transformada Inversa de Laplace simbólica no Sympy não é capaz de lidar com os resultados obtidos. De fato, nem mesmo o Maple foi capaz disso.

Mas gerar as expressões externamente não foi um grande problema porque as distribuições convergem rapidamente para uma gaussiana. Portanto, para qualquer $N_{1,2} > 4$, usamos a distribuição gaussiana, sendo necessário introduzir manualmente apenas as distribuições para $N_{1,2} \leq 4$.

Com relação ao trabalho de Kumar e Pandey, fizemos duas pequenas contribuições. A primeira foi utilizar o peso completo de Jacobi

$$w(x) = x^{\alpha-1}(1-x)^{\gamma-1}.$$

Comumente usa-se $\gamma = 1$, negligenciando o termo $(1-x)^{\gamma-1}$.

A segunda foi que usamos um método diferente do da integração sobre variáveis alternantes para resolver o caso unitário $\beta = 2$. A seguir iremos detalhar esse método alternativo usando o peso completo:

$$P_N^{(\beta)}(T_1, \dots, T_N) = \frac{1}{Z_{\omega \equiv J}(\beta, N)} \prod_{j < k} |T_j - T_k|^\beta \prod_{i=1}^N T_i^{\alpha-1} (1 - T_i)^{\gamma-1}.$$

A nossa variável de interesse é a condutância

$$\mathcal{G} = \sum_{i=1}^N T_i. \quad (6.1)$$

Portanto, a distribuição completa da condutância é dada por

$$F_N^{(\beta)}(g) = \frac{1}{Z_{\omega \equiv J}(\beta, N)} \int_0^1 d^N T \delta \left[g - \sum_{i=1}^N T_i \right] \prod_{j < k} |T_j - T_k|^\beta \prod_{i=1}^N T_i^{\alpha-1} (1 - T_i)^{\gamma-1}.$$

Aplicando a Transformada de Laplace, removemos a função Delta de Dirac da integral [60].

$$\tilde{F}_N^{(\beta)}(s) = \mathcal{L} \left\{ F_N^{(\beta)}(g) \right\}$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_N^{(\beta)}(s) &= \frac{1}{Z_{\omega \equiv J}(\beta, N)} \int_0^1 d^N T e^{-s \sum_{i=1}^N T_i} \prod_{j < k} |T_j - T_k|^\beta \prod_{i=1}^N T_i^{\alpha-1} (1 - T_i)^{\gamma-1} \\ &= \frac{1}{Z_{\omega \equiv J}(\beta, N)} \int_0^1 d^N T |\Delta_N|^\beta \prod_{i=1}^N T_i^{\alpha-1} (1 - T_i)^{\gamma-1} e^{-s T_i}. \end{aligned}$$

Para continuarmos precisamos definir a classe de simetria. Como já mencionado, faremos $\beta = 2$

$$\tilde{F}_N^{(2)}(s) = \frac{1}{Z_{\omega \equiv J}(2, N)} \int_0^1 dT_1 \cdots dT_N |\Delta_N|^2 \prod_{i=1}^N T_i^{\alpha-1} (1 - T_i)^{\gamma-1} e^{-s T_i}.$$

Como os T_i são os autovalores da matriz $N \times N$ hermitiana, podemos escrever a integral em termos de determinantes

$$\begin{aligned} \tilde{F}_N^{(2)}(s) &= \frac{1}{Z_{\omega \equiv J}(2, N)} \int_0^1 d^N T \Delta_N \Delta_N^\dagger \det (T_i^{\alpha-1} (1 - T_i)^{\gamma-1}) \det (e^{-s T_i}) \\ &= \frac{1}{Z_{\omega \equiv J}(2, N)} \int_0^1 d^N T \det (T_i^{j-1}) \det (T_j^{i-1}) \det (T_i^{\alpha-1} (1 - T_i)^{\gamma-1}) \det (e^{-s T_i}) \\ &= \frac{1}{Z_{\omega \equiv J}(2, N)} \int_0^1 d^N T \det (T_i^{\alpha+j-2} (1 - T_i)^{\gamma-1} e^{-s T_i}) \det (T_j^{i-1}). \end{aligned}$$

Para resolver essa integral utilizaremos o caso particular do teorema de Heine [36]

$$\int_{[a,b]^N} \det(f_i(x_j)) \det(g_i(x_j)) dx = N! \det(C), \quad (6.2)$$

no qual $f_i(z)$ e $g_i(z)$ são funções quaisquer com $i = 1, \dots, N$ e

$$(C)_{ij} = \int_{[a,b]} f_i(z)g_j(z)dz. \quad (6.3)$$

Usando essa identidade reduzimos a integral em muitas variáveis à várias integrais em uma variável

