



Universidade Federal Rural de Pernambuco
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Departamento de Física

Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada

Modelo heterogêneo adaptativo com informação para a dinâmica
da distribuição de renda

Miguel Alves da Costa Neto

Dissertação de Mestrado

Recife - PE

17 de abril de 2019

Universidade Federal Rural de Pernambuco
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Departamento de Física

Miguel Alves da Costa Neto

**Modelo heterogêneo adaptativo com informação para a dinâmica
da distribuição de renda**

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada do Departamento de Física da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física Aplicada.

Orientador: Dr. Pedro Hugo de Figueirêdo

**Recife - PE
17 de abril de 2019**

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA APLICADA

**Modelo heterogêneo adaptativo com informação para a dinâmica da
distribuição de renda**

Miguel Alves da Costa Neto

Dissertação julgada adequada para obtenção do título de mestre em Física, defendida e aprovada por unanimidade em 17/04/2019 pela Comissão Examinadora.

Orientador:

Prof. Dr. Pedro Hugo de Figueirêdo
DF - UFRPE

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Pedro Hugo de Figueirêdo
DF - UFRPE

Prof. Dr. Gustavo Camelo Neto
CAA - UFPE

Prof. Dr. Adauto José Ferreira de Souza
DF - UFRPE

Dedico esta, bem como todas as minhas demais conquistas, a Deus e a todos os meus amigos e familiares.

Agradecimentos

Agradeço ao professor e orientador Pedro Hugo pela atenção, crença e apoio na elaboração deste trabalho, à minha esposa e filhos pelo incentivo, carinho e compreensão, aos professores que sempre buscaram dar a melhor formação possível com muito empenho, comprometimento e paciência e aos colegas da pós-graduação pelo companheirismo e momentos divertidos durante essa jornada.

Resumo

Nas quatro últimas décadas, os físicos têm investigado problemas econômicos a partir de suas experiências em criar modelos matemáticos para descrever fenômenos naturais. Dentre estes, podemos destacar os estudos relacionados à caracterização das desigualdades da distribuição de renda associadas aos modelos baseados em agentes. Uma forma de quantificar tais desigualdades se dá através do cálculo do índice de Gini $0 \leq G \leq 1$, um parâmetro que indica máxima desigualdade para $G = 1$ e mínima quando $G = 0$. Nesta dissertação apresentamos um modelo computacional, denominado modelo heterogêneo adaptativo com informação, nele uma fração q de seus agentes possui correlação negativa entre sua taxa de gasto ω_i e seu nível de renda m_i , enquanto a população restante possui correlação positiva. Analisamos o papel da assimetria de informação sobre a distribuição de renda por meio do parâmetro p , que estabelece a fração de agentes com informação global do valor médio das transações Ω . Investigamos a polarização da distribuição por meio do coeficiente de bimodalidade β e estudamos sua dependência como função dos parâmetros p e q . O modelo produz diversos cenários de desigualdade, polarização e fluxo de recursos como características emergentes da dinâmica, em particular os estados (G, ω) correspondem a comportamentos limitantes compatíveis com aqueles observados em dados reais. De modo geral, as distribuições apresentam menor caráter bimodal para situações de maior uniformidade de adaptação independentemente da fração p . Para as situações intermediárias ($0 < q < 1$) a polarização possui um comportamento monotonicamente decrescente com p .

Palavras-chave: Econofísica. Distribuição de renda. Modelos baseados em agentes. Adaptabilidade. Informação

Abstract

In the last four decades, physicists have investigated economic problems from as their experiences in creating mathematical models to describe natural phenomena. Among these, there can be highlighted the studies related to the characterization of the inequalities of the income distribution associated with the agent-based models. One way of quantifying such inequalities occurs through the calculation of the Gini index $0 \leq G \leq 1$, a parameter which indicates maximum inequality for $G = 1$ and minimum when $G = 0$. In this master thesis we present a computational model, called adaptive heterogeneous model with information, in it a fraction q of its agents has a negative correlation between its expenditure ω_i and its income level m_i , while the remaining population has a positive correlation. We analyzed the role of asymmetry of information on distribution through the parameter p , which establishes the fraction of agents with global information of the average value of the transactions Ω . We investigated the polarization of the distribution by means of the bimodality coefficient β and study its dependence as a function of the parameters p and q . The model produces several inequality, polarization, and resource flows as emerging characteristics of dynamics, in particular the states (G, ω) corresponds to limiting behaviors compatible with those observed in real data. In general, distributions exhibit a lower bimodal feature for situations of greater uniformity independent on adaptation fraction p . For the intermediate situations ($0 < q < 1$) polarization presents a monotonically decreasing behavior with p .

Keywords: Econophysics. Income distribution. Agent-based models. Adaptability. Information.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Ciências naturais e a economia	3
1.2	Sistemas complexos	6
1.3	Distribuição de renda	9
1.4	Organização da dissertação	12
2	Modelos	13
2.1	Modelos homogêneos	15
2.1.1	O modelo de Angle	15
2.1.2	Modelo de Bennati	17
2.1.3	Modelo de Chakraborti e Chakrabarti	18
2.1.4	Modelo Dragulescu e Yakovenko	19
2.2	Modelos heterogêneos	20
2.2.1	Modelo heterogêneo e adaptativo	22
2.2.2	Modelo heterogêneo adaptativo tipo 1 (MHA1)	23
2.2.3	Modelo heterogêneo e adaptativo tipo 2 (MHA2)	24
3	Modelo heterogêneo adaptativo com informação	30
3.1	Resultados da simulação	33
4	Estudo do comportamento bimodal da distribuição do modelo heterogêneo adaptativo com informação	40

4.1	Resultados das simulações	42
4.1.1	Cálculo do coeficiente de bimodalidade	42
5	Conclusão	49
A	Dados do Banco Mundial	52
	Referências Bibliográficas	63

Lista de Símbolos

ν	Expoente de Pareto
m_i	Renda do i -ésimo agente
G	Índice de Gini
ω_i	Taxa de gasto do i -ésimo agente
Ω	Gasto médio de recursos do sistema
q	Fração dos agentes que possuem taxa de gasto e renda negativamente correlacionadas
p	Fração dos agentes que possuem informação
β	Coefficiente de bimodalidade
$P(m)$	Distribuições de renda

Lista de Figuras

1.1	Curva de Lorenz para uma certa distribuição de renda (curva vermelha), onde a linha preta representa a perfeita igualdade de renda. Retirado de [10].	11
1.2	Gráfico das médias dos índice de Gini em função das médias da taxa de gasto de 123 países do mundo no período de 2000 à 2017. Dados Retirado do Banco mundial [13,14].	11
2.1	Representação esquemática da interação entre gotas de água, onde i e j representam gotas com massa m , quando as duas colidem, i perde uma quantidade Δm de massa que é absorvida por j . Retirada de [10].	17
2.2	Representação esquemática da interação entre partículas, onde i e j representam partículas que emitem e absorvem luz com uma determinada frequência constante. Retirado de [10].	18
2.3	Representação esquemática da interação entre partículas, onde i e j representam partículas, após uma colisão elástica, duas partículas trocam uma quantidade Δm de energia. Retirado de [10].	20
2.4	Comportamento da taxa de gasto ω e o do índice de Gini G como função do aumento da fração da população com inércia nula $\gamma = 1$ para o modelo MHA1. Retirada e modificada de [10].	26
2.5	Comportamento da taxa de gasto ω e o do índice de Gini G como função do aumento da fração da população com inércia nula $\gamma = 1$ para o modelo MHA2. Retirada e modificada de [10].	26

