



Universidade Federal Rural de Pernambuco
Departamento de Física

Programa de Pós-graduação em Física Aplicada

**DIMENSÃO FRACTAL, ESPECTRO
MULTIFRACTAL E LACUNARIDADE DAS
SUPERFÍCIES DOS IMPLANTES
DENTÁRIOS**

Daniel de Souza Santos

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Recife
28/07/2014

Universidade Federal Rural de Pernambuco
Departamento de Física

Daniel de Souza Santos

**DIMENSÃO FRACTAL, ESPECTRO MULTIFRACTAL E
LACUNARIDADE DAS SUPERFÍCIES DOS IMPLANTES
DENTÁRIOS**

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em Física Aplicada do Departamento de Física da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: *Prof. Dr. Borko Stosic*

Recife
28/07/2014

Dedico este trabalho à Jesus de Nazaré.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pelo dom da vida, pelas inspirações do Espírito Santo, sem o qual este trabalho jamais poderia ser realizado.

Agradeço também a minha querida mãe Marluce de Souza e meu pai Manoel Messias, pelos seus sábios ensinamentos e pelas palmadas, sem as quais talvez eu não tivesse seguido o caminho correto.

À minha namorada Aline Santos, por toda a sua paciência e compreensão nesse período tão conturbado.

Aos incríveis companheiros Adson, Maelyson, Milton e Mário, com os quais aprendi a aprender Física e a amar esta tão bela ciência. A minha professora do primário Tia Núbia, pela sua tremenda paciência com os pequeninos. Aos meus professores do ensino médio Fabiano Cavalcante e Carlos Japa, que despertaram meu interesse pela Física e pela carreira docente. Aos meus professores de graduação Sérgio Coutinho, Marcelo Leite, Brady pelo excelente exemplo de organização e dedicação.

Ao amigo resolvedor de broncas da secretaria do Departamento de Física Neto, pelos inúmeros favores que lhe pedi e sempre me atendeu prontamente.

Aos professores Borko Stosic e Tatijana Stosic, pela paciência e pelos diversos conhecimentos que me transmitiram ao longo desse período.

Aos companheiros de turma: Carlos Augusto, Danilo, Chico, Thiago, Ivelton, Rubim, Izabelly, Marília, Raphael, Cosmo, Aguinaldo dentre outros.

Agradeço também à Igreja Cristã Episcopal pelo seu acolhimento e aconselhamentos ao longo deste período. Aos meus amigos integrantes da Banda 4: Edlon, Gabriel, Guga, Kaísa, Lucas, Marcelinho e Rafael, pelas nossas tocadinhas nos cultos de juventude nos sábados a noite.

Aos amigos Patrício, Lucélia, Cleyton, Cledson, Pâmela, Adelson, Lourdes e tantos outros. Aos familiares Alexandre, Luiz, Daniela, Fabiana, Nando, Tio Fernando, Tia Estela pelo acolhimento durante minha graduação.

Ao ator Paul Zaloom (Beekman) e seus companheiros Mark Ritts (Lester) e Alana Ubach (Rosie) por despertar o meu sonho de ser cientista com o programa “O mundo de Beekman”.

Aos professores Ailton, Pedro, Anderson, Romaguera.

Agradeço também à CAPES pelo financiamento, possibilitando minha permanência neste programa.

“Creio no Espírito Santo, Na Santa Igreja Católica, na comunhão dos Santos, Remissão de pecados, na Ressurreição da carne e na vida eterna”.

— (Credo Apostólico)

RESUMO

O processo de osseointegração representa um fator fundamental para o sucesso de aplicação de implantes dentários. Os critérios que se utilizam na avaliação deste processo são a estabilidade mecânica primária e fixação biológica posterior, que podem ser influenciadas por vários fatores. Entre esses fatores, os mais importantes são a arquitetura óssea original e sua densidade, o desenho do implante e o tratamento de superfície. Assim sendo, introdução de novos métodos eficientes para quantificação de geometria de superfície representa um fator importante na direção de diminuir o tempo e o custo de avaliação da qualidade dos implantes. Com o objetivo de comparar os diferentes métodos de tratamento de superfície dos implantes, este trabalho propõe a aplicação da análise fractal através do cálculo da dimensão fractal, do espectro multifractal e do espectro de lacunaridade, para quantificar: i) a topologia de superfície de implantes de Titânio submetidos aos diferentes tratamentos, e ii) a distribuição espacial de cristais formados ao longo da imersão no Simulador de Fluidos Corpóreos (SFC). A análise proposta foi aplicada nas imagens de microscopia eletrônica de varredura de superfície dos implantes de Titânio submetidos as combinações de tratamentos: a) ataque ácido, b) jateamento com óxido de Alumínio e c) Fosfato de Cálcio, resultados provenientes de um experimento realizado no Departamento de Odontologia da Universidade Federal de Pernambuco. As imagens foram feitas antes e depois de imersão no SFC. Na análise de superfície dos implantes antes e depois de imersão no SFC os métodos utilizados não mostraram uma diferença significativa, indicando a necessidade de estudo de estruturas e cristais depositados ao longo da imersão no SFC. Os resultados indicam que os implantes tratados com ataque ácido (para todas as combinações de outros tratamentos) possuem superfície mais adequada para osseointegração, resultando em uma deposição dos cristais com mais uniforme tamanho, bem como mais uniforme distribuição espacial.

Palavras-chave: Fractal, Dimensão Fractal, Espectro Multifractal, Lacunaridade, Implantes.

ABSTRACT

The process of osseointegration represents a fundamental factor for the success of application of dental implants. Criteria that are used for evaluation of this process are primary mechanical stability, and the posterior biological fixation, that may be influenced by diverse factors. Among these factors, the most important are the original bone architecture and density, the implant design, and the implant surface treatment. Therefore, introducing novel efficient methods for quantification of surface geometry represents an important factor in the direction of diminishing the time and cost involved in implant quality evaluation. With the objective to compare different methods of implant surface treatment, in this work application of fractal analysis is proposed through calculation of fractal dimension, multifractal spectrum and lacunarity, in order to quantify: i) surface topology of titanium implants subjected to different treatments, and ii) spatial distribution of crystals formed during submersion in the body fluid simulator (BFS). The proposed analysis is applied on scanning electron microscopy images of titanium implants subjected to combinations of treatments with: a) acid attack, b) sand-blasting with aluminum oxide, and c) calcium phosphate, resulting from an experiment performed at the Dentistry Department of the Federal University of Pernambuco, Recife, Brazil. The images were taken before and after submersion in the BFS. Analysis of images of implant surfaces before submersion does not demonstrate a significant difference among the treatments, indicating the necessity of studies of the crystal structures deposited during immersion in the BFS. The results indicate that implants treated with acid attack (for all the combinations of other treatments) may have surface properties more adequate for osseointegration, resulting in crystal deposits of more uniform size and spatial distribution.

Keywords: Fractal, fractal dimension, multifractal spectra, lacunarity, Implant.

SUMÁRIO

Capítulo 1—Introdução	1
Capítulo 2—Fundamentos	3
2.1 Osseointegração	3
2.2 Fractais	4
2.3 Dimensão fractal	5
2.4 Método da contagem de caixas (“Box Counting”)	5
2.5 Dimensão de informação	7
2.6 Dimensão de correlação	7
2.7 Lacunaridade	8
2.8 Multifractais	10
2.8.1 Espectro Multifractal	11
2.8.2 Estimação direta do Espectro de singularidades	12
Capítulo 3—Metodologia	14
3.1 O Experimento	14
3.2 Organização dos grupos	14
3.3 Tratamento das superfícies	15
3.4 Imagens	16
3.5 Dimensão fractal	21
3.6 Lacunaridade	21
3.7 Espectro Multifractal	21
Capítulo 4—Resultados e Discussão	23
4.1 Dimensão Fractal	23
4.2 Lacunaridade	24
4.3 Multifractais	29
Capítulo 5—Conclusão	38

LISTA DE FIGURAS

2.1	(A) Logo após o implante e durante a fase inicial de cicatrização a rosca do implante não está firme no sítio ósseo. (1) Contato entre o rosca do implante e o osso (imobilização), (2) Hematoma na cavidade fechada – fronteira entre a rosca do implante e o osso. (3) Ossos danificados por traumas térmicos e mecânicos inevitáveis. (4) Ossos originais sem danos, e (5) implante. (B) (6) Durante o período de cicatrização, o hematoma se transforma em um novo osso através da formação de calos ósseos. (7) Ossos danificados que são restaurados através de revascularização e remineralização. (C) Uma vez curado, o tecido ósseo vital está em contato com a superfície de fixação, não há tecidos intermediários. (8) Remodelagem causada pela mastigação. (D) (9) Quando ocorre falha nos implantes, não ocorre mineralização do tecido conjuntivo e surge uma espécie de pseudo-artrose na zona de fronteira do implante.	4
2.2	Exemplo da aplicação do método Box Counting a um objeto fractal . . .	6
2.3	Gráfico para o cálculo da dimensão fractal pelo método box-counting . .	6
2.4	$\Lambda(2) = 1.53$ $\Lambda(2) = 1.18$	8
2.5	$\Lambda(2) = 1.00$	8
2.6	Cálculo da lacunaridade para um mapa aleatório 12×12 (adaptado) . .	10
3.1	Grupo A antes da imersão em SFC. (A) Imagem Original, (B) Imagem Binarizada.	16
3.2	Grupo A depois da imersão em SFC. (A) Imagem Original, (B) Imagem Binarizada.	17
3.3	Grupo B antes da imersão em SFC. (A) Imagem Original, (B) Imagem Binarizada.	17
3.4	Grupo B depois da imersão em SFC. (A) Imagem Original, (B) Imagem Binarizada.	17
3.5	Grupo C antes da imersão em SFC. (A) Imagem Original, (B) Imagem Binarizada.	18
3.6	Grupo C depois da imersão em SFC. (A) Imagem Original, (B) Imagem Binarizada.	18
3.7	Grupo D antes da imersão em SFC. (A) Imagem Original, (B) Imagem Binarizada.	18
3.8	Grupo D depois da imersão em SFC. (A) Imagem Original, (B) Imagem Binarizada.	19
3.9	Grupo E antes da imersão em SFC. (A) Imagem Original, (B) Imagem Binarizada.	19

3.10	Grupo E depois da imersão em SFC. (A) Imagem Original, (B) Imagem Binarizada.	19
3.11	Grupo F antes da imersão em SFC. (A) Imagem Original, (B) Imagem Binarizada.	20
3.12	Grupo F depois da imersão em SFC. (A) Imagem Original, (B) Imagem Binarizada.	20
3.13	Grupo G antes da imersão em SFC. (A) Imagem Original, (B) Imagem Binarizada.	20
3.14	Grupo G depois da imersão em SFC. (A) Imagem Original, (B) Imagem Binarizada.	21
3.15	Grupo H depois da imersão em SFC. (A) Imagem Original, (B) Imagem Binarizada.	21
4.1	Espectro de Lacunaridade do Grupo A (Ataque ácido + Jateamento + Fosfato de Cálcio).	24
4.2	Espectro de Lacunaridade do Grupo B (Sem tratamento).	25
4.3	Espectro de Lacunaridade do Grupo C (Jateamento + Fosfato de Cálcio).	25
4.4	Espectro de Lacunaridade do Grupo D (Ataque ácido + Jateamento).	26
4.5	Espectro de Lacunaridade do Grupo E (Fosfato de Cálcio).	26
4.6	Espectro de Lacunaridade do Grupo F (Ataque ácido).	27
4.7	Espectro de Lacunaridade do Grupo G (Ataque ácido + Fosfato de Cálcio).	27
4.8	Espectro de Lacunaridade do Grupo H (Jateamento).	28
4.9	Espectro Multifractal e Dimensão Generalizada do grupo A (Ataque ácido + Jateamento + Fosfato de Cálcio)	29
4.10	Espectro Multifractal e Dimensão Generalizada do grupo B (Sem tratamento).	30
4.11	Espectro Multifractal e Dimensão Generalizada do grupo C (Jateamento + Fosfato de Cálcio)	31
4.12	Espectro Multifractal e Dimensão Generalizada do grupo D (Ataque ácido + Jateamento).	32
4.13	Espectro Multifractal e Dimensão Generalizada do grupo E (Fosfato de Cálcio).	32
4.14	Espectro Multifractal e Dimensão Generalizada do grupo F (Ataque ácido).	33
4.15	Espectro Multifractal e Dimensão Generalizada do grupo G (Ataque ácido + Fosfato de Cálcio).	34

LISTA DE TABELAS

2.1	Exemplo de cálculo de Lacunaridade de uma rede.	10
3.1	Organização em grupos:	15
3.2	Composição química do Simulador de Fluidos Corpóreo	16
4.1	Dimensão fractal (desvio padrão) dos implantes antes da imersão em SFC.	23
4.2	Dimensão fractal (desvio padrão) dos implantes depois da imersão em SFC.	23
4.3	β , $\Lambda(2)$ dos implantes antes da imersão em SFC.	28
4.4	β , $\Lambda(2)$ dos implantes depois da imersão em SFC.	28
4.5	Coefficientes do polinômio associado ao Grupo A:	30
4.6	Coefficientes do polinômio associado ao Grupo B:	30
4.7	Coefficientes do polinômio associado ao Grupo C:	31
4.8	Coefficientes do polinômio associado ao Grupo D:	32
4.9	Coefficientes do polinômio associado ao Grupo E:	33
4.10	Coefficientes do polinômio associado ao Grupo F:	33
4.11	Coefficientes do polinômio associado ao Grupo G:	34
4.12	Coefficientes do polinômio associado ao Grupo H:	35
4.13	α_0 dos implantes antes da imersão em SFC:	35
4.14	α_0 dos implantes depois da imersão em SFC:	35
4.15	W dos implantes antes da imersão em SFC:	36
4.16	W dos implantes depois da imersão em SFC:	36
4.17	Assimetria dos gráficos antes da imersão em SFC:	37
4.18	Assimetria dos gráficos depois da imersão em SFC:	37

INTRODUÇÃO

Os implantes dentários têm se tornado cada vez mais comuns com o passar dos anos, pois são a melhor opção de tratamento para substituição de dentes perdidos devido à doença, trauma ou procedimento cirúrgico. O número desses procedimentos é cerca de 1 milhão por ano [1] e são altamente bem sucedidos, pois mantém a integridade dos tecidos envolventes [2]. Obviamente, tem se realizado um maior número de pesquisas por parte de médicos, odontólogos, químicos, físicos e profissionais de outras áreas, para melhorar as tecnologias utilizadas nesses tratamentos. Com a grande variedade de tratamentos possíveis, cada um com uma série de propriedades específicas, é necessário analisar com cautela qual é o mais adequado para cada paciente. Uma boa fixação da prótese nos ossos da mandíbula é decisiva para garantir o sucesso do tratamento [3].

São muitas as causas para a falha prematura dos implantes, muitos deles causados pela falta de compreensão do fenômeno de cicatrização dos ossos circundantes [4]. Deve se observar que os implantes estão sujeitos a muitos ciclos de carga ao longo da vida, principalmente os produzidos devido à mastigação. A fadiga causada por esse esforço pode danificá-los, causando sérios danos à saúde do paciente, e essa é uma das razões para a constante evolução de seu design e da sua geometria [5].