$$\begin{aligned} \tilde{F}_N^{(2)}(s) &= \frac{N!}{Z_{\omega \equiv J}(2, N)} \det \left[\int_0^1 x^{\alpha+i+j-3} (1-x)^{\gamma-1} e^{-sx} dx \right]_{1 \leq i, j \leq N} \\ &= \frac{N!}{Z_{\omega \equiv J}(2, N)} \det \left[\frac{\Gamma(1+a_{ij})\Gamma(1+b)}{\Gamma(2+a_{ij}+b)} {}_1F_1(1+a_{ij}, 2+a_{ij}+b, -s) \right]_{1 \leq i, j \leq N} \\ &= \frac{N!}{Z_{\omega \equiv J}(2, N)} \det [B(1+a_{ij}, 1+b) {}_1F_1(1+a_{ij}, 2+a_{ij}+b, -s)]_{1 \leq i, j \leq N} \\ &= \frac{N!}{Z_{\omega \equiv J}(2, N)} \det \left[\frac{a_{ij}!b!}{(a_{ij}+b+1)!} {}_1F_1(1+a_{ij}, 2+a_{ij}+b, -s) \right]_{1 \leq i, j \leq N} \\ &= \frac{N!(b!)^N}{Z_{\omega \equiv J}(2, N)} \det \left[\frac{a_{ij}!}{(a_{ij}+b+1)!} {}_1F_1(1+a_{ij}, 2+a_{ij}+b, -s) \right]_{1 \leq i, j \leq N} \\ &= \frac{N!(b!)^N}{Z_{\omega \equiv J}(2, N)} \det \left[\frac{1}{\prod_{k=0}^b (a_{ij}+b+1-k)} {}_1F_1(1+a_{ij}, 2+a_{ij}+b, -s) \right]_{1 \leq i, j \leq N}, \end{aligned}$$

onde na segunda linha fizemos $a_{ij} = \alpha + i + j - 3$ e $b = \gamma - 1$. ${}_1F_1$ é a função hipergeométrica confluyente, ou função de Kummer.

Recuperando as variáveis originais, encontramos nosso resultado final

$$\tilde{F}_N^{(2)}(s) = \frac{N![(\gamma-1)!]^N}{Z_{\omega \equiv J}(2, N)} \det \left[\frac{{}_1F_1(\alpha+i+j-2, \alpha+i+j-2+\gamma, -s)}{\prod_{k=0}^{\gamma-1} (\alpha+i+j-3+\gamma-k)} \right]_{1 \leq i, j \leq N}.$$

A partir do resultado acima podemos encontrar a distribuição completa para qualquer N , α , γ aplicando a Transformada Inversa de Laplace.

Como perspectiva deixamos a extensão dos cálculos e do algoritmo para as demais classes de simetria, Quiral e BdG. Também sugerimos a melhoria das rotinas do Sympy responsáveis pela Transformada Inversa de Laplace simbólica.

Abaixo listamos o código do Mathematica.

```

1 n1 = 2;
2 n2 = 2;
3 n = Min[n1, n2];
4 m = Max[n1, n2];

```

```

5 B = 2; (* beta *)
6 A = B*(m - n + 1)/2; (* alpha *)
7 G = 1; (* gamma *)
8
9 (* Pfaffiano *)
10 Pf[A_] := If[Length[A] == 0, 1,
11 Module[{L, A1, MatrixDelete},
12 MatrixDelete[M_, i_] := Delete[#, i] & /@ Delete[M, i];
13 L = Length[A]; A1 = MatrixDelete[A, 1];
14 Sum[(-1)^i (A[[1]][[i]] Pf[MatrixDelete[A1, i - 1]]), {i, 2, L}]]]
15
16 (* Funcao de Particao *)
17 Z = Product[(Gamma[A + j*B/2]*Gamma[G + j*B/2]*Gamma[1 + (j + 1)*B/2]) / (
18 Gamma[A + G + (n + j - 1)*B/2]*Gamma[B/2 + 1]), {j, 0, n - 1}];
19
20 (* Determinante da integral da transformada de Laplace *)
21 Fs = (Factorial[n]*(1/Z)*
22 Switch[B
23 , 2,
24 Det[
25 Table[Beta[A + i + j - 2, G]*
26 Hypergeometric1F1[A + i + j - 2, A + i + j - 2 + G, -s]
27 , {i, 1, n}, {j, 1, n}]]
28 , 4,
29 (Gamma[G]^n)*Pf[
30 Table[
31 (j - i)*
32 Hypergeometric1F1[A + i + j - 3, A + i + j - 3 + G, -s]/
33 Product[A + i + j - 4 + G - k, {k, 0, G - 1}]
34 , {i, 1, 2*n}, {j, 1, 2*n}]]];
35
36 (* Inversa de Laplace *)
37 F = InverseLaplaceTransform[Fs, s, g];
38 StringForm["F = “”, F] (* funcao analitica fechada para os \
39 parametros informados *)
40 Plot[F, {g, 0, n}]

```

A seguir temos a distribuição (6.4) e o gráfico 6.3 gerados pelo código usado como exemplo. Compare com o gráfico 5.2a.

$$F = 2(g^3 - 2(g^3 - 3g^2 + 6g - 4)\theta(g - 1) + (g - 2)^3\theta(g - 2)) \quad (6.4)$$

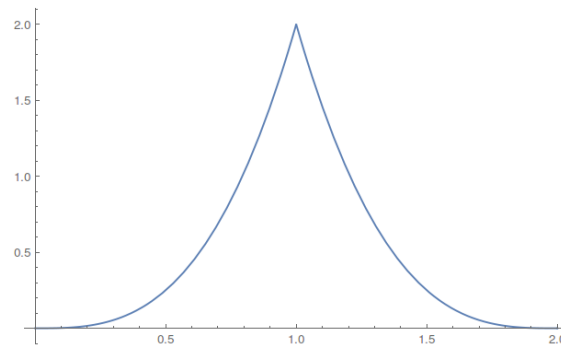


FIGURA 6.3: Distribuição da condutância, classe A e $N_1 = N_2 = 2$.