2.6	Resultados para o coeficiente de Gini e taxa de gasto do MHA1 (quadrados verdes), MHA2 (quadrados vermelhos) e modelo homogêneo (quadrados azuis) em comparação com as médias para o coeficiente de Gini e taxa de gasto de 123 países, no período de 1990 à 2009 (círculo pretos). Retirada de [10].	27
2.7	Comportamento da distribuição de renda $P(m)$ em função da renda m para MHA1. As diversas cores expressam diferentes frações f da população com inércia $\gamma = 1$, gráfico (A) $f = 0,25$ (preto), gráfico (B) $f = 0,50$ (vermelho), gráfico (C) $f = 0,75$ (verde) e gráfico (D) $f = 1,0$ (azul) . Retirada de [10].	28
2.8	Resultados para o coeficiente de Gini e taxa de gasto média para MHA1, MHA2, MHA formado apenas por agentes com inércia nula e o modelo de três estados. Retirada de [49].	28
2.9	Resultados para os valores médios do coeficiente de Gini e taxa de gasto para $f_r = 0$ (curva laranja) e $f_r = 1$ (curva rosa) comparados com dados reais (círculos pretos) para 132 países, no período de 1998 à 2012. Retirada e modificada de [49].	29
3.1	Gráfico da taxa de gasto $[\omega]$ em função do tempo, onde q representa a fração de agentes do tipo MHA2 e p a fração de agentes com informação conforme legenda.	34
3.2	Gráfico da taxa de gasto $[\omega]$ em função da fração q de agentes do tipo MHA2 para sistemas com diversas frações de agentes com informação conforme legenda.	34
3.3	Gráfico da taxa de gasto $[\omega]$ (vide legenda) em função das frações q de agentes do tipo MHA2 e das frações p de agentes com informação.	35
3.4	Gráfico do índice de Gini $[G]$ em função da fração q de agentes do tipo MHA2 para sistemas com diversas frações de agentes com informação conforme legenda.	36
3.5	Gráfico do índice de Gini $[G]$ (vide legenda) em função das frações q de agentes do tipo MHA2 e das frações p de agentes com informação.	37
3.6	Gráfico do índice de Gini $[G]$ em função da taxa de gasto $[\omega]$ para sistemas com frações de agentes do tipo MHA2 distribuídos no intervalo $0 \leq q \leq 1$ em passos $dq = 0,1$ e frações de agentes com informação de acordo com a legenda.	38

3.7	Gráfico do índice de Gini $[G]$ da taxa de gasto $[\omega]$ para sistemas com frações de agentes do tipo MHA2 distribuídos no intervalo $0 \leq q \leq 1$ em passos $dq = 0,1$, frações de agentes com informação de acordo com a legenda e dados do banco mundial referente a 123 países extraídos no período de 2000 à 2017 (círculos pretos) [13,14].	39
4.1	Gráfico do coeficiente de bimodalidade médio em função da fração q de agentes do tipo MHA2. As diversas cores representam a fração p de agentes com informação conforme legenda.	43
4.2	Comportamento do coeficiente de bimodalidade $[\beta]$ (vide legenda) em função das frações q de agentes do tipo MHA2 e das frações p de agentes com informação.	43
4.3	Comportamento da distribuição de renda $P(m)$ para o modelo heterogêneo adaptativo com informação. Cada gráfico possui uma fração $p = 0,0$ de agentes com informação, frações q de agentes do tipo MHA2 e coeficiente de bimodalidade β	44
4.4	Comportamento da distribuição de renda $P(m)$ para o modelo heterogêneo adaptativo com informação. Cada gráfico possui uma fração $p = 0,2$ de agentes com informação, frações q de agentes do tipo MHA2 e coeficiente de bimodalidade β	45
4.5	Comportamento da distribuição de renda $P(m)$ para o modelo heterogêneo adaptativo com informação. Cada gráfico possui uma fração $p = 0,4$ de agentes com informação, frações q de agentes do tipo MHA2 e coeficiente de bimodalidade β	46
4.6	Comportamento da distribuição de renda $P(m)$ para o modelo heterogêneo adaptativo com informação. Cada gráfico possui uma fração $p = 0,6$ de agentes com informação, frações q de agentes do tipo MHA2 e coeficiente de bimodalidade β	46

4.7	Comportamento da distribuição de renda $P(m)$ para o modelo heterogêneo adaptativo com informação. Cada gráfico possui uma fração $p = 0,8$ de agentes com informação, frações q de agentes do tipo MHA2 e coeficiente de bimodalidade β	47
4.8	Comportamento da distribuição de renda $P(m)$ para o modelo heterogêneo adaptativo com informação. Cada gráfico possui uma fração $p = 1,0$ de agentes com informação, frações q de agentes do tipo MHA2 e coeficiente de bimodalidade β	47
4.9	Gráfico do número médio de transações em função da fração q de agentes do tipo MHA2. As diversas cores representam a fração p de agentes com informação.	48
4.10	Gráfico do gasto médio de recursos $[\Omega]$ (vide legenda) em função da média amostral do coeficiente de bimodalidade $[\beta]$ e da média amostral do índice de Gini $[G]$	48

Lista de Tabelas

2.1	Tabela comparativa dos parâmetros $n(\lambda)$, $\bar{\omega}_i$ e $\bar{\omega}_j$ entre os modelos de Angle, Bennati, Chakraborti & Chakrabarti e Dragulescu & Yakovenko para distribuição de renda.	22
A.1	Valores médios da taxa de gasto \bar{w} e índice de Gini \bar{G} de 123 países coletados entre os anos de 2000 à 2017 [13,14]	52

Capítulo 1

Introdução

Mais notadamente nas quatro últimas décadas, a física tem participado de uma intensa colaboração com as demais áreas do conhecimento. Tal processo de intercâmbio, que vai das ciências sociais aplicadas, como a economia, até as ciências biológicas, passando pela psicofísica, sociologia, linguística e pelo urbanismo, tem permitido avanços não só na descrição e previsão dos fenômenos destas áreas, como também tem ajudado na compreensão de problemas fundamentais do escopo da física, com o desenvolvimento de uma série de ferramentas teóricas e experimentais de novos e velhos problemas físicos. Estes sistemas complexos [1], como tem sido denominados, são usualmente constituídos por um número considerável de elementos interagindo por meio de mecanismos não triviais, compartilhando características fundamentais como heterogeneidade, adaptabilidade, frustração e memória. Dentro deste contexto, a recente criação de áreas como a econofísica podem ser citadas como exemplos emblemáticos desta sistematização.