A osseointegração é definida como uma conexão estrutural e funcional direta entre o tecido ósseo vivo e a superfície do implante submetido a carga. Um processo de osseointegração bem sucedido implica que o tecido mineralizado deve estar em contato a nanômetros, de forma que não exista material significativo interposto funcionalmente na interface. Diversas propriedades devem ser avaliadas para que este processo ocorra satisfatoriamente, por exemplo, interação de fluidos biológicos e adesão celular [3]. Outra característica importante é a geometria original do osso [6], a rugosidade e a porosidade do material da prótese a qual pode melhorar fixação precoce, evitando assim o afrouxamento dos implantes e a descentralização do stress [7].

A tomografia computadorizada é o tipo de imagem mais utilizado para o planejamento de implantes e ferramentas de computação gráfica mais avançadas permitem conhecer medidas de tamanho, distância e textura dos tecidos [8]. Como dito anteriormente, a rugosidade é um fator importante para a osseointegração e as superfícies possuem dimensionalidade fractal, ou seja, a dimensão que ocupam no espaço é fracionária. A geometria fractal tem sido largamente usada em problemas de análise de imagens médicas [9, 10].

O presente trabalho propõe o estudo das seguintes grandezas: dimensão fractal, espectro de lacunaridade e espectro multifractal de imagens da superfície de implantes dentários com o intuito de avaliar alguns dos tratamentos disponibilizados no mercado. Para isso, um experimento com implantes tratados de diversas formas foi realizado no departamento de Odontologia da Universidade Federal de Pernambuco [11]. Imagens das

superfícies dos implantes foram feitas antes e depois da imersão em um fluido que simula a região do organismo onde os implantes seriam colocados. Com essas imagens foi possível calcular as grandezas fractais acima citadas.

2.1 OSSEOINTEGRAÇÃO

O conceito inicial de osseointegração resultou de estudos microscópicos da medula óssea da fíbula de coelhos, utilizando-se um microscópio de alta resolução e delicada preparação cirúrgica, montada por Per-Ingvar Branemark, cirurgião sueco, em 1952 [12]. Esse experimento na região intravascular revelou a conexão íntima existente entre medula, ossos e articulações. Estudos subsequentes foram feitos *in vivo*, com ênfase na reação tecidual em diversos tipos de lesão: mecânica, térmica, química e reológica. Havia a preocupação de identificar possibilidades terapêuticas que minimizassem os efeitos de tais traumas e desenvolver procedimentos que promovessem a cicatrização. A cooperação de cirurgiões plásticos e otorrinolaringologistas permitiu estudar o reparo de defeitos mandibulares e substituição de ossículos [13]. Branemark percebeu que quando o Titânio puro entrou em contato direto com o tecido vivo, ambos cresceram juntos formando uma aderência biológica permanente e a esse fenômeno ele chamou osseointegração [12].

Inicialmente, esse conceito foi definido como a deposição óssea direta sobre as superfícies de implantes dentários, fato esse também conhecido como “Anquilose Funcional”. Para explicar os mecanismos envolvidos na osseointegração é necessário conhecer conceitos de biologia, fisiologia, anatomia, cirurgia e regeneração de tecidos. Ela pode ser observada em diversas áreas, não apenas em implantes dentários, mas também implantes maxilofaciais, substituição de articulações danificadas e colocação de membros artificiais [12, 14].

No presente texto, a osseointegração é entendida como a conexão entre o tecido vivo e a superfície do implante e diversas propriedades devem ser avaliadas para que este sucesso ocorra satisfatoriamente, por exemplo, interação com fluidos biológicos e adesão celular [3]. Outras características importantes são: a geometria original do osso [6], a rugosidade [1] e porosidade do material da prótese, a qual pode melhorar a fixação precoce, evitando o afrouxamento dos implantes [7].

Um particular problema ocorre na parte posterior do maxilar, onde a camada de osso cortical é muito fina e dificulta consideravelmente a adaptação [6]. O Titânio tem sido largamente utilizado neste tratamento [1, 7], porém o processo de cicatrização óssea em torno de um implante desse material necessita de mais entendimento por ser biologicamente complexa e pelo pequeno número de experimentos realizados *in vivo*. Experiências com coelhos tem sido realizados [7] com intuito de investigar esse processo de cicatrização.

Nos últimos anos, a tomografia computadorizada se tornou a modalidade de imagem mais utilizada para o planejamento de implantes, pois permitem a visualização em duas e três dimensões e, em projetos mais avançados, até animações [15, 8]. Trabalhos recentes [8] tem mostrado que através das ferramentas de computação gráfica, é possível conhecer

medidas de tamanho, distância e textura de tecidos. Simulações computacionais tem sido realizadas objetivando entender as causas de possíveis falhas nos tratamentos com implantes dentários [4].

A figura 2.1 mostra um resumo do processo de osseointegração [13]:

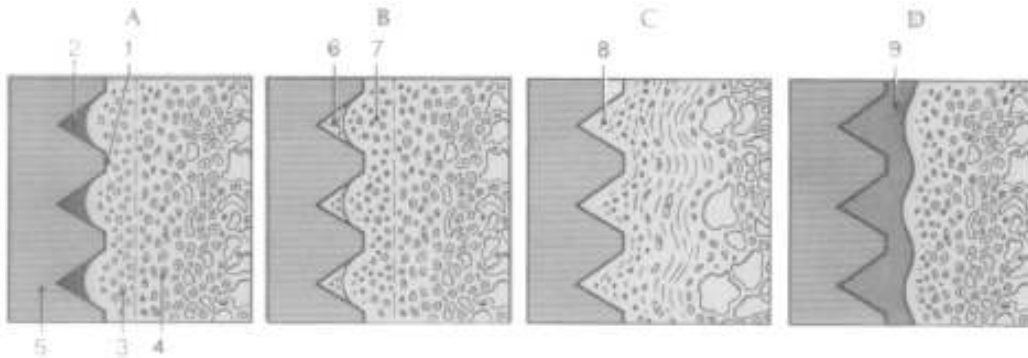


Figura 2.1 (A) Logo após o implante e durante a fase inicial de cicatrização a rosca do implante não está firme no sítio ósseo. (1) Contato entre o rosca do implante e o osso (imobilização), (2) Hematoma na cavidade fechada – fronteira entre a rosca do implante e o osso. (3) Ossos danificados por traumas térmicos e mecânicos inevitáveis. (4) Ossos originais sem danos, e (5) implante. (B) (6) Durante o período de cicatrização, o hematoma se transforma em um novo osso através da formação de calos ósseos. (7) Ossos danificados que são restaurados através de revascularização e remineralização. (C) Uma vez curado, o tecido ósseo vital está em contato com a superfície de fixação, não há tecidos intermediários. (8) Remodelagem causada pela mastigação. (D) (9) Quando ocorre falha nos implantes, não ocorre mineralização do tecido conjuntivo e surge uma espécie de pseudo-artrose na zona de fronteira do implante.

Alguns fatores são decisivos para o êxito da osseointegração [12]: biocompatibilidade do implante, características do modelo, características da superfície do implante, estado do paciente e técnica cirúrgica.

Como foi dito anteriormente, a rugosidade é um fator importante para a osseointegração e superfícies possuem dimensionalidade fractal, ou seja, a dimensão que ocupam no espaço é fracionária.

2.2 FRACTAIS

Conhecer a geometria que melhor descreve a natureza é uma questão que tem atravessado gerações e até o momento não tem uma resposta unívoca e objetiva. Embora a geometria Euclídica seja conhecida há séculos, e até seja bastante utilizada no formalismo matemático de alguns problemas físicos, ainda é bastante limitada quando exposta à situações mais complexas. Ao longo dos anos diversas outras ferramentas matemáticas foram desenvolvidas com o intuito de melhorar o tratamento dos problemas, tais como a teoria dos sistemas complexos, a dinâmica não linear e a geometria fractal, dentre outras [15].

O termo fractal vem do latim *fractus* e significa fragmentado. Este termo foi usado pela primeira vez pelo matemático francês Benoit Mandelbrot em seu livro *The Fractal Geometry of Nature* publicado em 1977 [16]. Embora este seja o primeiro livro publicado sobre fractais, estes já eram conhecidos há bastante tempo. A curva de Koch, por exemplo, foi estudada e publicada num artigo em 1904 [17].

No passado, funções que não apresentassem um comportamento regular eram consideradas patológicas e havia pouco interesse em estudá-las. Com o passar do tempo esta postura mudou, pois percebeu-se que estas curvas não-suaves poderiam descrever vários fenômenos naturais. Esta geometria possibilitou descrever a forma irregular da natureza e outros objetos complexos perante os quais a geometria euclidiana fica bastante limitada [9].

Com o auxílio da geometria fractal, é possível estudar os mais variados sistemas, tais como: sequências musicais [18, 19], imagens médicas [20, 21, 22], estudos de mobilidade urbana [23] Raízes de plantas [24], tratamentos de câncer [25, 26] dentre outros.

As principais características dos objetos fractais são [15]:

1. Autosimilaridade: O objeto é invariante sob transformação de escala;
2. Extrema irregularidade: O objeto deve ser fragmentado ou bastante rugoso;
3. Possuir uma dimensão não inteira.

De posse dessas características é possível calcular algumas grandezas que serão descritas nas seções subsequentes.

2.3 DIMENSÃO FRACTAL

O conceito de dimensão é de fundamental importância para as ciências da natureza. O cálculo da dimensão está no cerne do estudo dos fractais, pois esta grandeza é uma descrição quantitativa do modo como os pontos de um objeto estão distribuídos no espaço.

O conceito de Dimensão de Hausdorff (DH) é conhecido desde 1919, mas sua aplicação em geometria fractal só foi utilizada por Benoit Mandelbrot em 1977, segundo o qual um fractal é um objeto cuja Dimensão de Hausdorff seja inferior à dimensão do espaço no qual está inserido. A métrica de Hausdorff, da qual segue o conceito de dimensão de Hausdorff está por trás da construção matemática dos fractais. Entretanto, o cálculo de DH é bastante complicado e normalmente a dimensão fractal é calculada por meio de métodos alternativos.[27]. Para uma formalização matemática mais detalhada sobre dimensão e métrica de Hausdorff, consultar [28].

Os métodos mais utilizados para o cálculo da dimensão fractal são: Método da contagem de caixas (*Box Counting*), dimensão de informação e dimensão de Correlação, os quais estão apresentados nas seções subsequentes.

2.4 MÉTODO DA CONTAGEM DE CAIXAS ("BOX COUNTING")

Este método tem sido amplamente utilizado desde a década de 1930. Sua popularidade é devida, em grande parte, a sua simplicidade de cálculo e por representar uma

estimativa empírica [28]. Tomando-se um objeto fractal e colocando-o sobre uma folha de papel quadriculado, na qual cada quadrícula tem tamanho r , é possível contar o número de quadrados $N(r)$ que são necessários para cobrir toda a área estudada, como ilustrado na figura 2.2. A dimensão fractal (FD) é definida como:

$$DF = - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log(N(r))}{\log(r)} \quad (2.1)$$

Deve-se tomar o tamanho da quadrícula tão pequeno quanto possível. Este conceito pode ser expandido para um volume, no qual o objeto analisado é dividido em cubos elementares de tamanhos iguais. Contando-se o número de cubos utilizados para cobri-lo é possível utilizar a equação acima sendo $N(r)$ o número de cubos de aresta r [15]. Por exemplo, a figura 2.2, a seguir, teve sua dimensão fractal calculada com este método. A figura 2.3 mostra o gráfico $\ln(r) \times \ln(N(r))$, a partir do qual é calculada a regressão linear. O coeficiente angular dessa reta aproximada é a dimensão fractal ($D = 1,642$).

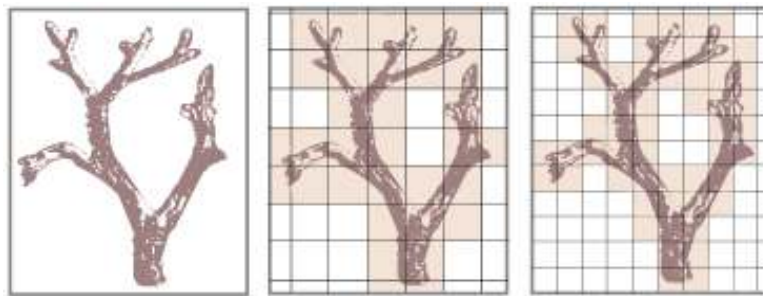


Figura 2.2 Exemplo da aplicação do método Box Counting a um objeto fractal

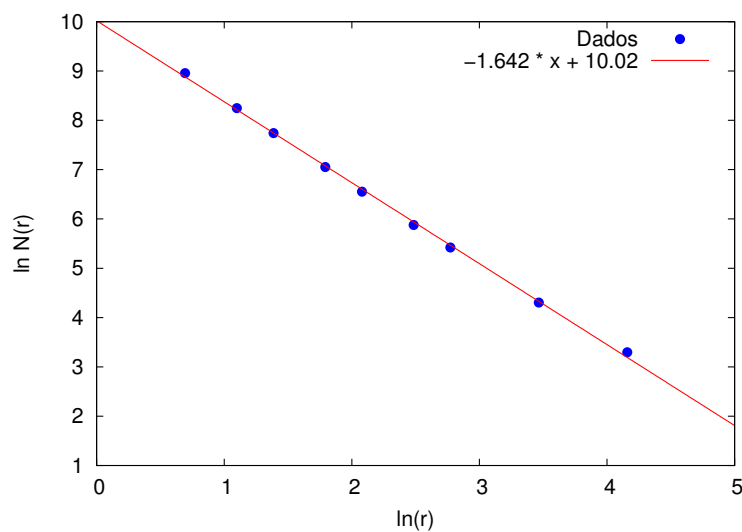


Figura 2.3 Gráfico para o cálculo da dimensão fractal pelo método box-counting

A dimensão obtida com este método também é conhecida como dimensão de capacidade.

2.5 DIMENSÃO DE INFORMAÇÃO

Dimensão de informação está relacionada com a soma de probabilidades de encontrar um ponto da estrutura na n -ésima caixa. Eis o procedimento:

1. Contar o número de pontos (pertencentes à estrutura) M_i em cada caixa;
2. A probabilidade de ser escolhidos pontos da n -ésima caixa é $P_i = M_i/M$, onde M é o número total de pontos da estrutura;
3. Entropia de Shannon:

$$S(r) = -\log \sum_i P_i \log P_i \quad (2.2)$$

4. A dimensão de informação é definida como:

$$D_1 = \lim_{r \rightarrow 0} -\frac{S(r)}{\log(r)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \sum_i P_i \log P_i}{\log(r)} \quad (2.3)$$

5. Para estimar D_1 , basta lembrar que este é a inclinação da regressão linear de $\log \sum_i P_i \log P_i$ versus $\log(r)$.

2.6 DIMENSÃO DE CORRELAÇÃO

A dimensão de correlação foi introduzida por Grassberger e Procaccia [29] e está relacionada com o número de pontos cuja distância entre eles é menor do que r .

Integral de correlação:

$$C(r) = \frac{1}{N \cdot M} \sum_{i \neq j} \Theta(r - \|x_i - x_j\|) \quad (2.4)$$

onde Θ é a função de Heaviside, M e N são as dimensões da imagem. A Dimensão de correlação é definida como:

$$D_2 = \lim_{r \rightarrow 0, N \rightarrow \infty} \frac{\log C(r)}{\log r} \quad (2.5)$$

é possível estimar D_2 através da inclinação da regressão linear de $\log C(r)$ versus $\log r$.

2.7 LACUNARIDADE

Em algumas circunstâncias a dimensão fractal não é suficiente para descrever o objeto, já que é possível construir diversos fractais com a mesma dimensão, mas que são extremamente diferentes. É neste contexto que surge uma outra grandeza: a Lacunaridade.