Apêndice A

Biblioteca Maple TDP (Time Delay Package)

A biblioteca Maple TDP é uma implementação do método da função geratriz hipergeométrica para a matriz de tempo de retardo.

Ela possui dependência da biblioteca MOPS [42] e usa suas funções listadas na tabela A.1.

Função	Descrição
<i>'MOPS/Jack/c'</i>	Calcula os coeficientes do polinômio de Jack
<i>gsfact</i>	O <i>shifted factorial</i> , também conhecido como símbolo de Pochhammer
<i>par</i>	Produz uma lista com todas as partições de um inteiro
$\& <$, $\& >$, $\& \leq$, $\& \geq$	Operadores de comparação lexicográfica

TABELA A.1: Funções da biblioteca MOPS utilizadas pela TDP.

As funções públicas da biblioteca TDP estão listadas na tabela A.2 e as privadas em A.3.

Função	Descrição
<i>parttimes</i>	Determina a quantidade de vezes que um inteiro aparece na partição
<i>partfactorial</i>	Calcula o fatorial de uma partição
<i>pm2e</i>	Muda a base de um monômio de soma de potências para a base de funções simétricas elementares
<i>p2e</i>	Muda a base de um polinômio de soma de potências para a base de funções simétricas elementares
<i>mn2p</i>	Muda a base de uma função monomial simétrica para a base de soma de potências
<i>am2p</i>	Muda a base de uma função monomial simétrica aumentada (augmented) para a base de soma de potências
<i>mediamomento</i>	Calcula a média de um momento generalizado
<i>cumulantewigner</i>	Calcula o cumulante da média do tempo de Wigner
<i>mediapermanente</i>	Calcula a média de um Permanente dividido por $N!$ e $\psi_i(x) = x^{-\lambda_i}$

TABELA A.2: Funções públicas da biblioteca TDP.

Função	Descrição
<i>v</i>	Calcula o coeficiente da expansão do polinômio de Jack em funções monomiais
<i>g</i>	Coeficiente gama da equação (3.32)
<i>monomialcoeff</i>	Retorna o coeficiente de um monômio num determinado polinômio
<i>x2parts</i>	Coleta as partições e seus respectivos coeficientes
<i>e2parts</i>	Coleta as partições e de uma função simétrica elementar e seus respectivos coeficientes
<i>p2parts</i>	Coleta as partições e de uma soma de potências e seus respectivos coeficientes
<i>mediae</i>	Calcula a média de uma função simétrica elementar no inverso das variáveis (3.32)

TABELA A.3: Funções privadas da biblioteca TDP.

Referências Bibliográficas

- [1] John Wishart. The Generalised Product Moment Distribution in Samples from a Normal Multivariate Population. *Biometrika*, 20A(1/2):32, July 1928. ISSN 00063444. doi: 10.2307/2331939. URL <http://www.jstor.org/stable/2331939?origin=crossref>.
- [2] Thomas Guhr, Axel Müller–Groeling, and Hans A. Weidenmüller. Random-matrix theories in quantum physics: common concepts. *Physics Reports*, 299(4-6):189–425, June 1998. ISSN 03701573. doi: 10.1016/S0370-1573(97)00088-4. URL <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0370157397000884>.
- [3] Madan Lal Mehta. *Random Matrices*. Academic Press, October 2004. ISBN 978-0-08-047411-3. Google-Books-ID: Kp3Nx03_gMwC.
- [4] C. W. J. Beenakker. Random-matrix theory of quantum transport. *Reviews of Modern Physics*, 69(3):731–808, July 1997. ISSN 0034-6861, 1539-0756. doi: 10.1103/RevModPhys.69.731. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.69.731>.
- [5] Piet Wibertus Brouwer. *On the Random-matrix Theory of Quantum Transport*. 1997. Google-Books-ID: 2G2UGwAACAAJ.
- [6] Eugene P. Wigner. On the Distribution of the Roots of Certain Symmetric Matrices. *The Annals of Mathematics*, 67(2):325, March 1958. ISSN 0003486X. doi: 10.2307/1970008. URL <http://www.jstor.org/stable/1970008?origin=crossref>.
- [7] Freeman J. Dyson. Statistical Theory of the Energy Levels of Complex Systems. III. *Journal of Mathematical Physics*, 3(1):166–175, January 1962. ISSN 0022-2488, 1089-7658. doi: 10.1063/1.1703775. URL <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.1703775>.