Nas últimas décadas, os físicos têm se interessado em estudar problemas econômicos a partir de suas experiências em criar modelos matemáticos para descrever fenômenos, para tanto, o uso de ferramentas matemáticas e computacional são empregados na busca por soluções que possam auxiliar no entendimento dos fenômenos econômicos. Dentre as pesquisas, podemos destacar os estudos relacionados à distribuição de renda. Diversos pesquisadores, de diferentes áreas, vêm desenvolvendo modelos computacionais no intuito de descrever a dinâmica envolvida em processos de distribuição de renda, entretanto, para que se possa

formular uma razoável descrição deste fenômeno seria necessário levar em conta um grande número de parâmetros subjetivos como preferências, comportamento de consumo dos agentes econômicos, suas crenças no futuro, desempenho da economia, as influências de uma parcela considerável de uma população sobre o restante do sistema [2], entre outros fatores.

Apesar dos vínculos citados, evidências estatísticas [3, 4, 5, 6, 7], sugerem que para uma grande variedade de países a distribuição de renda apresenta um caráter universal, exibindo duas fases. Uma primeira, num regime de pequenos valores de renda, correspondendo aproximadamente a 95% do total da população, descrita matematicamente por uma distribuição Gama. Por outro lado, no regime de grandes valores de renda, a distribuição segue uma lei de potência.

Muitos dos atuais modelos apresentados na literatura [3, 4, 8, 7, 9], fornecem descrições parciais dos parâmetros que descrevem os processos que levam ao padrão da distribuição de renda observado ao redor do mundo. Contudo, a questão chave parece ser a seguinte: seria possível propor um modelo no qual as distribuições, fruto da dinâmica de interação entre os agentes, tivessem seus parâmetros compatíveis com aqueles expostos na literatura e ainda assim fossem uma característica emergente do sistema?

Nesta dissertação, investigamos o modelo baseado em agentes, denominado Modelo Heterogêneo Adaptativo (MHA) [10], de modo a incorporar o papel da assimetria de informação dos agentes sobre a distribuição de recursos. Num primeiro momento, analisaremos o papel da informação sobre a desigualdade da distribuição quantificada por meio do índice de Gini. Posteriormente, quantificaremos a bimodalidade relacionada à distribuição de renda e analisaremos o comportamento bimodal como função da fração de agentes adaptáveis e da fração de agentes que possuem informação, estabelecendo diferentes correlações entre renda, taxa de gasto e a bimodalidade.

O estudo da bimodalidade no modelo MHA nos parece relevante uma vez que a presença de multimodalidade está intimamente relacionada a heterogeneidade da população [11]. Além disso, as modas presentes em uma distribuição indicam a polarização da renda, e portanto, definem características significativamente importantes no entendimento de alguns aspectos econômicos e sociais [12].

Para este trabalho, introduziremos um modelo microscópico, escrito em linguagem FOR-

TRAN95, onde a troca de recursos entre agentes, dentro de um sistema fechado, está submetido a um processo adaptativo, onde a taxa de troca pode ser auto-regulada por cada agente, em função de seu próprio nível de recursos. Buscaremos, desse modo, obter não só a distribuição de renda e seus respectivos parâmetros como características emergentes do sistema, como também, fornecer respostas adequadas para a transferência de recursos entre os agentes. Como forma de corroborar os nossos resultados, as taxas de gasto e os índices de Gini produzidos pela dinâmica são comparados com dados reais disponíveis no banco mundial [13, 14].

1.1 Ciências naturais e a economia

Em meados da década de 1990, Eugene Stanley cunhou o termo “econofísica” para descrever um campo de pesquisa onde técnicas usadas para investigar problemas físicos eram empregadas na solução de problemas em economia [15, 16]. Embora o termo econofísica seja relativamente novo, a interação entre as ciências naturais e a economia vem ocorrendo há muito tempo ao longo da história.

Em 1776, Adam Smith (1723 - 1790), considerado por muitos o pai da economia moderna, publicou sua principal obra "*Uma investigação sobre a natureza e a causa da riqueza das nações*" [17], nela, Smith descreveu os sistemas econômicos e propôs um estudo da economia tomando como base os estudos da riqueza e dos bens materiais. Sua obra apresentava características que mais tarde foram vistas também na teoria da evolução de Charles Darwin (1809 – 1892), segundo a obra de Smith, em uma economia de mercado, mesmo na ausência de uma entidade controladora, a interação entre os indivíduos resultaria em uma determinada ordem, defendendo a ideia de que a concorrência é a força oculta (mão invisível) agindo por trás da adaptação do mercado como uma evolução natural [18]. Pode-se perceber também, uma influência da mecânica newtoniana quando Smith representa a sociedade como um modelo, onde uma coleção de indivíduos buscam seus interesses próprios em uma ordem econômica regida pelas leis da oferta e procura [19]. Outro economista que sofreu influência da física, em especial a lei de equilíbrio dos corpos, foi Walras (1834-1910), sua lei geral do equilíbrio foi influenciada pelo trabalho do matemático Louis Poincaré (1777 - 1859) publi-

cado em 1803, denominado "*Éléments de statique*", esta obra consiste em um tratado de mecânica clássica, especificamente da parte da mecânica que considera a estática [20].

Adolphe Quetelet (1796-1874) acreditava na ideia que as leis físicas poderiam governar o comportamento humano e também a economia [21]. Seu contemporâneo, Auguste Comte (1798-1874) acreditava que os aspectos da sociedade, em geral, deveriam ser estudados com abordagens semelhantes às aquelas utilizadas nas ciências naturais para tratar seus respectivos objetos de estudo [22], dando origem a chamada física social, uma nova disciplina que surge fruto da interação entre a ciências sociais e a física.

No final do século XIX, Francis Edgworth (1845 - 1926) e Alfred Marshall (1842 - 1924) usaram algumas ideias da física para desenvolver a noção de economia alcançada em um estado de equilíbrio, semelhante a ideia usada por Maxwell (1831 - 1879) e Boltzmann (1844 - 1906) no estudo de gases [23]. A partir daí, a teoria geral do equilíbrio passou a ser uma ideia central no pensamento econômico [24].

O engenheiro, economista e filósofo Vilfredo Pareto (1848 - 1923), em seu estudo sobre distribuição de renda, concluiu que 20% das pessoas controlavam 80% da riqueza e que as distribuições de renda apresentavam semelhanças na forma da distribuição, elas seguiam uma lei de potência [25]. Embora a distribuição proposta por Pareto apresentasse uma boa aproximação para regimes de rendas mais altas, ela divergia para intervalos de renda mais baixas. Pareto foi um dos pioneiros na utilização de métodos matemáticos para analisar problemas em economia.

O matemático francês Louis Bachelier (1870 – 1946) em sua tese de doutorado apresentada em 1900, intitulada de "*Teoria da Especulação*", inspirou-se nas ideias do movimento Browniano observado pelo biólogo Robert Brown (1773 – 1858) em 1827 e descrito matematicamente por Thorvald N. Thiele em um artigo de 1880 [26]. Bachelier usou o conceito de passeio aleatório (*random walk*) para criar um modelo matemático para movimentação de preços e avaliação de títulos em mercado de ações [27]. Posteriormente, ainda no início do século XX, novas contribuições para a formalização matemática e medidas experimentais que caracterizavam o movimento Browniano foram fornecidos por Einstein, Langevin e Jean Perrin.