Este conceito foi introduzido por Mandelbrot [16] para melhorar o estudo dos objetos fractais. A lacunaridade representa a distribuição de “lacunas” de um determinado objeto, ou seja, baixa lacunaridade indica maior homogeneidade, enquanto alta lacunaridade indica alta heterogeneidade.

Deve-se observar que objetos que são homogêneos em pequena escala podem ser heterogêneos em escalas maiores, logo, a lacunaridade é uma medida dependente da escala de complexidade espacial [30].

Esta medida tem sido utilizada, por exemplo, no estudo de fenômenos ecológicos e climáticos [27], imagens da floresta amazônica [31] e segmentação de imagens [21]. Segue abaixo um exemplo (adaptado da referência [32]).

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

1	1	0	1	0	1	0	1
0	0	0	1	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1

Figura 2.4 $\Lambda(2) = 1.53$

$\Lambda(2) = 1.18$

1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1

Figura 2.5 $\Lambda(2) = 1.00$

Observando as figuras 2.4 e 2.5, pode-se perceber que os três tabuleiros possuem a mesma dimensão fractal:

$$D = \frac{\log 32}{\log 8} = 1,667 \quad (2.6)$$

Todavia, a distribuição de seus elementos no espaço é bastante diferente.

O procedimento para o cálculo da Lacunaridade está descrito a seguir[32, 33]:

1. Uma caixa de lado r é colocada sobre o canto superior esquerdo da imagem e o número s de pixels pretos no interior dessa caixa é determinado;
2. A caixa é movida um espaço ao longo do conjunto e o número de caixas ocupadas é contado novamente;
3. O processo é repetido até que toda a imagem tenha sido analisada e assim é obtida a distribuição de frequências das caixas $n(s, r)$, e a sua correspondente distribuição de probabilidade $Q(s, r) = n(s, r)/N(r)$, onde $N(r)$ é o número total de caixas de tamanho r .
4. A lacunaridade para este tamanho de caixa é definida como:

$$\Lambda(r) = \frac{Z(2)}{[Z(1)]^2} \quad (2.7)$$

onde:

$$\begin{cases} Z(1) = \sum_s sQ(s, r) \\ Z(2) = \sum_s s^2Q(s, r) \end{cases} \quad (2.8)$$

São o primeiro e o segundo momentos da distribuição $Q(s, r)$, respectivamente. Sejam

$$Z(1) = \mu \quad (2.9)$$

e

$$Z(2) = \sigma^2 + \mu^2 \quad (2.10)$$

Daí,

$$\Lambda(r) = \frac{\sigma^2}{\mu^2} + 1 \quad (2.11)$$

Deve-se observar que quando a média de sítios ocupados μ vai a zero, Λ vai para infinito, significando um maior número de “lacunas” na imagem. Em geral, quanto maior o tamanho de caixa, menor a lacunaridade.

Em alguns casos a lacunaridade decresce com o tamanho de caixa seguindo uma lei de potência $\Lambda(r) \sim r^{-\beta}$ e o expoente β pode ser calculado pela regressão linear $\log(\Lambda(r)) \times \log(r)$ [20].

Um exemplo da aplicação desse método pode ser visto abaixo, na figura 2.6, no qual é calculada a lacunaridade de uma rede aleatória 12×12 para um limiar $r = 2$. Este limiar representa o tamanho da caixa utilizada para percorrer a grade. Os detalhes do cálculo podem ser observados na tabela 2.1, logo abaixo da figura 2.6.

1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0
1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1

Figura 2.6 Cálculo da lacunaridade para um mapa aleatório 12×12 (adaptado)

Tabela 2.1 Exemplo de cálculo de Lacunaridade de uma rede.

	s	$n(s, r)$	$Q(s, r)$	$sQ(s, r)$	$s^2Q(s, r)$
$r = 2$	0	3	0.024	0	0
	1	35	0.289	0.289	0.289
	2	46	0.380	0.760	1.520
	3	29	0.239	0.719	2.157
	4	4	0.066	0.264	1.057
$Z^{(1)} = 2.033, Z^{(2)} = 5.024, \Lambda(2) = 1.215.$					

2.8 MULTIFRACTAIS

Objetos multifractais podem ser entendidos como uma generalização dos fractais. Diferentemente dos fractais simples, também conhecidos como monofractais, os multifractais são estruturas que não podem ser caracterizadas apenas pela sua dimensão fractal. No lugar da mesma, eles possuem um conjunto de expoentes hierarquicamente distribuídos. Isso significa que eles formam um conjunto de monofractais com dimensões distintas. Neste caso, não mais deve ser calculado apenas um número (dimensão fractal) e sim um conjunto de números, o qual é conhecido como espectro multifractal. Caso essa hierarquia de expoentes seja desprezada e o objeto seja tratado como um monofractal, a dimensão calculada será um valor intermediário [9].

2.8.1 Espectro Multifractal

Para calcular o espectro multifractal de uma estrutura, utiliza-se um procedimento parecido com o método Box Counting. Cobrindo-se o objeto com caixas de tamanho l e varia-se em seguida os valores de l . Registra-se os valores de massa da m -ésima caixa M_i , sendo M_0 o número total de pixels da estrutura. A Dimensão generalizada é dada pela equação 2.12:

$$\sum_i \left(\frac{M_i}{M_0} \right)^q \sim \left(\frac{l}{L} \right)^{(q-1)D_q} \quad (2.12)$$

onde q é uma variável contínua que possibilita a conservação das propriedades fractais em diferentes escalas, ou seja, para $q < 1$, D_q reflete a dimensão fractal de regiões com baixa densidade de pixels, enquanto que para $q > 1$, D_q reflete a dimensão fractal de regiões com alta densidade de pixels [18]. Para o caso de fractais simples D_q é constante.

A dimensão generalizada, então, pode ser escrita como:

$$D_q = \lim_{\frac{l}{L} \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \frac{\ln \sum_i^{N(l)} p_i^q(\alpha)}{\ln \frac{l}{L}} \quad (2.13)$$

A equação 2.13 é válida para $q \neq 1$. Para $q = 1$, D_1 é definida como o limite:

$$D_1 = \lim_{q \rightarrow 1} D(q) \quad (2.14)$$

Isso conduz à relação de escala da entropia $S(l)$:

$$D_1 = \lim_{\frac{l}{L} \rightarrow 0} \frac{\sum_i^N p_i \ln p_i}{\ln \frac{l}{L}} \quad (2.15)$$

Quando $q = 0$, o algoritmo retoma a forma do *Box Counting*.

As quantidades D_0 , D_1 e D_2 são a dimensão de capacidade, a dimensão de informação e a dimensão de correlação, respectivamente. Deve-se verificar se $D_0 < D_1 < D_2$ para saber se é necessário realizar análise multifractal. Se o objeto for monofractal essas três grandezas são iguais, ou seja, D_q é uma constante.

Para saber se um objeto é um multifractal, deve-se primeiramente calcular sua dimensão de capacidade, a qual pode ser calculada via *Box Counting*, e em seguida deve-se calcular a Dimensão de Correlação. Sendo essas grandezas distintas, deve-se realizar a análise multifractal.

Observando a equação 2.12, percebe-se que sua aplicação direta pode causar problemas para $q < 0$, pois nesse caso, as caixas que contém um pequeno número de partículas contribuem significativamente na soma do primeiro membro. Uma alternativa a este problema é utilizar o método *Sand Box* [9, 34].

Este método consiste em utilizar caixas de tamanhos variáveis centrados na região que pertencem a estrutura e esta organização deve ser aleatória. Isso permite a reconstrução do espectro também para q negativo. Uma forma alternativa de estudar a Multifractalidade é utilizar o espectro $f(\alpha)$:

$$N(\alpha) = L^{-f(\alpha)} \quad (2.16)$$

onde $N(\alpha)$ representa o número de caixas e a probabilidade P_i de encontrar uma partícula dentro da i -ésima região é dada por:

$$P_i = L^{\alpha_i} \quad (2.17)$$

A relação entre a função D_q e o espectro $f(\alpha)$ é representada por uma transformação de Legendre:

$$f(\alpha(q)) = q\alpha(q) - \tau(q) \quad (2.18)$$

onde

$$\alpha(q) = \frac{d\tau(q)}{dq} \quad (2.19)$$

e

$$\tau(q) = (q - 1)D_q \quad (2.20)$$

A quantidade $\tau(q)$ é o expoente da correlação de massa da q -ésima ordem. Para fractais simples, q e FD são independentes ($D_q = FD$) e utilizando 2.19 e 2.20, pode-se observar que $f(\alpha) = D$ e o espectro $f(\alpha)$ fica reduzido a apenas um ponto que é a dimensão fractal.

2.8.2 Estimação direta do Espectro de singularidades

O método descrito a seguir foi introduzido primeiramente por Chhabra e colaboradores [35] para determinar o espectro de singularidade $f(\alpha)$ diretamente de dados experimentais, sem que seja necessário calcular a dimensão generalizada D_q e aplicar as transformadas de Legendre. Eis o procedimento:

1. Cobrir a imagem com caixas de tamanho l e computar a probabilidade $P_i(l)$ de cada uma dessas caixas ser sorteada.
2. Calcula-se um parâmetro de medida $\mu_i(q, l)$ onde as probabilidades em cada caixa de tamanho l são:

$$\mu_i(q, l) = \frac{[P_i(l)]^q}{\sum_{j=1}^{N(l)} [P_j(l)]^q} \quad (2.21)$$

onde $N(l)$ é o número de caixas de tamanho l . Para $q > 1$, $\mu_i(q, l)$ está relacionada com as regiões de maior singularidade da imagem, enquanto que para $q < 1$, $\mu_i(q, l)$ está relacionada com as regiões de menor singularidades da imagem.

3. A dimensão de Hausdorff $f(q)$ calculada através de $\mu(q)$ e $\alpha(q)$ são dados por:

$$f(q) = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\sum_i \mu_i(q, l) \log \mu_i(q, l)}{\log l} \quad (2.22)$$

$$\alpha(q) = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\sum_i \mu_i(q, l) \log P_i(l)}{\log l} \quad (2.23)$$

4. $f(q)$ pode ser estimado através da inclinação do gráfico $\sum_i \mu_i(q, l) \log \mu_i(q, l)$ versus $\log l$;
5. Já $\alpha(q)$ pode ser estimado através da inclinação do gráfico $\sum_i \mu_i(q, l)$ versus $\log l$.

CAPÍTULO 3

METODOLOGIA

3.1 O EXPERIMENTO

O experimento foi montado para estudar a deposição da Hidroxiapatita em diversos implantes dentários, pois a literatura especializada considera este fator relevante para o êxito do tratamento. A seguir está descrito o resumo das etapas do experimento [11]:

Preparo dos corpos de prova

O Titânio utilizado nos implantes foi adquirido através da empresa Tibrazil, sendo uma vareta medindo $1m$ de comprimento por $6mm$ de diâmetro. O laudo da certificação de sua fabricação também foi emitido pela empresa Tibrazil como sendo titânio grau II, Ti-6Al-4V.

- **Usinagem:** Para esta etapa foi utilizado um torno computadorizado da marca ROMI, a qual utiliza ferramentas de corte fabricadas em cerâmica no Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Pernambuco. A vareta que inicialmente tinha $1m$ de comprimento foi reduzida a 86 discos medindo cada um $5mm$ de diâmetro por $2mm$ de altura. Essas amostras foram encaminhadas para tratamento de superfície no laboratório de farmacognosia do Departamento de Ciências Farmacêuticas da UFPE.
- **Limpeza das amostras:** As amostras foram lavadas utilizando o Hexano por 10 minutos em ultrassom. Em seguida foram transferidos para um becker de vidro, o qual foi colocado numa estufa a $80^{\circ}C$ durante 10 minutos. O solvente foi descartado utilizando-se um recipiente apropriado.

3.2 ORGANIZAÇÃO DOS GRUPOS

Os grupos foram organizados seguindo um planejamento multifatorial: $2^3 = 8$ os quais estão apresentados na Tabela 3.1, a seguir:

Tabela 3.1 Organização em grupos:

	Jateamento	Ataque ácido	Fosfato de Cálcio
Grupo A	Sim	Sim	Sim
Grupo B	Não	Não	Não
Grupo C	Sim	Não	Sim
Grupo D	Sim	Sim	Não
Grupo E	Não	Não	Sim
Grupo F	Não	Sim	Não
Grupo G	Não	Sim	Sim
Grupo H	Sim	Não	Não

3.3 TRATAMENTO DAS SUPERFÍCIES

Abaixo está descrito o procedimento para a preparação dos diversos tratamentos de implantes.

- **Jateamento com óxido de Alumínio - Al_2O_3 :** Foi utilizado um jato direcionado às superfícies dos discos por 10 segundos para cada lado e neste jato foi utilizado óxido de Alumínio (Al_2O_3).
- **Ataque ácido:** A etapa seguinte foi o ataque ácido, o qual foi composto de ácido Clorídrico (HCl) 59% + 1% de ácido fluorídrico (HF) e 40% de água destilada, esta acondicionada em recipiente de Polietileno até o momento do uso. Em um Becker com capacidade de 50ml, foram colocados 20ml dessa solução durante um minuto.
- **Fosfato de Cálcio - $Ca_3(PO_4)_2$:** Uma pasta contendo proporção de 1 : 3 de água e Fosfato de Cálcio terciário foi preparada. Ao término da segunda etapa, o excesso de ácido é desprezado e a pasta previamente preparada é adicionada ao Becker, no qual permanece na Ultrassom durante 20 minutos. Em seguida, o material é lavado e colocado num recipiente de vidro e posto a secar em estufa a 40 °C durante 60 minutos. Após esta etapa, os implantes são armazenados em tubos do tipo Ependorf e encaminhados para as análises.
- **Preparação do Simulador de Fluido Corpóreo - SFC:** O Simulador de Fluido Corpóreo foi preparado no laboratório de Farmacognosia do Departamento de Ciências Farmacêuticas da UFPE [11]. A composição química do Simulador de Fluido Corpóreo está apresentada na Tabela 3.2, a seguir:

Tabela 3.2 Composição química do Simulador de Fluidos Corpóreo

Reagentes	Quantidade	Pureza
$NaCl$	8.055g	99.5
$NaHCO_3$	0.355g	99.5
KCl	0.225g	99.5
$K_2PO_4 \cdot 3H_2O$	0.231g	99.0
$MgCl_2 \cdot 6H_2O$	0.311g	98.0
1,0M – HCl	39ml	—
$CaCl_2$	0.292g	95.0
$NaSO_4$	0.072g	99.0
Tris*	6.618g	99.0
1,0MHCl	0 – 5ml	—

*Hidroximetil aminometano

Ao final do preparo do Simulador de Fluido Corpóreo (SFC) a composição eletrolítica é semelhante à encontrada no sangue e nos ossos. Os implantes permaneceram imersos neste fluido durante 30 dias.

3.4 IMAGENS

As imagens foram obtidas por meio de Microscopia Eletrônica de Varredura (MEV), JEOL 5600 LV, (Japan), voltagem de 10 kV, do Departamento de Física da UFPE. Foram analisadas 15 imagens ampliadas 200 vezes.

Para cada imagem, uma região de interesse (ROI) retangular (640×399 pixels) foi extraída e tratada utilizando-se o software livre *ImageJ*. O tratamento das imagens consistiu em transformá-las em imagens binárias, ou seja, com pixels brancos e pretos, e este processo é denominado binarização. Em seguida foram calculadas as grandezas: Dimensão fractal, Lacunaridades e Espectro Multifractal.