- [8] Freeman J. Dyson. Statistical Theory of the Energy Levels of Complex Systems. I. *Journal of Mathematical Physics*, 3(1):140–156, January 1962. ISSN 0022-2488. doi: 10.1063/1.1703773. URL <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.1703773>.
- [9] Freeman J. Dyson. Statistical Theory of the Energy Levels of Complex Systems. II. *Journal of Mathematical Physics*, 3(1):157–165, January 1962. ISSN 0022-2488. doi: 10.1063/1.1703774. URL <http://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.1703774>.
- [10] O. Bohigas, M. J. Giannoni, and C. Schmit. Characterization of Chaotic Quantum Spectra and Universality of Level Fluctuation Laws. *Physical Review Letters*, 52(1):1–4, January 1984. ISSN 0031-9007. doi: 10.1103/PhysRevLett.52.1. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.52.1>.
- [11] R. A. Jalabert, J.-L. Pichard, and C. W. J. Beenakker. Universal Quantum Signatures of Chaos in Ballistic Transport. *Europhysics Letters (EPL)*, 27(4):255–260, August 1994. ISSN 0295-5075, 1286-4854. doi: 10.1209/0295-5075/27/4/001. URL <http://stacks.iop.org/0295-5075/27/i=4/a=001?key=crossref.20002cd51c29f1afc2b4b322898cfb41>.
- [12] C. W. J. Beenakker. Universality in the random-matrix theory of quantum transport. *Physical Review Letters*, 70(8):1155–1158, February 1993. ISSN 0031-9007. doi: 10.1103/PhysRevLett.70.1155. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.70.1155>.
- [13] Harold U. Baranger and Pier A. Mello. Mesoscopic transport through chaotic cavities: A random S -matrix theory approach. *Physical Review Letters*, 73(1):142–145, July 1994. ISSN 0031-9007. doi: 10.1103/PhysRevLett.73.142. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.73.142>.
- [14] Supriyo Datta. *Electronic Transport in Mesoscopic Systems*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. ISBN 978-0-511-80577-6. URL <http://ebooks.cambridge.org/ref/id/CB09780511805776>. DOI: 10.1017/CBO9780511805776.
- [15] Pier A. Mello and N. Kumar. *Quantum transport in mesoscopic systems: complexity and statistical fluctuations, a maximum-entropy viewpoint*. Mesoscopic physics and nanotechnology. Oxford University Press, Oxford ; New York, 2004. ISBN 978-0-19-852582-0.

- [16] Yuli V. Nazarov and Yaroslav M. Blanter. *Quantum transport: introduction to nanoscience*. Cambridge University Press, Cambridge, UK ; New York, 2009. ISBN 978-0-521-83246-5. OCLC: ocn244767824.
- [17] Carlo Beenakker and Christian Schönberger. Quantum Shot Noise. *Physics Today*, 56(5):37–42, May 2003. ISSN 0031-9228, 1945-0699. doi: 10.1063/1.1583532. URL <http://physicstoday.scitation.org/doi/10.1063/1.1583532>.
- [18] Pier A. Mello and Harold U. Baranger. Interference phenomena in electronic transport through chaotic cavities: An information-theoretic approach. pages 281–334, 1999. doi: 10.1063/1.58232. URL <http://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.58232>.
- [19] Peter Forrester. *Log-gases and random matrices*. London Mathematical Society monographs. Princeton University Press, Princeton, 2010. ISBN 978-0-691-12829-0.
- [20] P. J. Forrester. Quantum conductance problems and the Jacobi ensemble. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 39(22):6861, 2006. ISSN 0305-4470. doi: 10.1088/0305-4470/39/22/004. URL <http://stacks.iop.org/0305-4470/39/i=22/a=004>.
- [21] Jyoichi Kaneko. Selberg Integrals and Hypergeometric Functions Associated with Jack Polynomials. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 24(4):1086–1110, July 1993. ISSN 0036-1410, 1095-7154. doi: 10.1137/0524064. URL <http://epubs.siam.org/doi/10.1137/0524064>.
- [22] Felix T. Smith. Lifetime Matrix in Collision Theory. *Physical Review*, 118(1):349–356, 1960. doi: 10.1103/PhysRev.118.349. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.118.349>.
- [23] J.J.M. Verbaarschot, H.A. Weidenmüller, and M.R. Zirnbauer. Grassmann integration in stochastic quantum physics: The case of compound-nucleus scattering. *Physics Reports*, 129(6):367–438, December 1985. ISSN 03701573. doi: 10.1016/0370-1573(85)90070-5. URL <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0370157385900705>.
- [24] S Iida, H.A Weidenmüller, and J.A Zuk. Statistical scattering theory, the supersymmetry method and universal conductance fluctuations. *Annals of Physics*, 200(2):