Em 1973, um artigo intitulado "*The Pricing of Option and Corporate Liabilities*" de

autoria de Fisher Black e Myron Scholes, equações diferenciais foram utilizadas para calcular como a taxa de desconto de títulos varia com o tempo e com o preço do ativo [28], onde a evolução destes preços é considerada um processo estocástico.

Na segunda metade do século XX, os físicos desenvolveram a teoria dos sistemas adaptativos complexos [29], uma das propriedades marcantes de tais sistemas é a presença de leis de escala ou leis de potência. Estas são observadas em diversos contextos, desde sistemas biológicos até o comportamento de bolsas de valores. A tentativa de construir um esquema teórico geral para esses fenômenos deu origem a novas áreas de investigações, bem como apontou conexões com outros tópicos de pesquisas como a teoria do caos. Conceitos como criticalidade auto-organizada, auto-similaridade, fractais e leis de potência passaram a fazer parte da física contemporânea [30]. O avanço tecnológico possibilitou a fabricação de computadores com maiores capacidades de processamento, baixo custo e algoritmos mais eficientes. Esses fatores contribuíram para um maior interesse, por parte dos físicos, em estudar os sistemas complexos nas mais diversas áreas, dentre elas a economia.

A primeira conferência sobre econofísica aconteceu em 1997, em Budapeste, e em 1998 ocorreu o "*International Workshop on econophysics and statistical finance*" em Palermo [31, 16]. A primeira conferência oficialmente reconhecida por uma sociedade profissional foi a "*Application of physics in financial analysis*" (APFA) realizada em 1999, em Dublin [18]. O retorno positivo e a riqueza das contribuições favoreceram a organização de novas edições do evento, organizados em Liege (2001), Londres (2002) e Varsóvia (2003). No Brasil, ocorreram o "*Encontro de econofísica*" em 2007 no Rio de Janeiro, o "*Physics applied to economic and social sciences*" em 2008 na cidade de Porto Alegre e o "*Encontro de econofísica*" em 2010 na cidade de São Paulo.

A econofísica é uma área relativamente nova, portanto ainda não existem teorias e leis bem definidas como na física. Tradicionalmente, a economia pode ser vista como um sistema complexo, onde as características dos sistemas surgem como consequência emergente da interação dos agentes constituintes do sistema. O estudo da economia como um sistema complexo promete ser um dos campos mais promissores de colaboração entre economistas, físicos e outros profissionais de áreas ligadas a ciências e tecnologia durante os próximos anos.

1.2 Sistemas complexos

Em 1948, O matemático americano Warren Weaver publicou o artigo "*science and complexity*", neste artigo, Weaver classifica os problemas em ciências em três grupos: problemas de simplicidade, problemas de complexidade desorganizada e problemas de complexidade organizada [32].

Os problemas de simplicidades são aqueles descritos por poucas variáveis e que o comportamento do sistema pode ser descrito a partir de equações simples. Nessa categoria, podem ser incluído grande parte dos problemas resolvidos entre o século XVII e XIX que resultaram no desenvolvimento de tecnologias como o telefone, rádio, automóveis, etc.

Os problemas de complexidades desorganizadas são caracterizados por um número muito grande de partículas dispostas de forma desorganizada, com interação fraca ou nula entre as partículas. Nesses problemas, são empregados métodos estatísticos para análise do sistema. Os problemas abordados em mecânica estatística e na teoria cinética dos gases podem ser citados como exemplos de problemas de complexidades desorganizadas.

Os problemas de complexidade organizada são caracterizados por um número moderado de partículas (agentes, indivíduos, etc) que interagem fortemente uma com as outras de forma organizada, nestes problemas a abordagem estatística é ineficaz à sua análise. Nesta seção, serão abordados aspectos referentes a este último tipo de problema a que Weaver definiu, a estes problemas iremos nos referir como problemas de complexidade e seus sistemas como complexos.

As pesquisas com sistemas complexos está se tornando cada vez mais importante nas ciências naturais e sociais [33]. Os estudos dos sistemas complexos são relativamente recentes, mas do ponto de vista conceptual, pode ser entendido que a transição da física newtoniana para a mecânica estatística é muito semelhante à transição atual da mecânica estatística clássica para os sistemas complexos [29]. Tais pesquisas consistem em um campo interdisciplinar que procura explicar como um moderado número de entidades ou agentes relativamente simples organiza-se, sem qualquer controle central, em um conjunto que dá origem a um comportamento coletivo complexo, usa informação e, em alguns casos, evolui e aprende [34].

Os sistemas complexos são bastantes comuns em física, biologia e sócio–economia, uma vez que, ensembles de partículas, indivíduos ou agentes são componentes que fazem parte respectivamente desses campos de pesquisa. Apesar dos objetos de estudo pertencerem à áreas de conhecimento diferentes, algumas características comuns podem ser encontradas nesses sistemas, são elas:

- **Comportamento coletivo complexo:** os sistemas são constituídos por grande número de componentes individuais, cada um geralmente seguindo regras simples sem controle central ou liderança. São as ações coletivas dos componentes individuais que dão origem ao complexo, padrões de comportamentos difíceis de prever quando se analisa as características dos componentes individualmente. A esses padrões de comportamento chamamos de propriedades emergentes.
- **Sinalização e processo de informação:** todos esses sistemas produzem e usam informações e sinais de seu ambiente interno e externo.
- **Adaptação:** em um sistema complexo, os componentes individuais armazenam e processam informações usando-as para evoluir e adaptar-se a cada instante, tentando tirar proveito das mudanças do meio.

Os sistemas dinâmicos complexos são modelados tipicamente através de equações não lineares, apresentando como característica a forte dependência das condições iniciais (pequenas mudanças das condições iniciais causam diferenças significativas no comportamento do sistema) ou efeito *feedback* (retroalimentação) [35]. A abordagem dos problemas de complexidade exige, portanto, métodos computacionais para a elaboração de modelos que possam descrever a forma de interação entre os componentes, de maneira que possa representar a dinâmica do sistema e assim ser possível o estudo das propriedades emergentes das interações. Nesse contexto, os modelos podem ser definidos como sendo uma representação simplificada da realidade, onde o grau de simplificação do modelo deve ser construído num nível tal, que possa descrever o fenômeno dentro de um grau de aproximação que não comprometa a interpretação da dinâmica do sistema. Encontrar esse grau de simplificação é um dos grandes desafios que o pesquisador tem que enfrentar na construção do modelo.