Abaixo segue o conjunto de imagens obtidas com o experimento e utilizadas para o estudo das grandezas fractais:

Grupo A: Ataque ácido + Jateamento + Fosfato de Cálcio

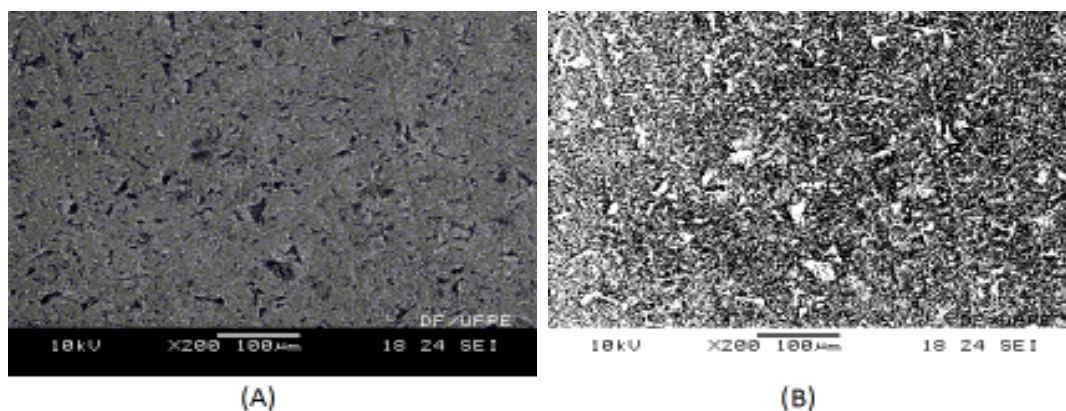


Figura 3.1 Grupo A antes da imersão em SFC. (A) Imagem Original, (B) Imagem Binarizada.

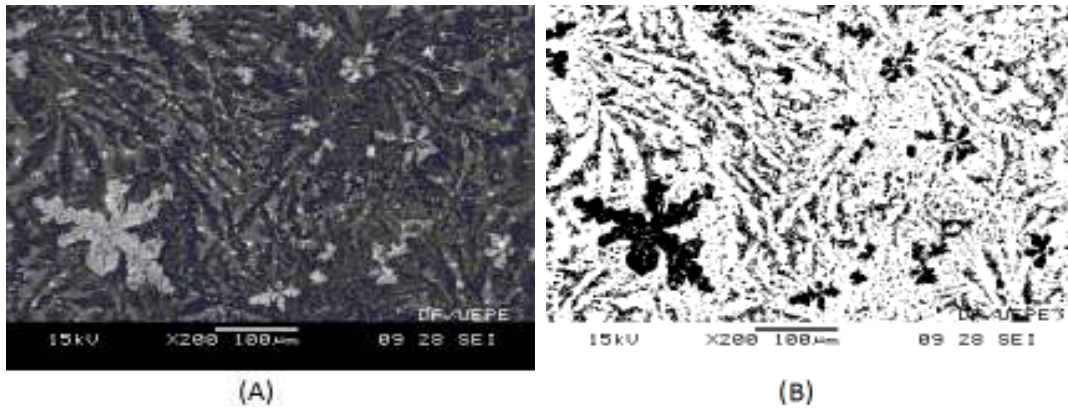


Figura 3.2 Grupo A depois da imersão em SFC. (A) Imagem Original, (B) Imagem Binarizada.

Grupo B: Sem tratamento

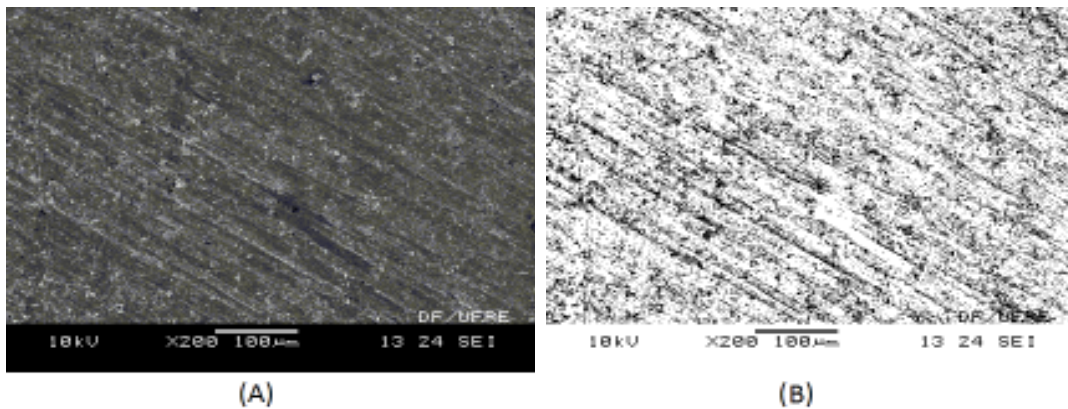


Figura 3.3 Grupo B antes da imersão em SFC. (A) Imagem Original, (B) Imagem Binarizada.

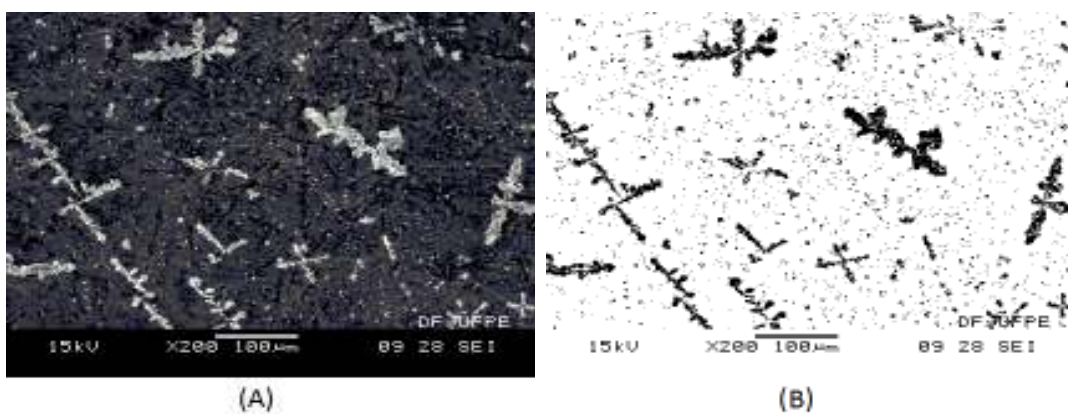


Figura 3.4 Grupo B depois da imersão em SFC. (A) Imagem Original, (B) Imagem Binarizada.

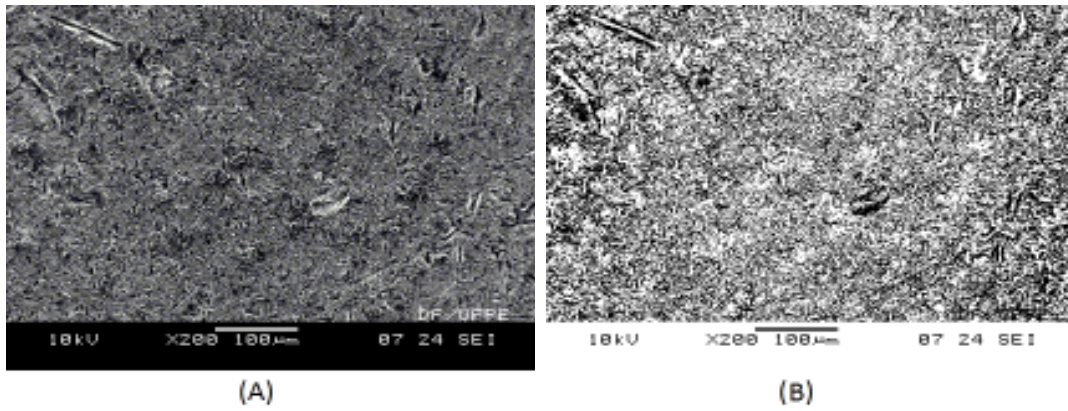
Grupo C: Jateamento + Fosfato de Cálcio

Figura 3.5 Grupo C antes da imersão em SFC. (A) Imagem Original, (B) Imagem Binarizada.

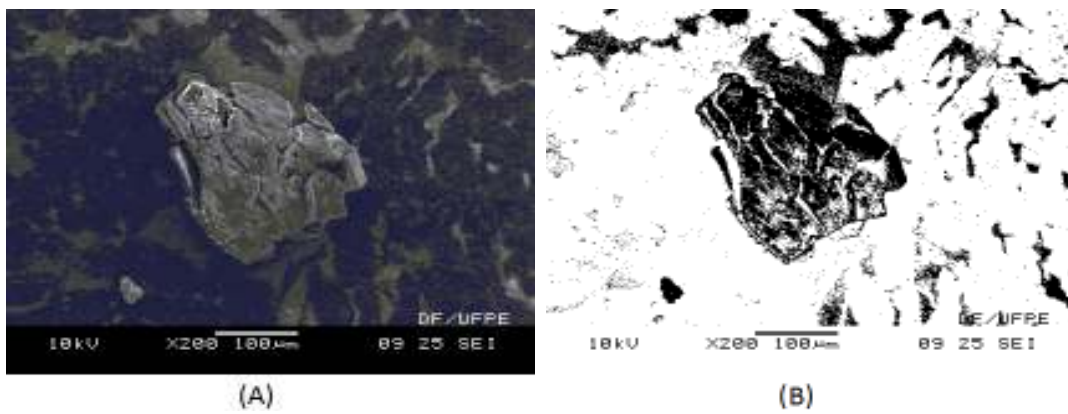


Figura 3.6 Grupo C depois da imersão em SFC. (A) Imagem Original, (B) Imagem Binarizada.

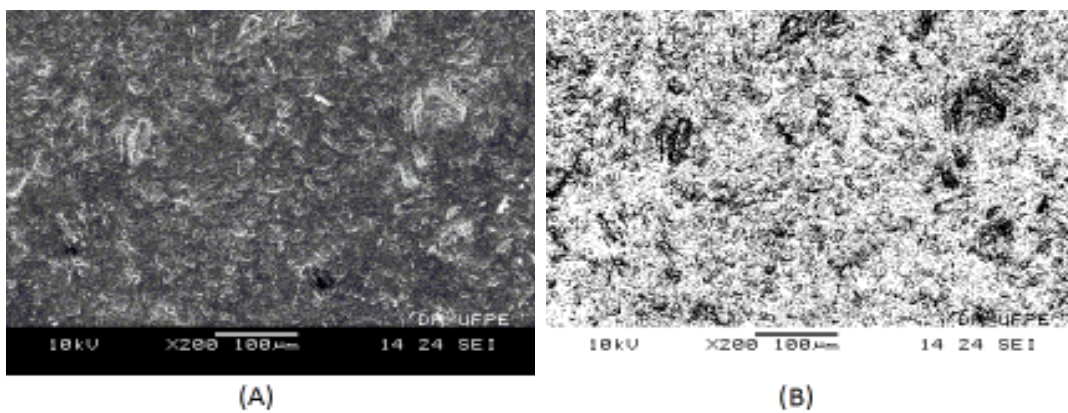
Grupo D: Ataque ácido + Jateamento

Figura 3.7 Grupo D antes da imersão em SFC. (A) Imagem Original, (B) Imagem Binarizada.

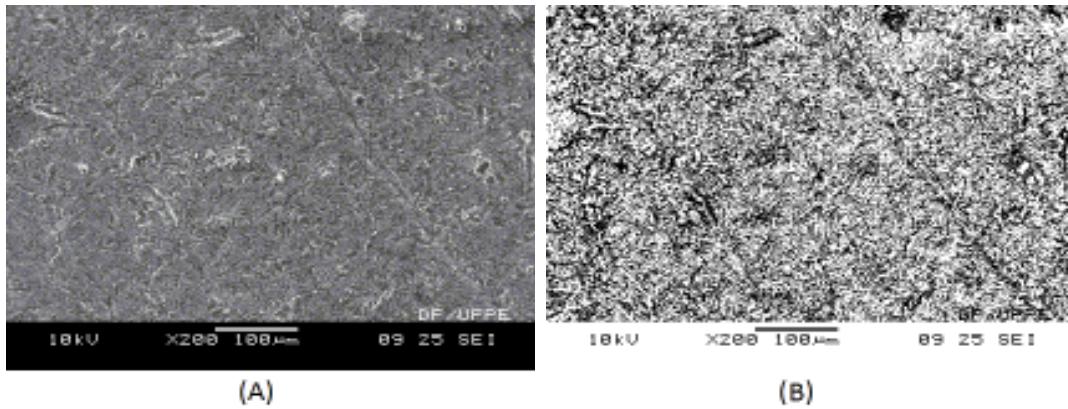


Figura 3.8 Grupo D depois da imersão em SFC. (A) Imagem Original, (B) Imagem Binarizada.

Grupo E: Fosfato de Cálcio

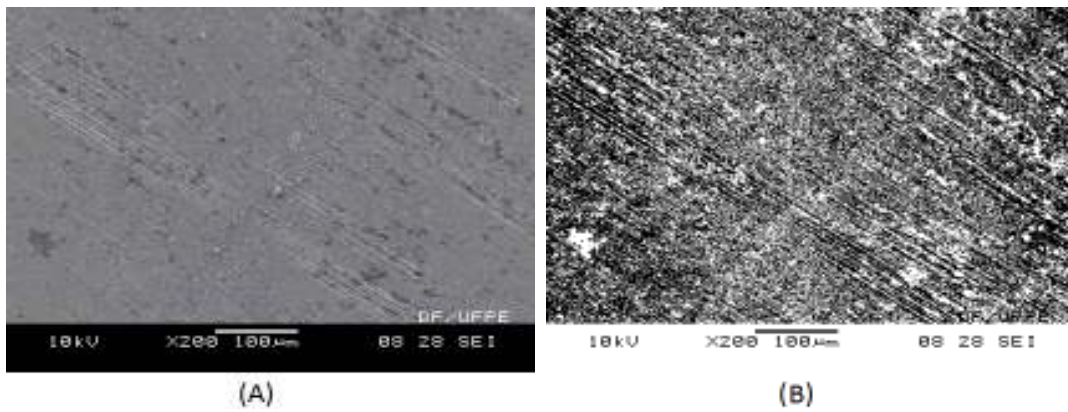


Figura 3.9 Grupo E antes da imersão em SFC. (A) Imagem Original, (B) Imagem Binarizada.

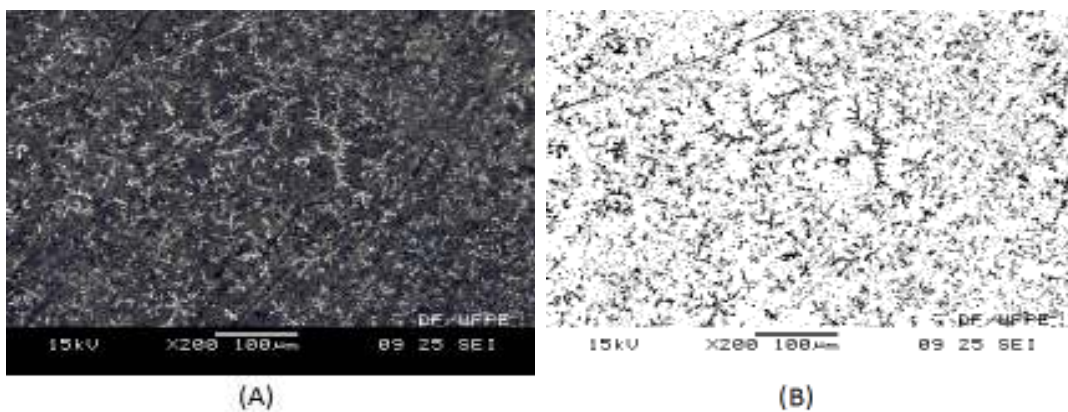


Figura 3.10 Grupo E depois da imersão em SFC. (A) Imagem Original, (B) Imagem Binarizada.