- 219–270, June 1990. ISSN 00034916. doi: 10.1016/0003-4916(90)90275-S. URL <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/000349169090275S>.
- [25] P. W. Brouwer. Generalized circular ensemble of scattering matrices for a chaotic cavity with nonideal leads. *Physical Review B*, 51(23):16878–16884, June 1995. ISSN 0163-1829, 1095-3795. doi: 10.1103/PhysRevB.51.16878. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.51.16878>.
- [26] P W Brouwer, K M Frahm, and C W J Beenakker. Distribution of the quantum mechanical time-delay matrix for a chaotic cavity. *Waves in Random Media*, 9(2): 91–104, April 1999. ISSN 0959-7174, 1361-6676. doi: 10.1088/0959-7174/9/2/303. URL <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1088/0959-7174/9/2/303>.
- [27] Marcel Novaes. Statistics of time delay and scattering correlation functions in chaotic systems. I. Random matrix theory. *Journal of Mathematical Physics*, 56(6):062110, June 2015. ISSN 0022-2488, 1089-7658. doi: 10.1063/1.4922746. URL <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.4922746>.
- [28] Víctor A. Gopar, Pier A. Mello, and Markus Büttiker. Mesoscopic Capacitors: A Statistical Analysis. *Physical Review Letters*, 77(14):3005–3008, September 1996. ISSN 0031-9007, 1079-7114. doi: 10.1103/PhysRevLett.77.3005. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.77.3005>.
- [29] Dmitry V. Savin, Yan V. Fyodorov, and Hans-Jürgen Sommers. Reducing nonideal to ideal coupling in random matrix description of chaotic scattering: Application to the time-delay problem. *Physical Review E*, 63(3), February 2001. ISSN 1063-651X, 1095-3787. doi: 10.1103/PhysRevE.63.035202. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.63.035202>.
- [30] F. Mezzadri and N. J. Simm. Tau-Function Theory of Chaotic Quantum Transport with $\beta = 1, 2, 4$. *Communications in Mathematical Physics*, 324(2):465–513, December 2013. ISSN 0010-3616, 1432-0916. doi: 10.1007/s00220-013-1813-z. URL <http://link.springer.com/10.1007/s00220-013-1813-z>.
- [31] S M Nishigaki, D M Gangardt, and A Kamenev. Correlation functions of the BC Calogero Sutherland model. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 36(12):3137–3151, March 2003. ISSN 0305-4470. doi: 10.1088/0305-4470/36/12/

316. URL <http://stacks.iop.org/0305-4470/36/i=12/a=316?key=crossref.cfee57c756a980ca1b2f20b41869dbf2>.
- [32] I. C. Fulga, F. Hassler, and A. R. Akhmerov. Scattering theory of topological insulators and superconductors. *Physical Review B*, 85(16), April 2012. ISSN 1098-0121, 1550-235X. doi: 10.1103/PhysRevB.85.165409. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.85.165409>.
- [33] Philippe Jacquod, Robert S. Whitney, Jonathan Meair, and Markus Büttiker. Onsager relations in coupled electric, thermoelectric, and spin transport: The tenfold way. *Physical Review B*, 86(15), October 2012. ISSN 1098-0121, 1550-235X. doi: 10.1103/PhysRevB.86.155118. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.86.155118>.
- [34] Francesco Mezzadri. How to generate random matrices from the classical compact groups. *Notices of the American Mathematical Society*, 54(5):592 – 604, 2007. ISSN 0002-9920.
- [35] A. F. Macedo-Junior and A. M. S. Macêdo. Quantum transport: A unified approach via a multivariate hypergeometric generating function. *International Journal of Modern Physics B*, 28(26):1450178, October 2014. ISSN 0217-9792, 1793-6578. doi: 10.1142/S0217979214501781. URL <http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0217979214501781>.
- [36] Jean-Gabriel Luque and Pierpaolo Vivo. Nonlinear random matrix statistics, symmetric functions and hyperdeterminants. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 43(8):085213, 2010. ISSN 1751-8121. doi: 10.1088/1751-8113/43/8/085213. URL <http://stacks.iop.org/1751-8121/43/i=8/a=085213>.
- [37] Richard P Stanley. Some combinatorial properties of Jack symmetric functions. *Advances in Mathematics*, 77(1):76–115, September 1989. ISSN 0001-8708. doi: 10.1016/0001-8708(89)90015-7. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0001870889900157>.
- [38] I. G. Macdonald. *Symmetric Functions and Hall Polynomials*. Oxford University Press, Oxford, 2 edition edition, July 1999. ISBN 978-0-19-850450-4.

- [39] Michel Lassalle. Jack Polynomials and Some Identities for Partitions. *Transactions of the American Mathematical Society*, 356(9):3455–3476, 2004. ISSN 0002-9947. URL <http://www.jstor.org/stable/3844984>.
- [40] Marcel Novaes. Energy-dependent correlations in the S-matrix of chaotic systems. *Journal of Mathematical Physics*, 57(12):122105, December 2016. ISSN 0022-2488, 1089-7658. doi: 10.1063/1.4972288. URL <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.4972288>.
- [41] Francesco Mezzadri, Alexi K Reynolds, and Brian Winn. Moments of the eigenvalue densities and of the secular coefficients of beta-ensembles. *Nonlinearity*, 30(3):1034–1057, March 2017. ISSN 0951-7715, 1361-6544. doi: 10.1088/1361-6544/aa518c. URL <http://stacks.iop.org/0951-7715/30/i=3/a=1034?key=crossref.c2a572138a32ac241334b78e81105931>.
- [42] Ioana Dumitriu, Alan Edelman, and Gene Shuman. MOPS: Multivariate orthogonal polynomials (symbolically). *Journal of Symbolic Computation*, 42(6):587–620, June 2007. ISSN 07477171. doi: 10.1016/j.jsc.2007.01.005. URL <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0747717107000090>.
- [43] Peter J. Forrester and S. Ole Warnaar. The importance of the Selberg integral. *arXiv:0710.3981 [math-ph]*, October 2007. URL <http://arxiv.org/abs/0710.3981>. arXiv: 0710.3981.
- [44] Mircea Merca. Augmented monomials in terms of power sums. *SpringerPlus*, 4, November 2015. ISSN 2193-1801. doi: 10.1186/s40064-015-1506-5. URL <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC4656270/>.
- [45] R. J. Muirhead. Systems of Partial Differential Equations for Hypergeometric Functions of Matrix Argument. *The Annals of Mathematical Statistics*, 41(3):991–1001, 1970. ISSN 0003-4851. URL <http://www.jstor.org/stable/2239251>.
- [46] Robb J. Muirhead. Expressions for some hypergeometric functions of matrix argument with applications. *Journal of Multivariate Analysis*, 5(3):283–293, September 1975. ISSN 0047259X. doi: 10.1016/0047-259X(75)90046-9. URL <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0047259X75900469>.
- [47] Claude Mahaux and Hans A. Weidenmüller. *Shell-model approach to nuclear reactions*. 1969. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1969smat.book.....M>.