Uma forma de modelar os sistemas complexos é através do uso de modelos baseados

em agentes (MBA), onde o sistema é modelado como um conjunto de entidades (agentes) autônomas com capacidade de tomar decisões [36]. O processo de construção dos modelos baseados em agentes tem alguns aspectos singulares, devido ao uso da perspectiva de agentes, ao invés da perspectiva baseada em processos tradicionais de modelagem e simulação [37]. Macal e Noth [38] enumeram os seguintes passos na construção do MBA:

1. **Agentes:** identificar os tipos de agentes e seus atributos;
2. **Ambiente:** definir o ambiente no qual os agentes irão habitar e interagir;
3. **Métodos de agentes:** definir os métodos pelos quais os atributos dos agentes serão atualizados em resposta às interações realizadas entre agentes e entre os agentes e o meio ambiente;
4. **Interações de agentes:** adicionar os métodos e regras que controlam as interações, definindo quais agentes interagem, como ocorre e a duração da interação durante a simulação;
5. **Implementação:** implementar o modelo através de *software* computacional.

A modelagem baseada em agentes pode oferecer algumas vantagens em relação as modelagens tradicionais, é portanto, vantajoso abordar os problemas com MBA quando: há uma representação natural como agentes, há decisões e comportamentos que podem ser definidos discretamente, é importante que os agentes se adaptem e mudem seu comportamento, haja relacionamentos dinâmicos que possam ser formados e dissolvidos com outros agentes, é importante que os agentes formem organizações e a adaptação e aprendizagem são fatores importantes na organização do sistema [37].

Nas últimas décadas, os modelos baseados em agentes têm sido empregados para estudos de aspectos relacionados a distribuição de renda, com a finalidade de estudar características do sistema que podem influenciar na forma como a renda é distribuída entre os indivíduos que formam uma determinada população.

1.3 Distribuição de renda

Um dos maiores interesses nas pesquisas em economia é estudar a maneira ideal de distribuir recursos escassos. Em outras palavras, como distribuir recursos limitados e obter o maior bem estar possível em uma sociedade? Na economia, distribuição de renda ou distribuição de riqueza é o modo como se processa a repartição da riqueza e dos bens socialmente produzidos, entre os habitantes e entre os diferentes estratos da população de um país ou região [39]. As primeiras investigações relacionadas com este tema surgiram no início do século XIX, quando David Ricardo, um economista clássico, considerou que o principal objetivo da economia política era explicar a distribuição do produto nacional entre proprietários de terra, donos de capital e trabalhadores, na forma de renda, lucro e salários respectivamente [40]. Conforme comentado anteriormente, uma importante contribuição nesta área foi dada pelo economista Vilfredo Pareto no final do século XIX [25]. Ele investigou dados de renda de vários países da Europa e concluiu que as distribuições de renda seguiam uma forma de lei de potência, descrita pela expressão

$$P(m) \propto m^{-(\nu+1)}, \quad (1.1)$$

onde m representa a renda e $1 \leq \nu \leq 2$ é denominado expoente de Pareto. Segundo sua pesquisa, a forma da distribuição e o expoente aparentemente não dependiam das diferentes condições econômicas dos países.

A lei de potência proposta por Pareto apresentava boa concordância para o intervalo do regime de grandes rendas, porém divergia para os intervalos de média e pequenas rendas. A partir da década de 1960, através de vários estudos empíricos, observou-se que o expoente para a cauda da distribuição de renda não era universal [41, 42]. Desde então, diversas pesquisas vêm sendo realizadas com a finalidade de propor modelos que possam representar distribuições em consonância com os dados reais.

Um dos objetivos do estudo das distribuições de renda de um país ou região é determinar as desigualdades sociais implicadas em um determinado modelo econômico e no fornecimento de indicadores que possam auxiliar na proposição de possíveis políticas públicas que contribuam para uma redução da desigualdade.

Para quantificar a distribuição de recursos na economia, foram criados diversos índices, dentre os mais conhecidos e utilizados encontra-se o índice de Gini ou coeficiente de Gini. O índice de Gini é uma medida de desigualdade desenvolvida pelo estatístico italiano Corrado Gini e publicada no documento “Variabilità e Mutabilità” em 1912. Tal parâmetro está compreendido no intervalo $0 \leq G \leq 1$, onde $G = 0$ representa mínima concentração de renda, ou seja, todos os indivíduos possuem mesma quantidade de recursos e $G = 1$ representa máxima concentração de renda, ou seja, um único indivíduo possui todo os recurso daquela sociedade.

O coeficiente de Gini é obtido a partir da curva de Lorenz, a qual, mostra como a proporção acumulada da renda $Y(m)$ varia em função da proporção acumulada da população $X(m)$, estando os indivíduos ordenados pelos valores crescentes da renda.

O índice de Gini é calculado analiticamente através das quantidades paramétricas:

$$X(m) = \frac{\int_0^m P(r)dr}{\int_0^\infty P(r)dr}, \quad Y(m) = \frac{\int_0^m rP(r)dr}{\int_0^\infty rP(r)dr}, \quad (1.2)$$

onde $X(m)$ representa a fração de agentes com recurso inferior a m e $Y(m)$ a fração de recursos associada a população de $X(m)$. Na figura 1.1, a curva vermelha corresponde a curva de Lorenz associada a distribuição de renda exponencial, já a curva preta corresponde a distribuição de renda perfeitamente igualitária. A região entre as curvas é a área de concentração de renda e a região abaixo da curva de cor preta é denominada de área de máxima concentração. O índice de Gini é definido como a razão entre a área de concentração de renda e a área de máxima concentração de renda, podendo ser escrito da seguinte forma,

$$G \equiv 2 \int_0^1 (X - Y)dX. \quad (1.3)$$

Apesar de analiticamente o índice de Gini esteja compreendido no intervalo $0 \leq G \leq 1$, dados do Banco Mundial apontam que os valores reais associados a este parâmetro estão concentrados numa certa região do espaço de parâmetros associados às variáveis: índice de Gini médio $[G]$ e taxa de gasto média dos países $[\omega]$ como pode ser observado no gráfico da figura 1.2. Os dados apresentados neste gráfico consistem na média temporal destes

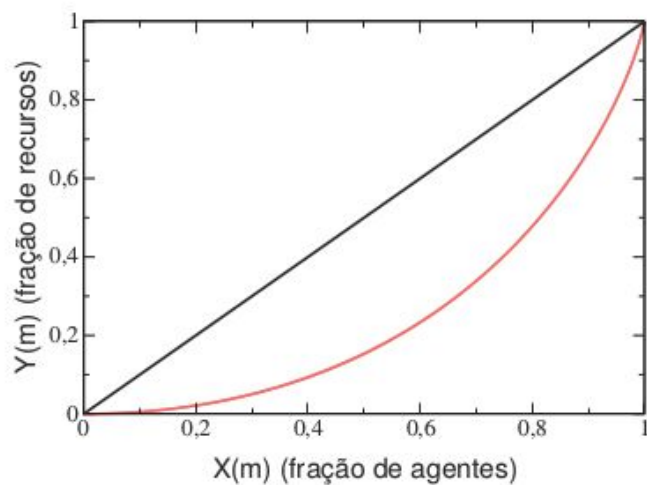


Figura 1.1: Curva de Lorenz para uma certa distribuição de renda (curva vermelha), onde a linha preta representa a perfeita igualdade de renda. Retirado de [10].

parâmetros no período de 2000 à 2017, estes dados também podem ser observados na forma de tabela no apêndice A.1 deste trabalho.