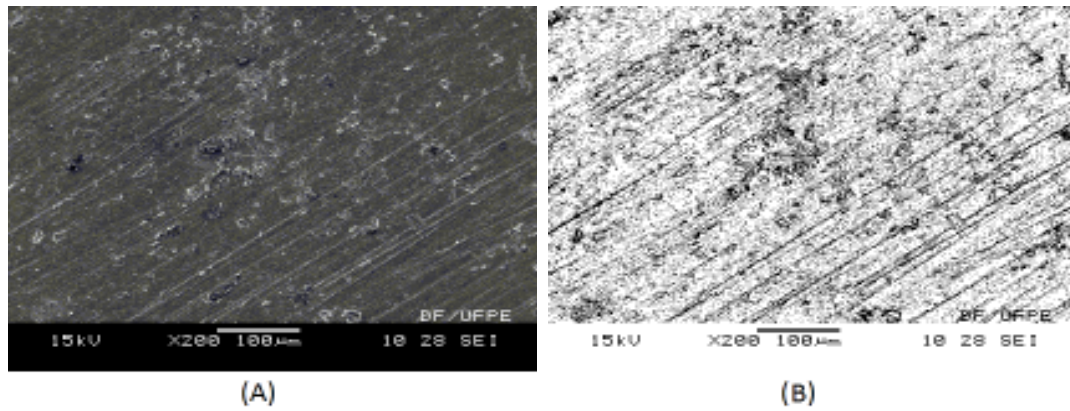
Grupo F: Ataque ácido

Figura 3.11 Grupo F antes da imersão em SFC. (A) Imagem Original, (B) Imagem Binarizada.

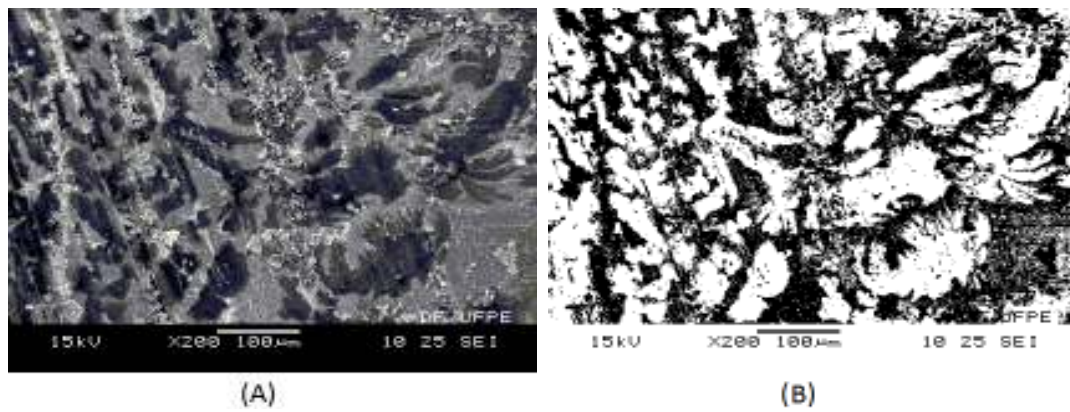


Figura 3.12 Grupo F depois da imersão em SFC. (A) Imagem Original, (B) Imagem Binarizada.

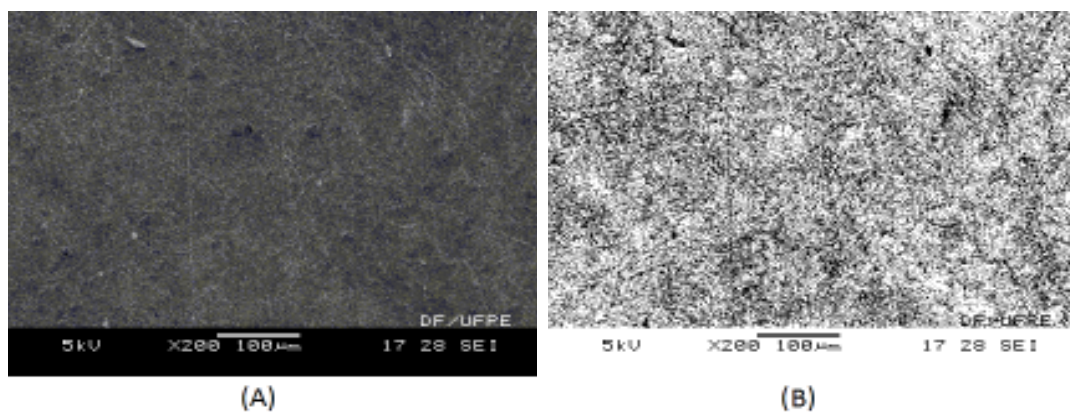
Grupo G: Ataque ácido + Fosfato de Cálcio

Figura 3.13 Grupo G antes da imersão em SFC. (A) Imagem Original, (B) Imagem Binarizada.

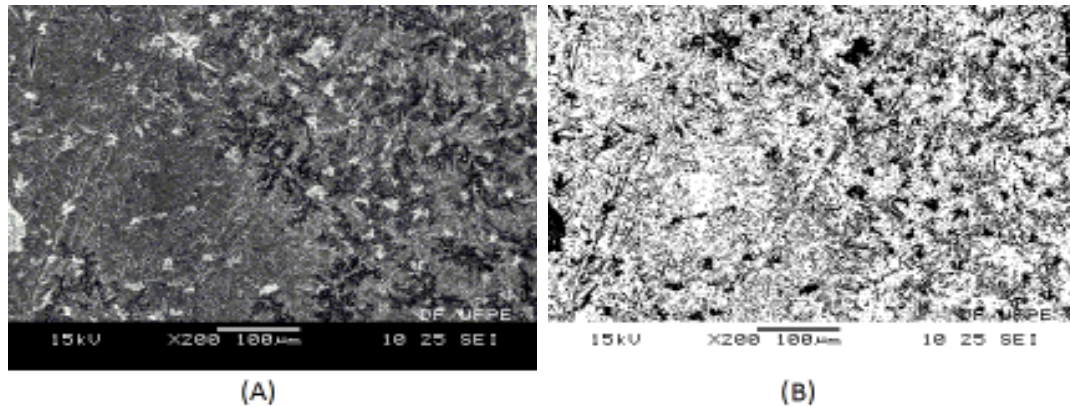


Figura 3.14 Grupo G depois da imersão em SFC. (A) Imagem Original, (B) Imagem Binari-
zada.

Grupo H: Jateamento

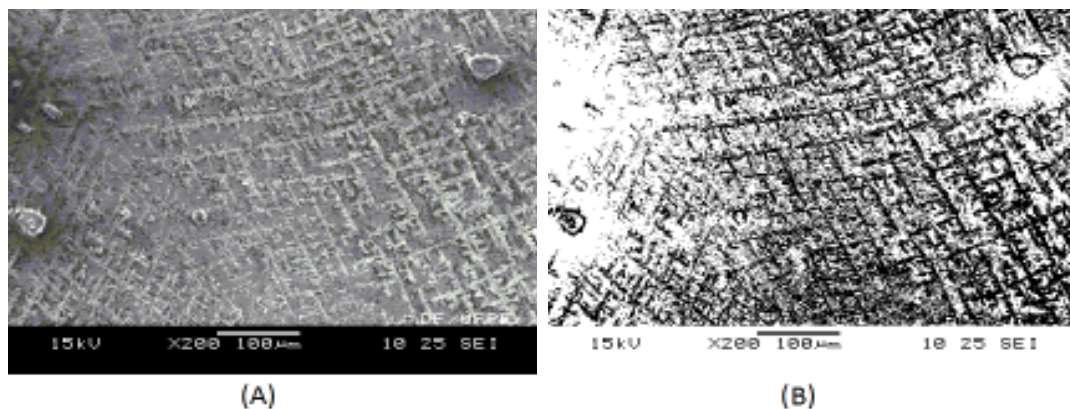


Figura 3.15 Grupo H depois da imersão em SFC. (A) Imagem Original, (B) Imagem Binari-
zada.

3.5 DIMENSÃO FRACTAL

Para o cálculo da dimensão fractal, foi utilizado o pacote *FracLac* do software livre *ImageJ* versão 1.47 o qual utiliza o método *Box Counting*.

3.6 LACUNARIDADE

Para calcular a lacunaridade foi escrito um código baseado no método *Gliding Box* e os tamanhos de caixa utilizados foram $r = 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 15, 18, 23, 35, 44, 55, 68, 85, 106$ e 132.

3.7 ESPECTRO MULTIFRACTAL

Os espectros multifractais foram calculados utilizando o pacote *FracLac* do software livre *ImageJ*, o qual utiliza o método apresentado por [35] e [36]. Para analisar o espectro

multifractal α vs $f(\alpha)$ foi utilizada uma aproximação de um polinômio de quarto grau [37]:

$$f(\alpha) = A(\alpha - \alpha_0)^4 + B(\alpha - \alpha_0)^3 + C(\alpha - \alpha_0)^2 + D(\alpha - \alpha_0) + E \quad (3.1)$$

As raízes reais do polinômio associado foram denominadas α_{min} e α_{max} e a diferença entre essas raízes é a “largura do espectro” e foi representada por W :

$$W = \alpha_{max} - \alpha_{min} \quad (3.2)$$

Este parâmetro é obtido pela extrapolação da curva aproximada até zero $f(\alpha_{min}) = f(\alpha_{max}) = 0$.

A assimetria dos gráficos depende dos coeficientes de primeira ordem D e do coeficiente de terceira ordem B . Essa assimetria pode ser quantificada pela razão r :

$$r = \frac{\alpha_{max} - \alpha_0}{\alpha_0 - \alpha_{min}} \quad (3.3)$$

Onde $r = 1$ representa uma forma simétrica, $r > 1$, assimetria para a direita e para $r < 1$, assimetria para esquerda. O α_0 é a abscissa do vértice da curva no intervalo considerado: $[\alpha_{min}, \alpha_{max}]$.

Outra grandeza calculada foi o espectro de dimensão generalizada D_q , onde $-10 \leq q \leq 10$.

Os parâmetros α_0 , W e r são utilizados para quantificar a complexidade da imagem.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 DIMENSÃO FRACTAL

Após a análise das imagens, foram construídas as Tabelas 4.1 e 4.2 com os resultados antes e depois da imersão em fluido corpóreo (SFC):

Tabela 4.1 Dimensão fractal (desvio padrão) dos implantes antes da imersão em SFC.

	Com ácido		Sem ácido	
	Com $Ca_3(PO_4)_2$	Sem $Ca_3(PO_4)_2$	Com $Ca_3(PO_4)_2$	Sem $Ca_3(PO_4)_2$
Com Jateamento	1.919 (0.013)	1.920 (0.013)	1.917 (0.014)	
Sem Jateamento	1.924 (0.015)	1.925 (0.011)	1.925 (0.011)	1.900 (0.014)

Tabela 4.2 Dimensão fractal (desvio padrão) dos implantes depois da imersão em SFC.

	Com ácido		Sem ácido	
	Com $Ca_3(PO_4)_2$	Sem $Ca_3(PO_4)_2$	Com $Ca_3(PO_4)_2$	Sem $Ca_3(PO_4)_2$
Com Jateamento	1.848 (0.013)	1.920 (0.013)	1.691 (0,009)	1.909 (0.013)
Sem Jateamento	1.909 (0.013)	1.830 (0.014)	1.867 (0.013)	1.687 (0.012)

Pôde-se observar na primeira fase do estudo, antes da imersão no Simulador de Fluido Corpóreo (SFC), que as dimensões fractais das imagens dos implantes apresentavam valores parecidos (próximos de 1.9). Na segunda fase do estudo, após a imersão no Simulador de Fluido Corpóreo, pôde-se verificar uma diminuição na dimensão fractal, com exceção do grupo tratado com ácido e Jateamento (D) e ácido com Fosfato de Cálcio (G), os quais não apresentaram mudança significativa em sua dimensão fractal. É possível observar que as maiores diminuições de dimensão fractal ocorreram nos grupos tratados com Jateamento e Fosfato de Cálcio (de 1.917 para 1.691) e sem tratamento (de 1.900 para 1.687).

Os implantes tratados com ataque ácido apresentam uma diminuição na dimensão fractal menos acentuada que os implantes com os demais tratamentos. Isso se deve ao fato de que o tratamento com ácido produz uma superfície mais rugosa, ou seja, com maior área de contato, melhorando assim a deposição dos cristais, tornando-a maior e mais uniforme. As superfícies que não receberam nenhum tratamento (B) também

apresentaram deposição de cristais, mas em menor quantidade aparentemente, o que resultou na maior diminuição da dimensão fractal.

4.2 LACUNARIDADE

Para cada imagem, a lacunaridade foi calculada para tamanhos de caixa de $r = 2$ até $r = 132$ e com os dados obtidos foram construídos os gráficos log – log da lacunaridade em função dos tamanhos de caixa. Em cada gráfico foi traçada a curva correspondente à regressão linear do espectro de lacunaridade, como dito no capítulo 3. Os gráficos podem ser vistos a seguir.

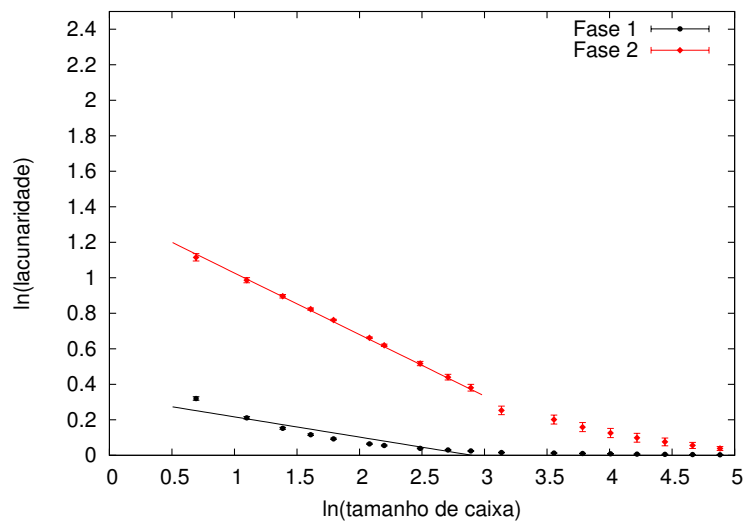


Figura 4.1 Espectro de Lacunaridade do Grupo A (Ataque ácido + Jateamento + Fosfato de Cálcio).