- [48] Eugene P. Wigner. Lower Limit for the Energy Derivative of the Scattering Phase Shift. *Physical Review*, 98(1):145–147, 1955. doi: 10.1103/PhysRev.98.145. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.98.145>.
- [49] M. V. Berry. Semiclassical Theory of Spectral Rigidity. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 400(1819):229–251, August 1985. ISSN 1364-5021, 1471-2946. doi: 10.1098/rspa.1985.0078. URL <http://rspa.royalsocietypublishing.org/cgi/doi/10.1098/rspa.1985.0078>.
- [50] Charles E. Porter. *Statistical Theories of Spectra: Fluctuations : a Collection of Reprints and Original Papers*. Acad. Press, 1965. Google-Books-ID: Kf9QAAAAMAAJ.
- [51] Eric Akkermans, Assa Auerbach, Joseph E. Avron, and Boris Shapiro. Relation between persistent currents and the scattering matrix. *Physical Review Letters*, 66(1):76–79, January 1991. ISSN 0031-9007. doi: 10.1103/PhysRevLett.66.76. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.66.76>.
- [52] R. Landauer. Electrical transport in open and closed systems. *Zeitschrift for Physik B Condensed Matter*, 68(2-3):217–228, June 1987. ISSN 0722-3277, 1434-6036. doi: 10.1007/BF01304229. URL <http://link.springer.com/10.1007/BF01304229>.
- [53] M Buttiker. Capacitance, admittance, and rectification properties of small conductors. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 5(50):9361–9378, December 1993. ISSN 0953-8984, 1361-648X. doi: 10.1088/0953-8984/5/50/017. URL <http://stacks.iop.org/0953-8984/5/i=50/a=017?key=crossref.b132e34ced5fa8f5b1a3894ff572b43b>.
- [54] M. Büttiker, A. Prêtre, and H. Thomas. Dynamic conductance and the scattering matrix of small conductors. *Physical Review Letters*, 70(26):4114–4117, June 1993. ISSN 0031-9007. doi: 10.1103/PhysRevLett.70.4114. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.70.4114>.
- [55] Y. V. Fyodorov and D. V. Savin. Resonance Scattering of Waves in Chaotic Systems. *ArXiv e-prints*, 1003:arXiv:1003.0702, March 2010. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2010arXiv1003.0702F>.

- [56] J. Friedel. Metallic alloys. *Il Nuovo Cimento*, 7(S2):287–311, September 1958. ISSN 0029-6341, 1827-6121. doi: 10.1007/BF02751483. URL <http://link.springer.com/10.1007/BF02751483>.
- [57] Christophe Texier and Alain Comtet. Universality of the Wigner Time Delay Distribution for One-Dimensional Random Potentials. *Physical Review Letters*, 82(21):4220–4223, May 1999. ISSN 0031-9007, 1079-7114. doi: 10.1103/PhysRevLett.82.4220. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.82.4220>.
- [58] Christophe Texier and Markus Büttiker. Local Friedel sum rule on graphs. *Physical Review B*, 67(24), June 2003. ISSN 0163-1829, 1095-3795. doi: 10.1103/PhysRevB.67.245410. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.67.245410>.
- [59] J. Friedel. XIV. The distribution of electrons round impurities in monovalent metals. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 43(337):153–189, February 1952. ISSN 1941-5982, 1941-5990. doi: 10.1080/14786440208561086. URL <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/14786440208561086>.
- [60] George Arfken and Hans Hermann Weber. *Física matemática: métodos matemáticos para engenharia e física*. Elsevier, Rio de Janeiro, RJ, 2007. ISBN 978-85-352-2050-6. OCLC: 817114178.
- [61] F. Mezzadri and N. J. Simm. Moments of the transmission eigenvalues, proper delay times, and random matrix theory. I. *Journal of Mathematical Physics*, 52(10):103511, October 2011. ISSN 0022-2488, 1089-7658. doi: 10.1063/1.3644378. URL <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.3644378>.
- [62] M. Marciani, P. W. Brouwer, and C. W. J. Beenakker. Time-delay matrix, midgap spectral peak, and thermopower of an Andreev billiard. *Physical Review B*, 90(4), July 2014. ISSN 1098-0121, 1550-235X. doi: 10.1103/PhysRevB.90.045403. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.90.045403>.
- [63] K. Zyczkowski and M. Kus. Random unitary matrices. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 27(12):4235, 1994. ISSN 0305-4470. doi: 10.1088/0305-4470/27/12/028. URL <http://stacks.iop.org/0305-4470/27/i=12/a=028>.
- [64] Morris L. Eaton. *Multivariate statistics: a vector space approach*. Number 53 in Lecture notes-monograph series / Institute of Mathematical Statistics. Inst. of