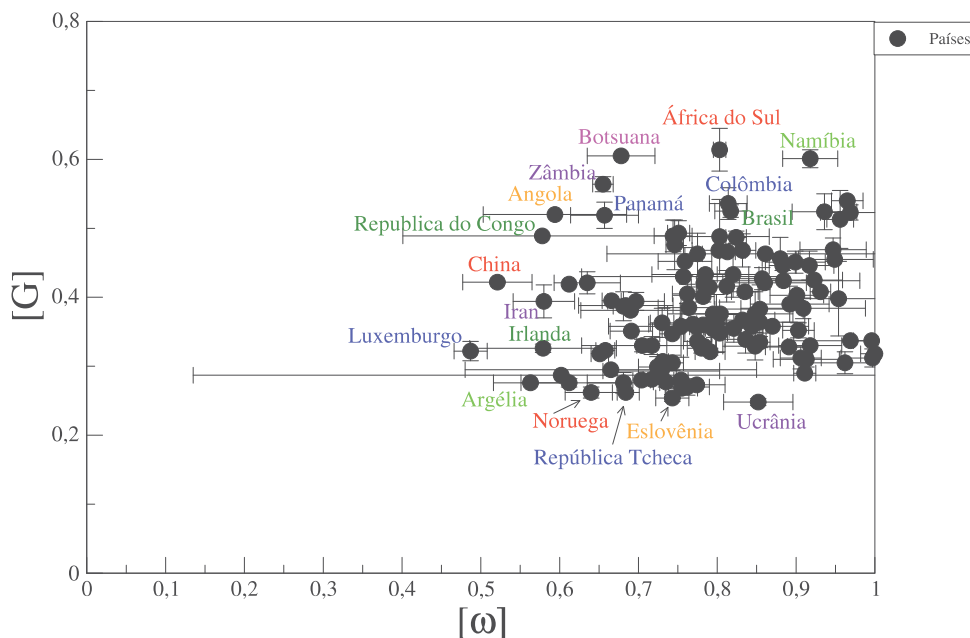


Figura 1.2: Gráfico das médias dos índice de Gini em função das médias da taxa de gasto de 123 países do mundo no período de 2000 à 2017. Dados Retirado do Banco mundial [13,14].

1.4 Organização da dissertação

A dissertação está organizada da seguinte maneira: no capítulo 2, apresentamos uma breve revisão dos principais modelos baseados em agentes encontrados na literatura utilizados para investigar processos de distribuições de renda. Ainda neste capítulo, serão apresentados alguns resultados que já foram obtidos a partir do modelo heterogêneo adaptativo, que serão relevantes para um melhor entendimento do modelo proposto neste trabalho.

No capítulo 3 propomos uma mudança ao modelo heterogêneo adaptativo incorporando o papel da assimetria de informação, parcial ou total, dos agentes sobre a distribuição de recursos e do processo de relaxação do sistema. Analisamos o papel da informação sobre a taxa de gasto média dos agentes e sobre a desigualdade da distribuição, quantificada por meio do índice de Gini. Apresentamos os resultados, nossas análises e estabelecemos uma comparação entre os dados obtidos na simulação e os dados reais de países retirados do banco mundial.

No capítulo 4 apresentamos e calculamos o coeficiente de bimodalidade para diversas distribuições geradas pelo modelo proposto, analisamos as formas das distribuições e estudamos a influência do tipo de adaptação e da informação sobre a polarização da renda para o modelo heterogêneo adaptativo com informação.

Para finalizar, no capítulo 5 apresentamos as conclusões do nosso trabalho e as perspectivas para futuros trabalhos.

Capítulo 2

Modelos

Os pesquisadores da área de econofísica têm dado uma atenção especial ao estudo da distribuição de renda. Procurando entender quais fatores levam a uma determinada forma de distribuição e suas características. Físicos, economistas e cientistas das mais diversas áreas vêm desenvolvendo modelos computacionais para estudar os fatores que possam influenciar ou determinar a forma da distribuição de renda de um dado país, cidade ou determinado grupo econômico. A partir da década de 1980 [43], a dinâmica computacional foi introduzida em diversas pesquisas com a finalidade de simular, em um sistema fechado, a troca de riquezas entre agentes econômicos através de modelos baseados em sistemas físicos (por exemplo moléculas de gases) com a finalidade de obter informações sobre a distribuição de renda. Fundamentalmente, o processo consiste em criar uma espécie de construção fictícia de interação econômica entre agentes estritamente racionais e que reproduzam situações próximas da realidade. Estes modelos de interações econômicas necessitam de um número elevado de agentes (em geral um número fixo), uma certa quantidade de riqueza (ou renda) é distribuída inicialmente e uma determinada regra de interação é estabelecida entre os agentes, muitas vezes processos estocásticos multiplicativos são incluídos como fator determinante da taxa de gasto dos agentes e que determinará a dinâmica da riqueza individual ao longo da simulação. As regras de interações têm geralmente parâmetros que variam com os modelos, mas existem basicamente duas classes de modelos computacionais para distribuição de renda:

- Os modelo homogêneos – onde todos os indivíduos possuem a mesma taxa de gasto.

- Os modelos heterogêneos – cada indivíduo possui uma taxa de gasto específica.

Nestas classes de modelos, o sistema é composto por uma quantidade fixa de agentes $N\{i = 1, 2, \dots, N\}$ cada um possui uma quantidade de recursos m_i . A quantidade total de recursos M permanece constante durante a dinâmica

$$M = \sum_{i=1}^N m_i. \quad (2.1)$$

Após a realização de uma interação (transação econômica) entre os agentes i e j , os mesmos terão uma nova quantidade de recursos $m_i(t+1)$ e $m_j(t+1)$ respectivamente, a dinâmica realizada pode ser escrita como:

$$\begin{cases} m_i(t+1) = m_i(t) + \Delta m, \\ m_j(t+1) = m_j(t) - \Delta m, \\ \Delta m = \omega_j(t)m_j - \omega_i(t)m_i, \end{cases} \quad (2.2)$$

onde a quantidade Δm representa o fluxo de recursos efetivo em cada transação realizada entre os agentes e ω representa a taxa de gasto que cada agente está disposto a gastar em cada transação.

Os sistemas modelados são fechados, ou seja, na escala de tempo escolhida para a realização da dinâmica, o número de agentes (N) e a quantidade de recursos total do sistema (M) são mantidos constantes. A questão do sistema ser conservativo é justificada pelo fato de que em escalas de tempo pequenas não parece ser muito importante a variação ocorrida no total de riqueza e no número de agentes que compõem o sistema. Tanto nos modelos homogêneos quanto nos modelos heterogêneos, as taxas de gastos são definidas de forma exógena aos sistemas.