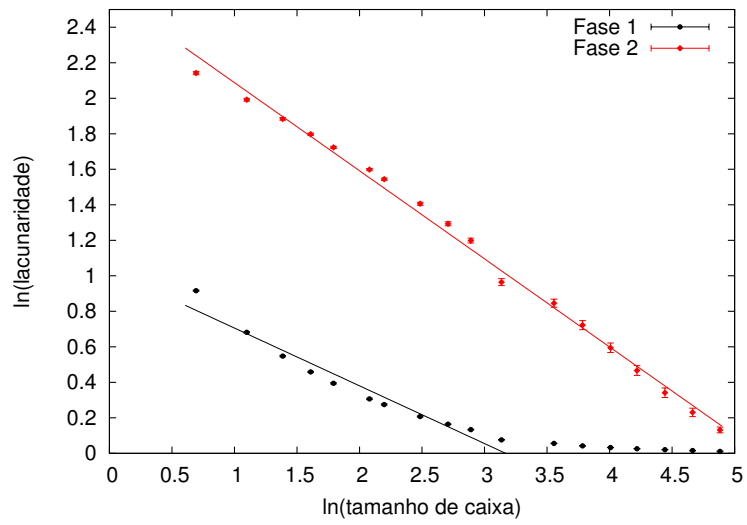


Figura 4.2 Espectro de Lacunaridade do Grupo B (Sem tratamento).

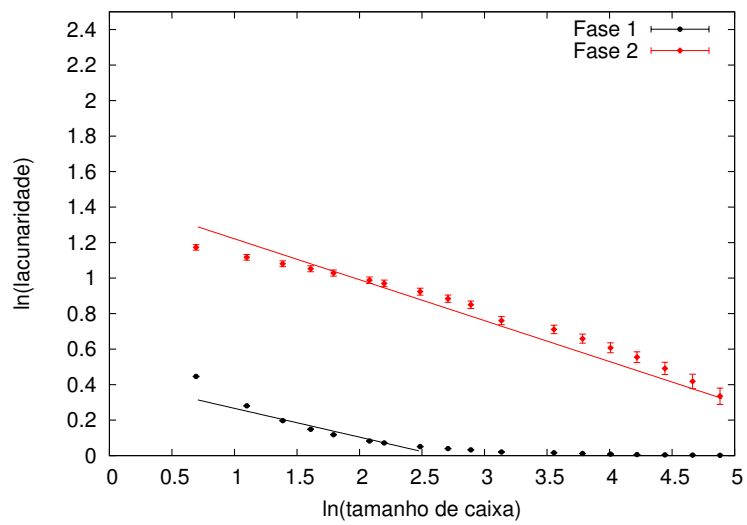


Figura 4.3 Espectro de Lacunaridade do Grupo C (Jateamento + Fosfato de Cálcio).

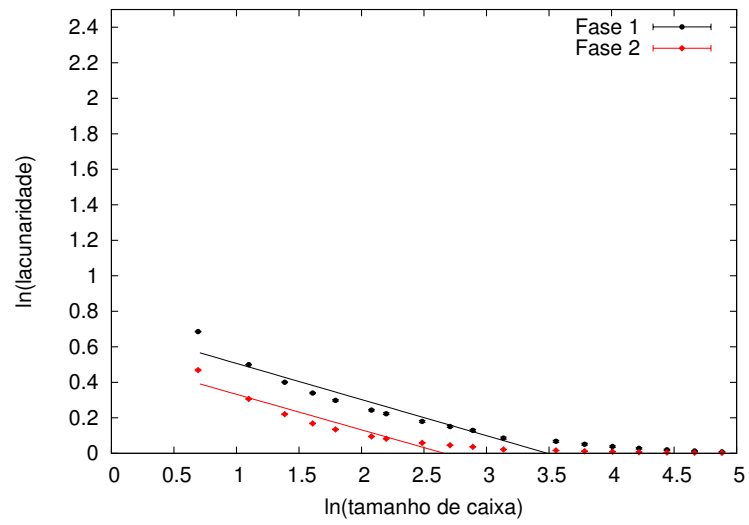


Figura 4.4 Espectro de Lacunaridade do Grupo D (Ataque ácido + Jateamento).

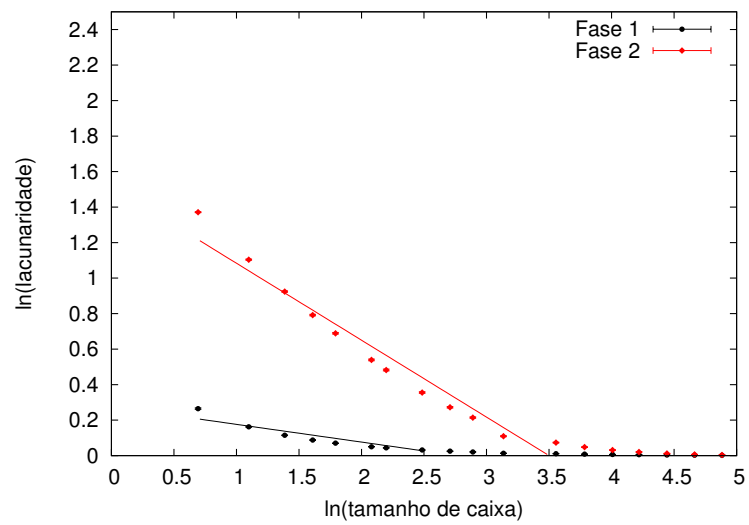


Figura 4.5 Espectro de Lacunaridade do Grupo E (Fosfato de Cálcio).

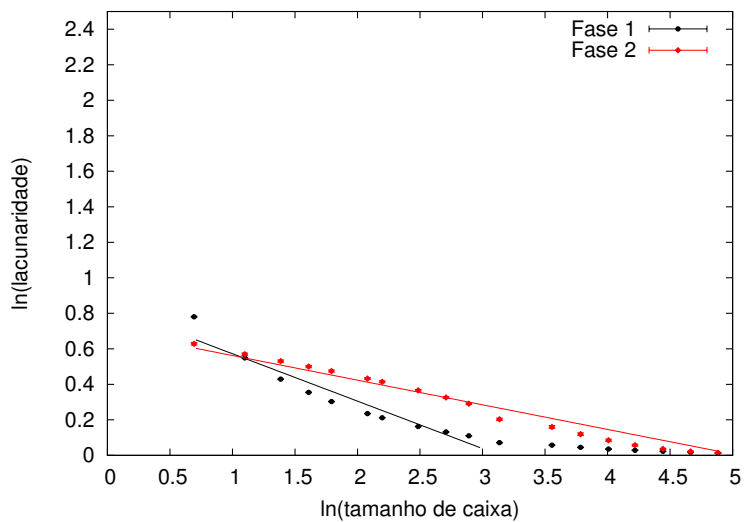


Figura 4.6 Espectro de Lacunaridade do Grupo F (Ataque ácido).

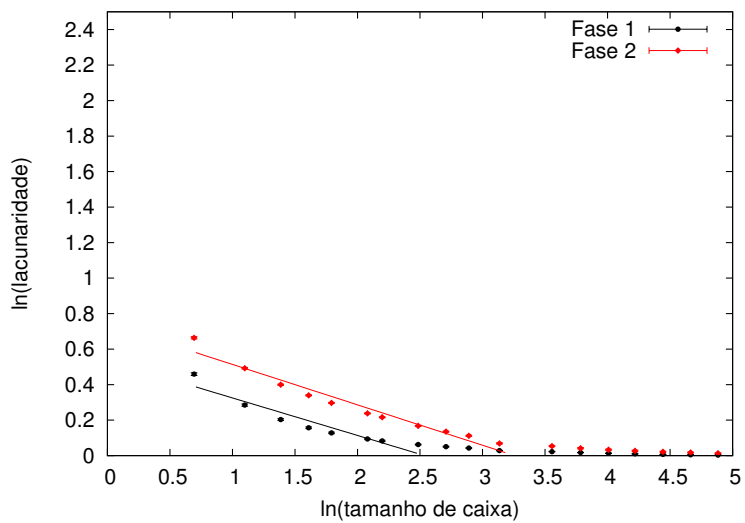


Figura 4.7 Espectro de Lacunaridade do Grupo G (Ataque ácido + Fosfato de Cálcio).

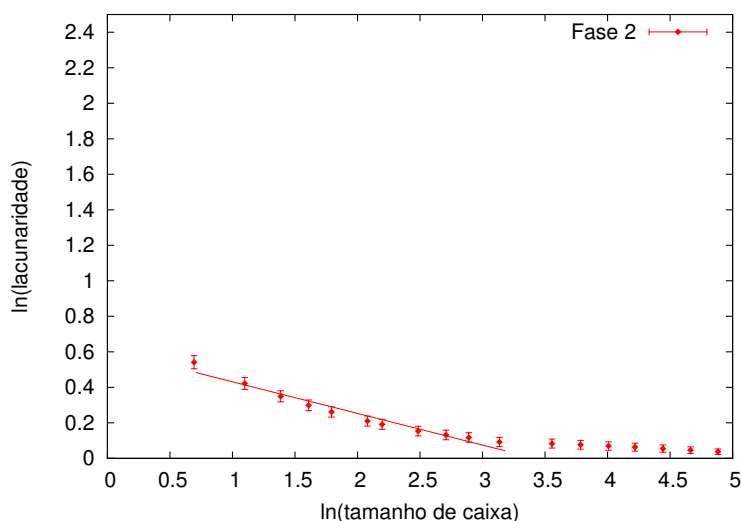


Figura 4.8 Espectro de Lacunaridade do Grupo H (Jateamento).

Todos os gráficos apresentam aumento de lacunaridade após a imersão no simulador de fluido corpóreo com exceção do grupo tratado com Jateamento com Óxido de Alumínio e ataque ácido (grupo D - Figura 4.4), onde houve diminuição da lacunaridade. Esses resultados de análise de lacunaridade são coerentes os resultados obtidos para as dimensões fractais: a dimensão fractal diminui, a lacunaridade aumenta.

As Tabelas 4.3 e 4.4, apresentadas a seguir, fazem o comparativo da média das lacunaridades para o menor tamanho de caixa, $\Lambda(2)$, e os respectivos coeficientes angulares das equações de regressão linear (β).

Tabela 4.3 $\beta, \Lambda(2)$ dos implantes antes da imersão em SFC.

	Com ácido		Sem ácido	
	Com $Ca_3(PO_4)_2$	Sem $Ca_3(PO_4)_2$	Com $Ca_3(PO_4)_2$	Sem $Ca_3(PO_4)_2$
Com Jateamento	0.1139, 1.3770	0.2036, 1.9850	0.1622, 1.5622	
Sem Jateamento	0.2113, 1.5824	0.2671, 2.1823	0.0999, 1.3029	0.3253, 2.4998

Tabela 4.4 $\beta, \Lambda(2)$ dos implantes depois da imersão em SFC.

	Com ácido		Sem ácido	
	Com $Ca_3(PO_4)_2$	Sem $Ca_3(PO_4)_2$	Com $Ca_3(PO_4)_2$	Sem $Ca_3(PO_4)_2$
Com Jateamento	0.3466, 3.0505	0.2001, 1.5979	0.2305, 3.2321	0.1781, 1.7181
Sem Jateamento	0.2276, 1.9415	0.1387, 1.8746	0.4334, 3.9408	0.4963, 8.5188

Observando as Tabelas 4.3 e 4.4 verifica-se que os grupos tratados com ácido apresentam lacunaridade menor que os demais. O uso de ácido aumenta a quantidade de ranhuras na superfície do implante melhorando assim a deposição dos cristais formados na adaptação da prótese. Isso aponta para uma falha na osseointegração no caso da superfície que não recebeu nenhum tratamento (grupo B). Esse conjunto apresentou um aumento acentuado de lacunaridade (de 2.4998 para 8.5188), ou seja, as lacunas aumentaram após a imersão em SFC. Este resultado é coerente com a dimensão fractal, pois este grupo também apresentou diminuição desta de 1.900 para 1.687, a qual foi a maior variação. A Tabela 4.4 mostra que os grupos tratados com ataque ácido apresentam menor lacunaridade, o que novamente aponta para a maior deposição dos cristais durante a osseointegração.

4.3 MULTIFRACTAIS

A forma do espectro de singularidades $f(\alpha)$ revela algumas características da heterogeneidade das superfícies examinadas. Esse espectro normalmente é representado por uma parábola cuja abcissa do ponto máximo é α_0 e sua imagem é $f(\alpha_0) = D_0$ [38]. Neste trabalho, foi usada a representação por um polinômio de quarto grau, cujos coeficientes estão representados nas tabelas abaixo dos gráficos do espectro de singularidades e da dimensão generalizada. O valor mínimo de α , α_{min} corresponde a $q = 10$, enquanto o valor máximo, α_{max} , corresponde a $q = -10$. Seguem os gráficos abaixo:

Grupo A: Ataque ácido + Jateamento + Fosfato de Cálcio

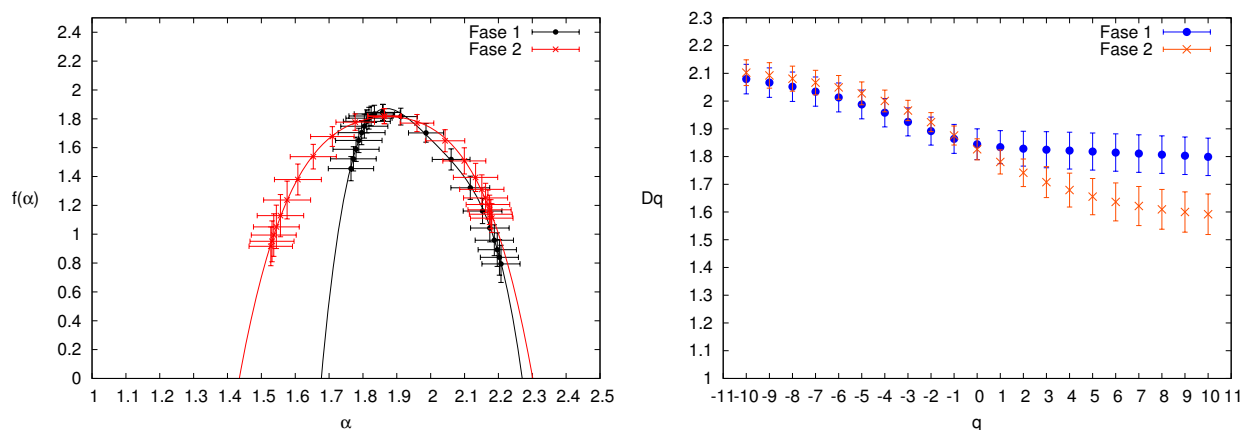
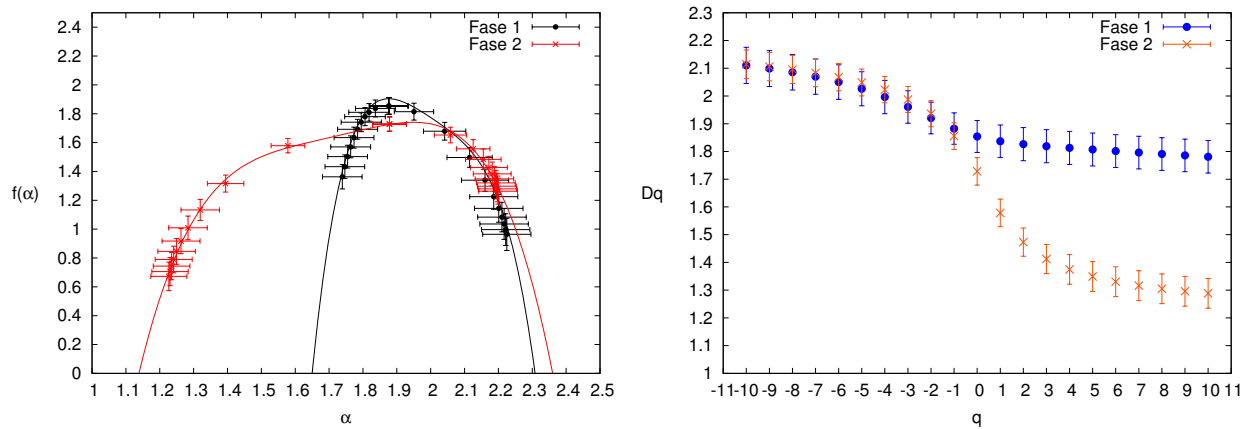