- Mathematical Statistics, Beachwood, Ohio, 2007. ISBN 978-0-940600-69-0. OCLC: 254964252.
- [65] E. Anderson, editor. *LAPACK users' guide*. Software, environments, tools. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 3rd ed edition, 1999. ISBN 978-0-89871-447-0.
- [66] E. Flores-Olmedo, A. M. Martínez-Argüello, M. Martínez-Mares, G. Báez, J. A. Franco-Villafañe, and R. A. Méndez-Sánchez. Experimental evidence of coherent transport. *Scientific Reports*, 6(1), July 2016. ISSN 2045-2322. doi: 10.1038/srep25157. URL <http://www.nature.com/articles/srep25157>.
- [67] Santosh Kumar and Akhilesh Pandey. Conductance distributions in chaotic mesoscopic cavities. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 43(28): 285101, July 2010. ISSN 1751-8113, 1751-8121. doi: 10.1088/1751-8113/43/28/285101. URL <http://stacks.iop.org/1751-8121/43/i=28/a=285101?key=crossref.f68d5a886ccaafc80be05df52bd215d4>.
- [68] C. A. A. de Carvalho and H. M. Nussenzveig. Time delay. *Physics Reports*, 364(2): 83–174, June 2002. ISSN 0370-1573. doi: 10.1016/S0370-1573(01)00092-8. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157301000928>.
- [69] Christian Krattenthaler. Advanced Determinant Calculus. *arXiv:math/9902004*, February 1999. URL <http://arxiv.org/abs/math/9902004>. arXiv: math/9902004.
- [70] F. Mezzadri and N. J. Simm. Moments of the transmission eigenvalues, proper delay times and random matrix theory II. *Journal of Mathematical Physics*, 53(5):053504, May 2012. ISSN 0022-2488, 1089-7658. doi: 10.1063/1.4708623. URL <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.4708623>.
- [71] C. H Lewenkopf and H. A Weidenmüller. Stochastic versus semiclassical approach to quantum chaotic scattering. *Annals of Physics*, 212(1):53–83, November 1991. ISSN 0003-4916. doi: 10.1016/0003-4916(91)90372-F. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/000349169190372F>.
- [72] D. V. Savin, H.-J. Sommers, and W. Wieczorek. Nonlinear statistics of quantum transport in chaotic cavities. *Physical Review B*, 77(12):125332, March 2008.

- doi: 10.1103/PhysRevB.77.125332. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.77.125332>.
- [73] Christophe Texier. Wigner time delay and related concepts: Application to transport in coherent conductors. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 82:16–33, August 2016. ISSN 13869477. doi: 10.1016/j.physe.2015.09.041. URL <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1386947715302228>.
- [74] Gordei B Lesovik and Ivan A Sadovskyy. Scattering matrix approach to the description of quantum electron transport. *Physics-Uspekhi*, 54(10):1007–1059, October 2011. ISSN 1063-7869, 1468-4780. doi: 10.3367/UFNe.0181.201110b.1041. URL <http://stacks.iop.org/1063-7869/54/i=10/a=R02?key=crossref.0245c003937eb77cf8ae736c91a411b9>.
- [75] B. A. Khoruzhenko, D. V. Savin, and H.-J. Sommers. Systematic approach to statistics of conductance and shot-noise in chaotic cavities. *Physical Review B*, 80(12), September 2009. ISSN 1098-0121, 1550-235X. doi: 10.1103/PhysRevB.80.125301. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.80.125301>.
- [76] Ioana Dumitriu and Alan Edelman. Matrix models for beta ensembles. *Journal of Mathematical Physics*, 43(11):5830–5847, November 2002. ISSN 0022-2488, 1089-7658. doi: 10.1063/1.1507823. URL <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.1507823>.
- [77] Fabio Deelan Cunden, Francesco Mezzadri, Nick Simm, and Pierpaolo Vivo. Correlators for the Wigner–Smith time-delay matrix of chaotic cavities. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 49(18):18LT01, May 2016. ISSN 1751-8113, 1751-8121. doi: 10.1088/1751-8113/49/18/18LT01. URL <http://stacks.iop.org/1751-8121/49/i=18/a=18LT01?key=crossref.07b25fbbc6d2d5a794ab6c9082c3db60>.
- [78] Ricardo Marino, Satya N. Majumdar, Grégory Schehr, and Pierpaolo Vivo. Number statistics for beta-ensembles of random matrices: Applications to trapped fermions at zero temperature. *Physical Review E*, 94(3), September 2016. ISSN 2470-0045, 2470-0053. doi: 10.1103/PhysRevE.94.032115. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.94.032115>.