De acordo com a literatura [44], os modelos podem ser definidos como simétricos ou assimétricos. Um modelo é classificado como simétrico, quando para um valor fixo de ϵ (probabilidade com que um agente i ou j perde uma quantidade de recursos) a quantidade

de recursos trocados Δm satisfaz a seguinte relação:

$$\Delta m(m_i, m_j, \epsilon) = -\Delta m(m_j, m_i, \epsilon). \quad (2.3)$$

Da mesma maneira, um modelo é classificado como assimétrico, quando para um valor fixo de ϵ a quantidade de recursos trocados Δm satisfaz a seguinte relação:

$$\Delta m(m_i, m_j, \epsilon) \neq -\Delta m(m_j, m_i, \epsilon). \quad (2.4)$$

No caso em que na interação entre os agentes i e j , o montante total da troca de recursos Δm for inteiramente cedida por um agente e recebida por outro, o modelo é dito unidirecional.

Para a validação dos modelos como instrumentos de predição e projeção de tendências, é necessária a realização do confronto dos resultados gerados pelos modelos com os resultados observados empiricamente em situações reais similares. As distorções entre os resultados empíricos e os obtidos pelos modelos, nos permitem impor ajustes e desenvolvimentos ao modelo original em direção a sistemas teóricos mais realistas e de melhor capacidade preditiva. A seguir serão discutidos alguns dos principais modelos baseados em agentes utilizados para o estudo das distribuições de renda.

2.1 Modelos homogêneos

2.1.1 O modelo de Angle

O modelo proposto por J. Angle em 1983 [43, 42] busca descrever como uma distribuição de recursos desigual emerge a partir das trocas individuais de recursos entre agentes econômicos que possuem inicialmente uma mesma quantidade de recursos. Matematicamente, este modelo é classificado como assimétrico e unidirecional [44].

No modelo de Angle, a variação da quantidade de recursos Δm segue a seguinte lei:

$$\Delta m = \eta(m_j - m_i)\epsilon\omega m_i - [1 - \eta(m_j - m_i)]\epsilon\omega m_j, \quad (2.5)$$

onde η e ε são variáveis aleatórias, a variável ε está compreendida no intervalo $[0, 1]$, podendo ter uma distribuição uniforme ou uma distribuição de probabilidade específica $g(\varepsilon)$. Enquanto η é uma variável dicotômica que define a unidirecionalidade do fluxo de recursos, podendo assumir dois valores: $\eta(m > 0) = 1$ com probabilidade p_0 ou $\eta(m < 0) = 0$ com probabilidade $(1 - p_0)$. Quando $\eta(m > 0) = 1$, é produzido um fluxo de recursos do agente i para o agente j , caso $\eta(m < 0) = 0$ o fluxo de recursos será do agente j para o agente i . Se o agente que perde recursos é o i -ésimo, o módulo da variação de recursos Δm é dado por:

$$|\Delta m| = \varepsilon \omega m_i. \quad (2.6)$$

O modelo de Angle apresenta um caso especial quando todos os indivíduos tem a mesma chance de ganhar ou perder recursos, ou seja, $p_0 = 0,5$. Neste caso, o resultado da dinâmica proposta neste modelo para a distribuição de renda, no equilíbrio, resulta em uma distribuição Gama dada por

$$P(m) = \frac{\tau}{\Gamma(n)} (\tau m)^{n-1} \exp(-\tau m), \quad (2.7)$$

onde o parâmetro τ faz o papel do inverso da renda média ($1/\bar{m}$) [45], n é um número real localizado no intervalo $[1/2, \infty[$ [44], de forma que

$$n \equiv \frac{D}{2} = \frac{1 + 2\lambda}{2(1 - \lambda)} = \frac{3 - 2\omega}{2\omega}, \quad (2.8)$$

onde n e D são parâmetros referente a dimensão do sistema [45] e λ representa a mínima fração de recurso preservada durante uma transação podendo ser chamada de taxa de poupança ($\lambda = 1 - \omega$) com valores no intervalo $0 \leq \lambda < 1$. Perceba que quando $n < 1$, ou seja, $\omega > 3/4$ ou $\lambda < 1/4$, a função distribuição gama diverge quando m tende a zero.

Um modelo mecânico análogo ao de Angle é o modelo de interação de gotas de água. Como consequência das colisões entre as gotas, originalmente uma gota que possui massa m_i pode se fragmentar resultando em uma massa final $m_i(t + 1) = m_i(t) - \Delta m$, produzindo um fragmento de massa Δm , que pode então ser absorvido por outra gota de massa m_j

resultando em uma massa final $m_j(t+1) = m_j(t) + \Delta m$. A representação esquemática dessa interação é representada na figura 2.1.

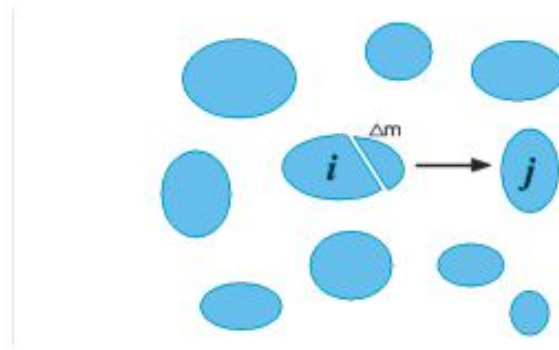


Figura 2.1: Representação esquemática da interação entre gotas de água, onde i e j representam gotas com massa m , quando as duas colidem, i perde uma quantidade Δm de massa que é absorvida por j . Retirada de [10].

2.1.2 Modelo de Bennati

O modelo introduzido por Bennati [44, 42] é classificado matematicamente como um modelo simétrico e unidirecional, sendo também a versão mais simples dos modelos baseados em agentes. Nele, os agentes interagem e realizam trocas de quantidades constantes de recursos, ou seja, a quantidade Δm não depende de uma taxa de gasto. Se após as transações as quantidades de recursos forem positivas ($m_i(t+1) \geq 0$ e $m_j(t+1) \geq 0$), o sistema é descrito pela equação (2.2) onde

$$\Delta m(t+1) = \Delta m(t), \quad (2.9)$$

caso contrário, se $m_i(t+1) < 0$ ou $m_j(t+1) < 0$, a transação não é concretizada.

Analiticamente a distribuição no equilíbrio desse modelo pode ser descrita por uma distribuição exponencial ou distribuição de Gibbs [45, 46],

$$P(m) = \frac{1}{\bar{m}} \exp\left(-\frac{m}{\bar{m}}\right). \quad (2.10)$$

Este modelo é equivalente estatisticamente ao modelo de Angle para $n = D/2 = 1$, a diferença entre os modelos é que o modelo de Bennati é aditivo, ou seja, Δm é independente de m , e o modelo de Angle é multiplicativo $\Delta m \propto m$. Esse modelo é análogo a um conjunto de partículas que interagem trocando energia por emissão e absorção de quanta de luz para uma frequência constante dada por $\nu_0 = \Delta m_0/\hbar$. Na figura 2.2 é ilustrada a representação esquemática da interação entre as partículas.