Figura 4.9 Espectro Multifractal e Dimensão Generalizada do grupo A (Ataque ácido + Jateamento + Fosfato de Cálcio)

Tabela 4.5 Coeficientes do polinômio associado ao Grupo A:

	A	B	C	D	E
Fase 1	-191.197	1534.92	- 4622.25	6185.92	- 3101.39
Fase 2	-28.9062	215.753	- 608.119	767.093	- 363.497

Grupo B: Sem tratamento**Figura 4.10** Espectro Multifractal e Dimensão Generalizada do grupo B (Sem tratamento).**Tabela 4.6** Coeficientes do polinômio associado ao Grupo B:

	A	B	C	D	E
Fase 1	-132.836	1065.24	- 3205.12	4286.79	- 2147.87
Fase 2	-11.9976	82.4783	- 212.532	243.841	- 103.689

Grupo C: Jateamento + Fosfato de Cálcio

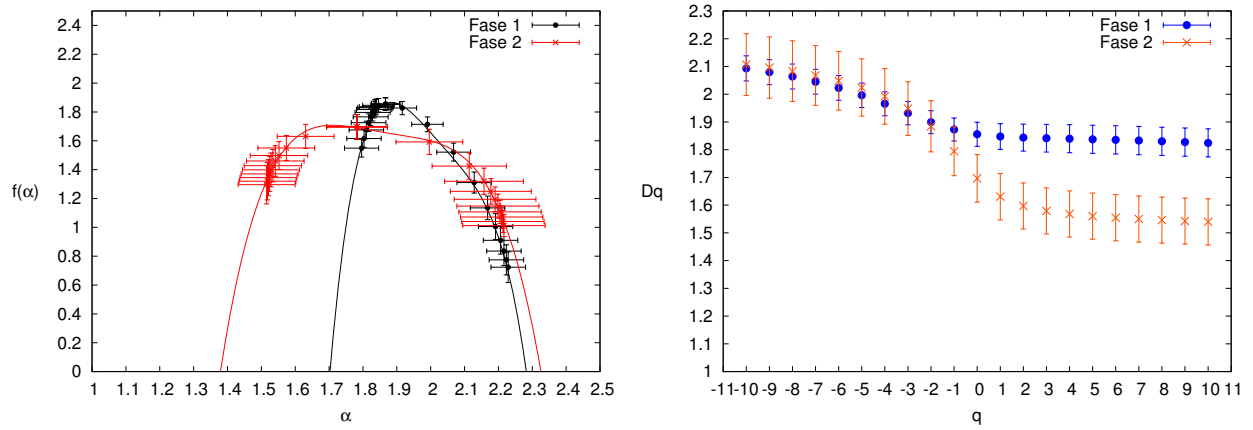


Figura 4.11 Espectro Multifractal e Dimensão Generalizada do grupo C (Jateamento + Fosfato de Cálcio)

Tabela 4.7 Coeficientes do polinômio associado ao Grupo C:

	A	B	C	D	E
Fase 1	-213.509	1732.74	-5273.55	7130.97	-3611.86
Fase 2	-34.7584	259.367	-725.374	900.731	-417.169

Grupo D: Ataque ácido + Jateamento

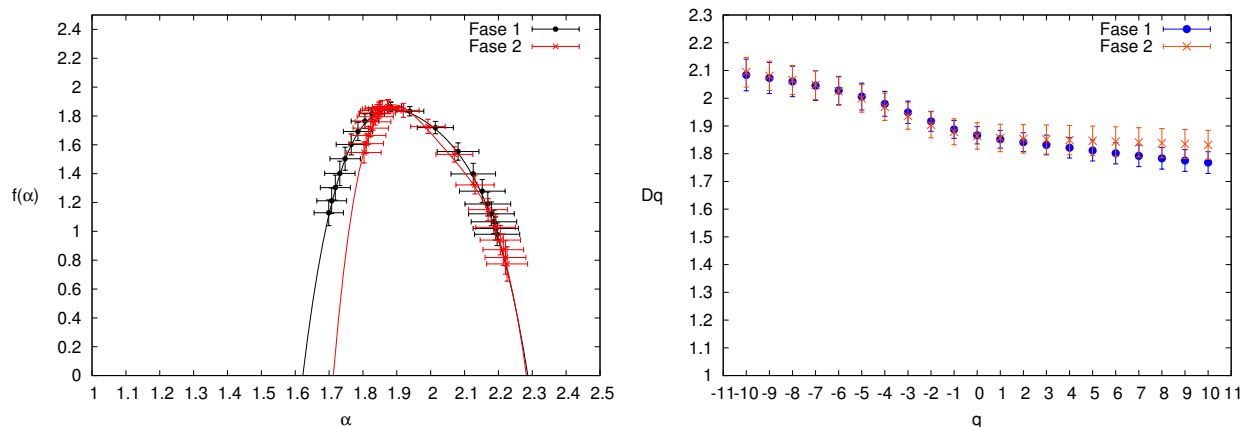


Figura 4.12 Espectro Multifractal e Dimensão Generalizada do grupo D (Ataque ácido + Jateamento).

Tabela 4.8 Coeficientes do polinômio associado ao Grupo D:

	A	B	C	D	E
Fase 1	-85.3383	677.951	-2026.07	2697.92	-1348.02
Fase 2	-231.038	1878.68	-5728.91	7762.05	-3939.61

Grupo E: Fosfato de Cálcio

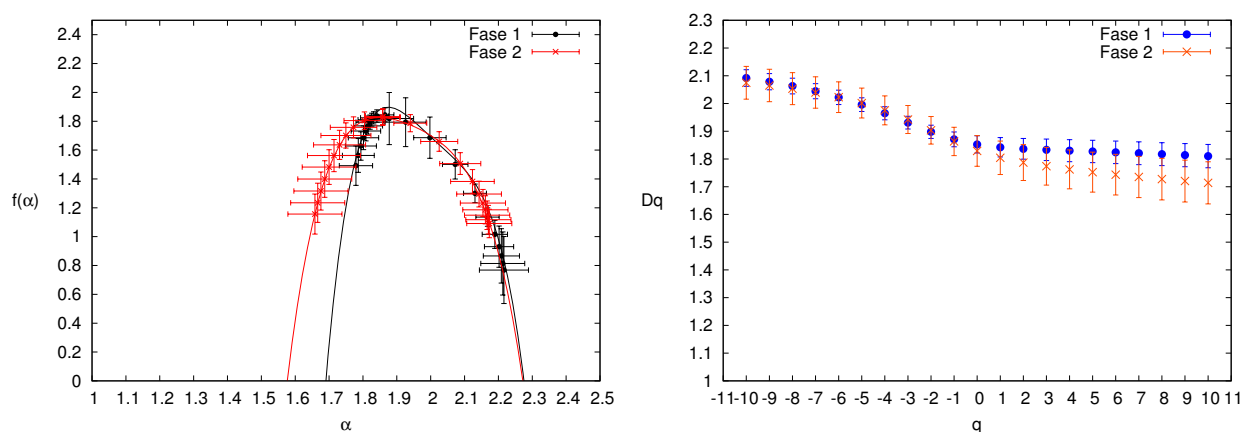
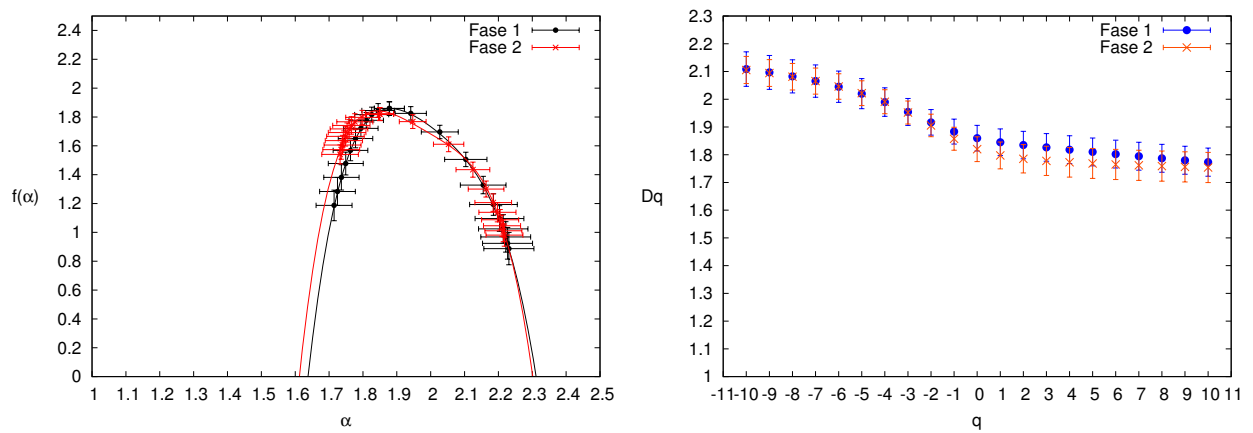


Figura 4.13 Espectro Multifractal e Dimensão Generalizada do grupo E (Fosfato de Cálcio).

Tabela 4.9 Coeficientes do polinômio associado ao Grupo E:

	A	B	C	D	E
Fase 1	-231.363	1860.8	-5611.57	7518.11	-3772.84
Fase 2	-89.8653	698.862	-2041.77	2654.94	-1294.15

Grupo F: Ataque ácido**Figura 4.14** Espectro Multifractal e Dimensão Generalizada do grupo F (Ataque ácido).**Tabela 4.10** Coeficientes do polinômio associado ao Grupo F:

	A	B	C	D	E
Fase 1	-96.8978	778.741	-2350.9	3157.7	-1589.63
Fase 2	-115.119	912.287	-2711.67	3581.66	-1771.35

Grupo G: Ataque ácido + Fosfato de Cálcio

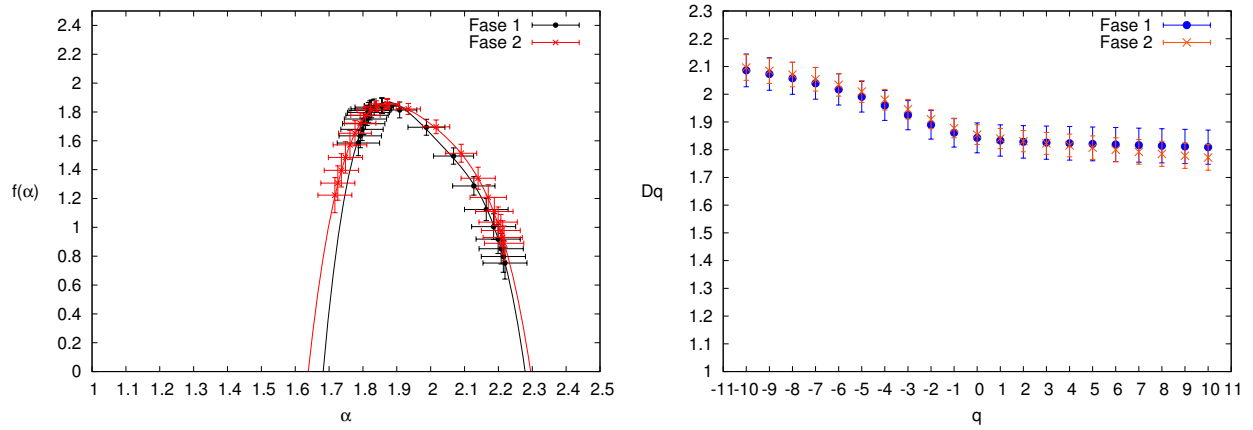


Figura 4.15 Espectro Multifractal e Dimensão Generalizada do grupo G (átaque ácido + Fosfato de Cálcio).

Tabela 4.11 Coeficientes do polinômio associado ao Grupo G:

	A	B	C	D	E
Fase 1	-191.302	1542.55	- 4664.94	6268.38	- 3154.92
Fase 2	-108.093	864.698	- 2597.99	3472.74	- 1739.9

Grupo H: Jateamento

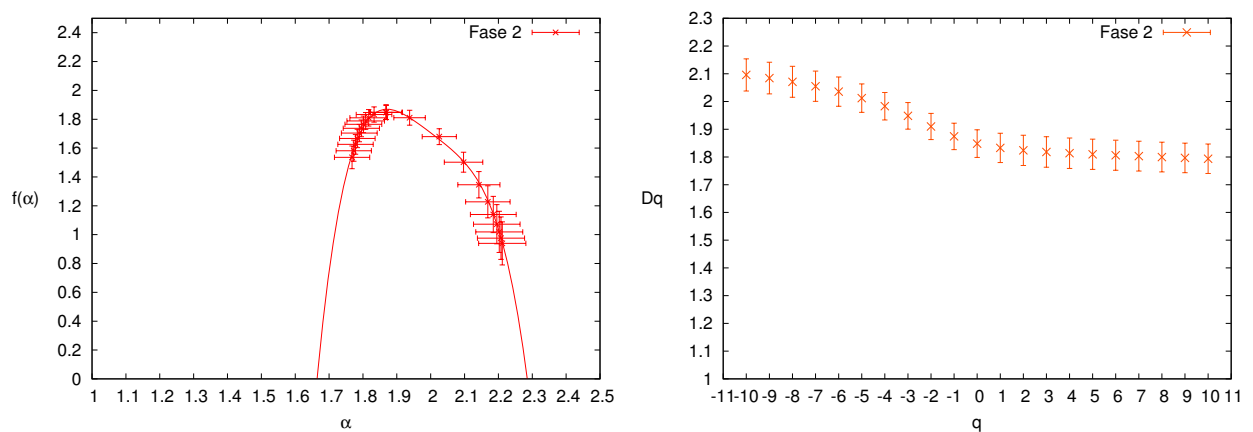


Tabela 4.12 Coeficientes do polinômio associado ao Grupo H:

	A	B	C	D	E
Fase 2	-170.004	1360.89	-4086.33	5452.98	-2725.99

Observando os gráficos de cada tratamento, verifica-se que o espectro tem largura considerável e a dimensão generalizada diminui com o aumento de q , isso mostra que as superfícies apresentam multifractalidade. Os coeficientes das equações traçadas foram usados para calcular os parâmetros de complexidade, os quais ajudam na interpretação dos dados. O primeiro parâmetro calculado foi o α_0 , abscissa do ponto máximo do polinômio no intervalo considerado. As Tabelas 4.13 e 4.14 contém este parâmetro antes e depois da imersão no SFC:

Tabela 4.13 α_0 dos implantes antes da imersão em SFC:

	Com ácido		Sem ácido	
	Com $Ca_3(PO_4)_2$	Sem $Ca_3(PO_4)_2$	Com $Ca_3(PO_4)_2$	Sem $Ca_3(PO_4)_2$
Com Jateamento	1.8697	1.8871	1.8840	
Sem Jateamento	1.8717	1.8817	1.8741	1.8760

Tabela 4.14 α_0 dos implantes depois da imersão em SFC:

	Com ácido		Sem ácido	
	Com $Ca_3(PO_4)_2$	Sem $Ca_3(PO_4)_2$	Com $Ca_3(PO_4)_2$	Sem $Ca_3(PO_4)_2$
Com Jateamento	1.8740	1.8912	1.7099	1.8708
Sem Jateamento	1.8761	1.8433	1.8090	1.9493

Observando as Tabelas 4.13 e 4.14, verifica-se que houve uma pequena diminuição do parâmetro α_0 nos grupos tratados com Fosfato de Cálcio e jateamento(C), somente Fosfato de Cálcio(E) e somente ácido (F). O maior deslocamento pôde ser percebido no grupo tratado com Jateamento e Fosfato de Cálcio (C), no qual a abscissa passou de 1.8840 para 1.7099, ainda assim, é uma variação pequena. No grupo que recebeu todos os tratamentos (A), ataque ácido e jateamento (D) e ataque ácido com Fosfato de Cálcio (G) houve um pequeno aumento do mesmo. Já no que não recebeu nenhum tratamento (B) e no tratado com ácido e Fosfato de Cálcio (G) o parâmetro não sofreu variação significativa.