- [79] P. W. Brouwer, K. M. Frahm, and C. W. J. Beenakker. Quantum Mechanical Time-Delay Matrix in Chaotic Scattering. *Physical Review Letters*, 78(25):4737–4740, June 1997. ISSN 0031-9007, 1079-7114. doi: 10.1103/PhysRevLett.78.4737. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.78.4737>.
- [80] A. M. S. Macêdo and J. T. Chalker. Exact results for the level density and two-point correlation function of the transmission-matrix eigenvalues in quasi-one-dimensional conductors. *Physical Review B*, 49(7):4695–4702, February 1994. ISSN 0163-1829, 1095-3795. doi: 10.1103/PhysRevB.49.4695. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.49.4695>.
- [81] Harold U. Baranger, Rodolfo A. Jalabert, and A. Douglas Stone. Quantum-chaotic scattering effects in semiconductor microstructures. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 3(4):665–682, October 1993. ISSN 1054-1500, 1089-7682. doi: 10.1063/1.165928. URL <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.165928>.
- [82] Christophe Texier and Satya N. Majumdar. Wigner Time-Delay Distribution in Chaotic Cavities and Freezing Transition. *Physical Review Letters*, 110(25), June 2013. ISSN 0031-9007, 1079-7114. doi: 10.1103/PhysRevLett.110.250602. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.110.250602>.
- [83] Sílvio R. A Salinas. *Introdução à física estatística*. EDUSP, São Paulo, 2005. ISBN 978-85-314-0386-6. OCLC: 319216900.
- [84] David J. (David Jeffrey) Griffiths and Lara Freitas. *Mecânica quântica*. Pearson Prentice Hall, São Paulo, 2011. ISBN 978-85-7605-927-1. OCLC: 817310169.
- [85] J. J Sakurai and Jim Napolitano. *Mecânica quântica moderna*. Bookman, Porto Alegre, 2013. ISBN 978-85-65837-09-5. OCLC: 940085109.
- [86] Alberto Leporati and Sara Felloni. Three “quantum” algorithms to solve 3-SAT. *Theoretical Computer Science*, 372(2-3):218–241, March 2007. ISSN 03043975. doi: 10.1016/j.tcs.2006.11.026. URL <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0304397506008851>.
- [87] Dorit Aharonov and Tomer Naveh. Quantum NP - A Survey. *arXiv:quant-ph/0210077*, October 2002. URL <http://arxiv.org/abs/quant-ph/0210077>. arXiv: quant-ph/0210077.

- [88] Noson S. Yanofsky and Mirco A. Mannucci. *Quantum computing for computer scientists*. New York : Cambridge University Press, Cambridge, 2008. ISBN 978-0-521-87996-5. OCLC: ocn212859032.
- [89] C.W.J. Beenakker, M. Kindermann, C. M. Marcus, and A. Yacoby. Entanglement Production in a Chaotic Quantum Dot. In Igor V. Lerner, Boris L. Altshuler, and Yuval Gefen, editors, *Fundamental Problems of Mesoscopic Physics*, volume 154, pages 167–177. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2004. ISBN 978-1-4020-2192-3. URL http://link.springer.com/10.1007/1-4020-2193-3_10. DOI: 10.1007/1-4020-2193-3_10.
- [90] Victor A. Gopar and Diego Frustaglia. Statistics of orbital entanglement production in quantum-chaotic dots. *Physical Review B*, 77(15), April 2008. ISSN 1098-0121, 1550-235X. doi: 10.1103/PhysRevB.77.153403. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.77.153403>.
- [91] Dario Villamaina and Pierpaolo Vivo. Entanglement production in nonideal cavities and optimal opacity. *Physical Review B*, 88(4), July 2013. ISSN 1098-0121, 1550-235X. doi: 10.1103/PhysRevB.88.041301. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.88.041301>.
- [92] C. W. J. Beenakker. Applications of random matrix theory to condensed matter and optical physics. *arXiv:0904.1432 [cond-mat, physics:physics]*, April 2009. URL <http://arxiv.org/abs/0904.1432>. arXiv: 0904.1432.
- [93] Marcel Novaes. Asymptotics of Selberg-like integrals by lattice path counting. *Annals of Physics*, 326(4):828–838, April 2011. ISSN 00034916. doi: 10.1016/j.aop.2010.09.007. URL <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0003491610001648>.
- [94] Masanori Ohya and Igor V. Volovich. New quantum algorithm for studying NP-complete problems. *Reports on Mathematical Physics*, 52(1):25–33, August 2003. ISSN 0034-4877. doi: 10.1016/S0034-4877(03)90002-4. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0034487703900024>.

- [95] Sergey M. Frolov, Sébastien R. Plissard, Stevan Nadj-Perge, Leo P. Kouwenhoven, and Erik P. A. M. Bakkers. Quantum computing based on semiconductor nanowires. *MRS Bulletin*, 38(10):809–815, October 2013. ISSN 0883-7694, 1938-1425. doi: 10.1557/mrs.2013.205. URL <https://www.cambridge.org/core/journals/mrs-bulletin/article/quantum-computing-based-on-semiconductor-nanowires/028CDAA26012CE0F93BA1BB569559DD3>.