O segundo parâmetro calculado foi a largura do espectro multifractal W . Este parâmetro está relacionado com a heterogeneidade da imagem estudada, ou seja, quanto mais largo o espectro, maior a variedade de monofractais constituintes dessa imagem. Sejam α_{min} e α_{max} as duas raízes reais do polinômio no intervalo considerado, W é definido como:

$$W = \alpha_{max} - \alpha_{min} \quad (4.1)$$

Abaixo estão as Tabelas 4.15 e 4.16 com os respectivos valores de W antes e depois da imersão em SFC:

Tabela 4.15 W dos implantes antes da imersão em SFC:

	Com ácido		Sem ácido	
	Com $Ca_3(PO_4)_2$	Sem $Ca_3(PO_4)_2$	Com $Ca_3(PO_4)_2$	Sem $Ca_3(PO_4)_2$
Com Jateamento	0.5935	0.6647	0.5801	
Sem Jateamento	0.5966	0.6737	0.5852	0.6586

Tabela 4.16 W dos implantes depois da imersão em SFC:

	Com ácido		Sem ácido	
	Com $Ca_3(PO_4)_2$	Sem $Ca_3(PO_4)_2$	Com $Ca_3(PO_4)_2$	Sem $Ca_3(PO_4)_2$
Com Jateamento	0.8666	0.5704	0.9464	0.6207
Sem Jateamento	0.6571	0.6894	0.6958	1.2217

Observando as Tabelas 4.15 e 4.16, verifica-se que o grupo tratado com Átacaque Ácido (F) e o que não recebeu nenhum tratamento (B), a largura do espectro sofreu a maior variação (de 0.6586 para 1.2217). O único grupo que apresentou uma diminuição desse parâmetro foi o tratado com Jateamento e Átacaque Ácido (D). Os demais conjuntos apresentaram aumento de W , ou seja, o grau de heterogeneidade da superfície aumentou. A Tabela 4.16 mostra que os grupos tratados com ácido apresentam menor largura do espectro, o que significa diminuição da complexidade.

O último parâmetro que foi analisado, foi a razão r a qual mede a assimetria do gráfico. Ele é calculado como descrito na equação 4.2

$$r = \frac{\alpha_{max} - \alpha_0}{\alpha_0 - \alpha_{min}} \quad (4.2)$$

Abaixo seguem as Tabelas 4.17 (antes da imersão em fluido corpóreo) e 4.18 (depois da imersão em fluido corpóreo) nas quais são representados os valores de r :

Tabela 4.17 Assimetria dos gráficos antes da imersão em SFC:

	Com ácido		Sem ácido	
	Com $Ca_3(PO_4)_2$	Sem $Ca_3(PO_4)_2$	Com $Ca_3(PO_4)_2$	Sem $Ca_3(PO_4)_2$
Com Jateamento	2.0789	1.5106	2.1958	
Sem Jateamento	2.1526	1.7615	2.1860	1.9111

Tabela 4.18 Assimetria dos gráficos depois da imersão em SFC:

	Com ácido		Sem ácido	
	Com $Ca_3(PO_4)_2$	Sem $Ca_3(PO_4)_2$	Com $Ca_3(PO_4)_2$	Sem $Ca_3(PO_4)_2$
Com Jateamento	0.9737	2.1926	1.8608	2.0097
Sem Jateamento	1.7643	1.9829	1.5530	0.5068

Quando esse valor é igual a um ($r = 1$), significa que o espectro multifractal é simétrico em relação a α_0 e que tanto pequenas quanto grandes flutuações contribuem igualmente para a multifractalidade [38]. O valor $r > 1$ ($r < 1$) indica que as pequenas (grandes) flutuações contribuem mais para a multifractalidade do fenômeno. Observando as Tabelas 4.17 e 4.18 percebe-se que o único grupo no qual $r < 1$ foi o que não recebeu nenhum tratamento (B). O conjunto tratado com ácido, jateamento e Fosfato de Cálcio (A) foi o único a apresentar $r \approx 1$. Todos os demais apresentaram $r > 1$ antes e depois da imersão em SFC, indicando a contribuição das pequenas flutuações da distribuição espacial de cristais.

CONCLUSÃO

Neste trabalho compararam-se diferentes métodos de tratamento de superfície dos implantes dentários de Titânio utilizando análise fractal, através do cálculo da dimensão fractal, do espectro multifractal e do espectro de lacunaridade. Foram analisadas as imagens de microscopia eletrônica de varredura de superfície dos implantes submetidos aos vários tratamentos, antes e depois de imersão no simulador de fluidos corpóreos (SBF), resultados provenientes de um experimento realizado no Departamento de Odontologia da Universidade Federal de Pernambuco [11].

Os resultados da análise de superfície dos implantes antes da imersão no SBF não mostraram uma diferença significativa entre os diferentes tratamentos, pelos métodos utilizados neste trabalho. Por outro lado, os resultados mostraram a diferença entre a distribuição espacial dos cristais depositados ao longo da imersão no SBF na superfície dos implantes tratados com ataque ácido e implantes que não receberam este tratamento. Para implantes tratados com ataque ácido a dimensão fractal de depósitos dos cristais foi sistematicamente maior, indicando maior número dos cristais depositados com uma distribuição espacial mais uniforme. Este comportamento foi confirmado com análise da lacunaridade: a lacunaridade da distribuição dos cristais foi menor (indicando menor variação em tamanho de lacunas) para implantes tratados com ataque ácido. A análise multifractal mostrou que a distribuição espacial de cristais na superfície do implante possui as propriedades multifractais e uma complexidade maior do que indicada pela dimensão fractal e análise da lacunaridade. Os cristais depositados na superfície dos implantes tratados com ataque ácido mostraram uma estrutura espacial menos complexa (mais estreito espectro multifractal) do que os cristais depositados nos implantes que não receberam este tratamento, indicando menor variedade de flutuações em tamanhos de cristais.

Estes resultados indicam que o tratamento com ataque ácido (para todas as combinações de outros tratamentos) produz uma superfície de implante mais adequada para osseointegração, resultando em deposição dos cristais mais uniforme em tamanhos e em sua distribuição espacial. Por outro lado, para afirmar o potencial destes métodos em avaliação de qualidade de implantes submetidos aos tratamentos diferentes, extensivos e sistemáticos estudos experimentais *in vivo* são necessários para estabelecer quais as combinações destes tratamentos de superfície geram implantes mais biologicamente estáveis e mecanicamente robustos, e como estas propriedades podem ser associadas com as propriedades fractais dos cristais depositados, utilizados neste estudo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] P. Layrolle Y. Amouriq L. Le Guéhennec, A. Soueidan. Surface treatments of titanium dental implants for rapid osseointegration. *Dental Materials*, 23:844 – 854, 2007.
- [2] F.;Torres J.; Al-Adedalla K.; Cabarcos E. L.;Alkharaisat M. H.; Bassett D.C.; Gbureck U. Barralet, J. E.; Tamimi. Osseointegration of dentalimplants in 3d printed synthetic onlay grafts customized according to bone metabolic activity in recipient site. *Biomaterials*, 35:5436 – 5445, 2014.
- [3] J. R. Arthur Belém et al. Novaes. Influence of implant surfaces on osseointegration. *Braz. Dent. J.*, 26(6):471 – 481, 2010.
- [4] J.M. García-Aznar-M. Doblaré M.A. Pérez, P. Moreo. Computational simulation of dental implant osseointegration through resonance frequency analysis. *Journal of Biomechanics*, 41:316 – 325, 2008.
- [5] J.Vásquez J. Domínguez J.M. Ayllón, C. Navarro. Fatigue life estimation in dental implants. *Engineering Fractures Mechanics*, 123:34 – 43, 2014.
- [6] S.; Martini D.; Bacchelli-B.; Quaranta M; Pisoni L.; Bellei E.; Joechler M; Ottani V. Orsini, E.; Salgarello. Early healling events around titanium implant devices with different surface microtopography: A pilot study in an in vivo rabbit model. *The scientific World Journal*, (Orsini, E.; Salgarello, S.; Martini, D.; Bacchelli, B.; Quaranta, M; Pisoni, L.; Bellei, E.; Joechler, M; Ottani, V.), 2012.
- [7] B.; Wang J.; Lu-X.; Liu D.; Qu S Gao, L.; Feng. Micro/nanostructural porous surface on titanium and bioactivity. *Journal of Biomedical Materials Research Part B: Applied Biomaterials*, 89:335 – 341, 2009.
- [8] E.; Sansoni T. Cucchiara, R.; Lamma. An image analysis approach for automatically reorienting ct image for dental implants. *Comput Med. Imaging Graph.*, 4:185 – 201, 2004.
- [9] R. Lopes and N. Betrouni. Fractal and multifractal analysis: A review. *Medical Image Analysis*, 13(4):634 – 649, 2009.
- [10] R. E Gonzalez, R. C.; Woods. *Digital Image Processing*. New Jersey, 2002.
- [11] Leonardo Cavalcante Bezerra dos Santos. *Avaliação do processo de tratamento de superfície de implantes de Titânio*. PhD thesis, UFPE, Recife, 2013.

- [12] Swaminathan Senthil Kumar Viswanathan Krishnan Rajasekar Sundaram. S. Nubesh Khan, Mythili Ramachandran. Osseointegration and more e a review of literature. *Indian Journal of Dentistry*, 3(2):72 – 76, April - June 2012.
- [13] P.I. Branemark. Osseointegration and its experimental background. *Research and Education*, 1983.
- [14] Ph.D. Tomas Albrektsson, M.D. and Ph.D. M. Jacobsson, M.D.. Bone-metal interface in osseointegration. *Maxillofacial Prosthetics - Dental Implants*, pages 597 – 607, 1987.
- [15] H. Moysés Nussenzveig. *Complexidade & Caos*. UFRJ/COPEA, 3 edition, 2008.
- [16] B.B. Mandelbrot. *The Fractal Geomeytry of Nature*. Freeman, San Francisco, 1982.
- [17] Gerald A. Edgar. *Classics on Fractals*. Westview Press, 2004.
- [18] Tzuyin Wu. Zhi-Yuan Su. Multifractal analyses of music sequences. *Physica D.*, 221:188 – 194, 2006.
- [19] Tzuyin Wu Zhi-Yuan Su. Music walk, fractal geometry in music. *Physica A.*, 380:418 – 428, 2007.
- [20] Ankur Roy, Edmund Perfect, William M. Dunne, Noelle Odling, and Jung-Woo Kim. Lacunarity analysis of fracture networks: Evidence for scale-dependent clustering. *Journal of Structural Geology*, 32(10):1444 – 1449, 2010.
- [21] Tat Soon Yeo Gan Du. A novel lacunarity estimation method applied to sar image segmentation. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing.*, 40(12), December 2002.
- [22] Pierluigi Maponi Roberto Rossi Roberto Murri Annamaria Zaia, Roberta Eleonori. Mr imaging and osteoporosis: Fractal lacunarity analysis of trabecular bone. *IEEE Transactions on Information Technology in Biomedicine.*, 10(3), July 2006.
- [23] Eduardo Gutiérrez De Ravé Ana B. Ariza-Villaverde, Francisco J. Jiménez-Hornero. Multifractal analysis of axial maps applied to the study of urban morphology. *Computers, Environment and Urban Systems*, 38:1–10, 2013.
- [24] Oscar Velazquez-Camilo, Eusebio Bola nos Reynoso, Eduardo Rodriguez, and Jose Alvarez-Ramirez. Characterization of cane sugar crystallization using image fractal analysis. *Journal of Food Engineering*, 100(1):77 – 84, 2010.
- [25] Przemyslaw Borys, Monika Krasowska, Zbigniew J. Grzywna, Mustafa B.A. Djamgoz, and Maria E. Mycielska. Lacunarity as a novel measure of cancer cells behavior. *Biosystems*, 94(3):276 – 281, 2008. Bio(nano)materials with structure-property relationship International Symposium on Bionanomaterials.

- [26] M. Bizzarri, A. Giuliani, A. Cucina, F. DâAnselmi, A.M. Soto, and C. Sonnenschein. Fractal analysis in a systems biology approach to cancer. *Seminars in Cancer Biology*, 21(3):175 – 182, 2011.
- [27] F. Martinez-Lopez, M.A. Cabrerizo-Vilchez, and R. Hidalgo-Alvarez. A study of the different methods usually employed to compute the fractal dimension. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 311(3â4):411 – 428, 2002.
- [28] Kenneth Falconer. *Fractal Geometry - Mathematica Foundations and Applications*. Wiley, 2 edition, 2003.
- [29] I. Procaccia P. Grassberger. Characterization of strange attractors. *Phys. Rev. Lett*, 50, 1983.
- [30] Soe Win Myint and Nina Lam. A study of lacunarity-based texture analysis approaches to improve urban image classification. *Computers, Environment and Urban Systems*, 29(5):501 – 523, 2005.
- [31] Yadvinder Malhi and Rosa Maria Roman-Cuesta. Analysis of lacunarity and scales of spatial homogeneity in ikonos images of amazonian tropical forest canopies. *Remote Sensing of Environment*, 112(5):2074 – 2087, 2008.
- [32] C. Allain and M. Cloitre. Characterizing the lacunarity of random and deterministic fractal sets. *Phys. Rev. A*, 44:3552–3558, Sep 1991.
- [33] Roy E. Plotnick, Robert H. Gardner, William W. Hargrove, Karen Prestegard, and Martin Perlmutter. Lacunarity analysis: A general technique for the analysis of spatial patterns. *Phys. Rev. E*, 53:5461–5468, May 1996.
- [34] B. Stosic. T. Stosic. Multifractal analysis of human retinal vessels. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 25:1101–1107, 2006.
- [35] Roderick V. Spectrum Ashvin Chhabra. Direct determination of the $f(\alpha)$ singularity spectrum. *Physical Review Letters*, 62(12), 1989.
- [36] Roberto Quiroz Adolfo N. D. Posadas, Daniel Giménez and Richard Protz. Multifractal characterization of soil pore systems. *Soil Science*, 67, October 2003.
- [37] Rosilda B. de Benicio, Tatijana Stosic, P.H. de Figueirêdo, and Borko D. Stosic. Multifractal behavior of wild-land and forest fire time series in brazil. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 392(24):6367 – 6374, 2013.
- [38] F. San José Martínez, M.A. Martín, F.J. Caniego, M. Tuller, A. Guber, Y. Pachepsky, and C. García-Gutiérrez. Multifractal analysis of discretized x-ray {CT} images for the characterization of soil macropore structures. *Geoderma*, 156(1â2):32 – 42, 2010.