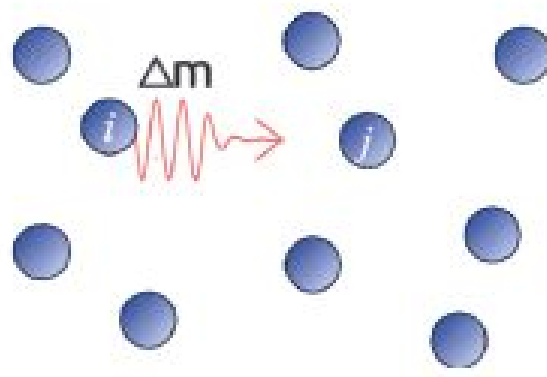


Figura 2.2: Representação esquemática da interação entre partículas, onde i e j representam partículas que emitem e absorvem luz com uma determinada frequência constante. Retirado de [10].

2.1.3 Modelo de Chakraborti e Chakrabarti

O modelo proposto por Chakraborti e Chakrabarti [42, 47] apresenta uma dinâmica semelhante aos modelos já apresentados anteriormente, tendo como regra geral as seguintes expressões:

$$\begin{cases} m_i(t+1) = \lambda m_i(t) + \epsilon(1-\lambda)(m_i + m_j) \\ m_j(t+1) = \lambda m_j(t) + \tilde{\epsilon}(1-\lambda)(m_i + m_j), \end{cases} \quad (2.11)$$

onde ϵ e $\tilde{\epsilon}$ ($\tilde{\epsilon} = 1 - \epsilon$) são variáveis estocásticas que estão distribuídas no intervalo $]0, 1[$. Esta regra corresponde ao processo definido pela equação (2.2) com

$$\begin{cases} \Delta m &= \omega(\tilde{\epsilon}m_i - \epsilon m_j) - (1 - \lambda)(\tilde{\epsilon}m_i - \epsilon m_j) \\ \tilde{\epsilon} + \epsilon &= 1 \end{cases} \quad (2.12)$$

no equilíbrio, assim como o modelo de Angle, o sistema é descrito por uma distribuição Gama como na equação (2.7), porém o parâmetro n é dado por [46, 45]:

$$n(\lambda) \equiv n_c(\omega) \equiv \frac{D(\lambda)}{2} = \frac{1 + 2\lambda}{1 - \lambda} = \frac{3 - 2\omega}{\omega}. \quad (2.13)$$

Ele é justamente igual ao dobro do mesmo parâmetro calculado no modelo Angle para $p_0 = 0,5$, ou $n_c(\omega) = 2n_A(\omega)$, baseado na equação (2.12), nota-se que a densidade de probabilidade é sempre finita para $m \rightarrow 0$, mesmo para valores mais altos da taxa de gasto ($\omega = 1$), a distribuição não diverge e é igual a função exponencial $P(m) = \tau \exp(-\tau m)$. Neste modelo, existe um fluxo de recursos do agente i para o agente j , assim como, do agente j para o agente i caracterizando a não unidirecionalidade do modelo.

2.1.4 Modelo Dragulescu e Yakovenko

A versão básica do modelo proposto por Dragulescu e Yakovenko [48], similarmente ao modelo de Chakraborti e Chakrabarti discutido anteriormente, descreve atividades econômicas em termos de trocas simétricas entre agentes, em vez de transferências unidirecionais de riquezas como nos modelos de Angle e Bennati. O modelo de Dragulescu e Yakovenko pode ser visto como um rearranjo aleatório da riqueza inicial total ($m_i + m_j$) das duas unidades, definido como

$$\begin{cases} m_i(t+1) &= \epsilon(m_i(t) + m_j(t)) \\ m_j(t+1) &= \tilde{\epsilon}(m_i(t) + m_j(t)) \\ \tilde{\epsilon} + \epsilon &= 1, \end{cases} \quad (2.14)$$

onde o fluxo de recursos Δm é dado por

$$\Delta m = \tilde{\epsilon}m_i - \epsilon m_j, \quad (2.15)$$

de forma que ϵ e $\tilde{\epsilon}$ são variáveis estocásticas que estão distribuídas no intervalo $]0, 1[$. Este modelo pode ser considerado um caso particular do modelo Chakraborti e Chakrabarti descrito anteriormente para o caso onde $\lambda = 0$ ($\omega = 1$). De forma análoga aos modelos descritos anteriormente, para $n = 1$, a distribuição no equilíbrio é descrita por uma distribuição densidade puramente exponencial como na equação (2.10). A analogia mecânica pra esse modelo é descrita por um gás onde as partículas colidem entre si trocando energia a cada colisão. A figura 2.3 representa a troca de energia Δm após a interação das partículas i e j .

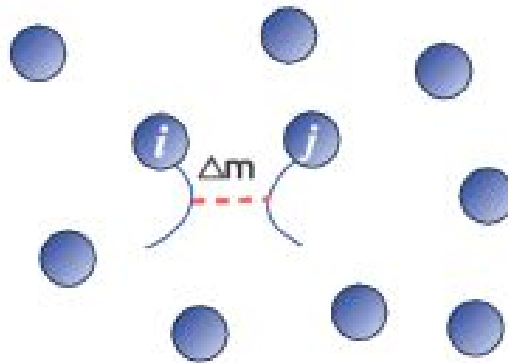


Figura 2.3: Representação esquemática da interação entre partículas, onde i e j representam partículas, após uma colisão elástica, duas partículas trocam uma quantidade Δm de energia. Retirado de [10].

2.2 Modelos heterogêneos

Os modelos heterogêneos são caracterizados por atribuir valores diferentes de taxa de gasto ($\omega_i = 1 - \lambda_i$) distribuídos uniformemente no intervalo $0 < \omega_i < 1$ para cada agente. As formulações para os modelos heterogêneos podem ser obtidas diretamente das equações

dos modelos homogêneos apresentados nas seções anteriores. Para tal, os termos ωm_i e λm_i devem ser substituídos por $\omega_i m_i$ e $\lambda_i m_i$, onde os parâmetros ω_i e λ_i são constantes no tempo e característicos de cada agente. A reformulação dos modelos homogêneos de Angle e Chakraborti e Chakrabarti para modelos heterogêneos têm como resultados da sua dinâmica uma distribuição exponencial para valores intermediários de renda e uma distribuição tipo lei de potência para altos valores de renda de acordo com a equação

$$P(m) \propto \frac{1}{m^{1+\nu}}, \quad (2.16)$$

onde ν corresponde ao expoente de Pareto.

É possível a reformulação dos modelos multiplicativos vistos na seção anterior, não incluindo portanto o modelo de Bennati por se tratar de um modelo aditivo, podendo ser reescritos de acordo com a equação [44]

$$\begin{cases} m_i(t+1) = m_i(t) + \Delta m, \\ m_j(t+1) = m_j(t) - \Delta m, \\ \Delta m = \tilde{\omega}_i(t)m_i - \tilde{\omega}_j(t)m_j, \end{cases} \quad (2.17)$$

onde $\tilde{\omega}_i$ e $\tilde{\omega}_j$ são variáveis estocásticas que indicam a porcentagem real de riqueza ou recursos cedidas pelos agentes i e j respectivamente. As variáveis $\tilde{\omega}_i$ e $\tilde{\omega}_j$ são definidas para os vários casos como segue:

- No modelo de Angle, $\tilde{\omega}_i$ e $\tilde{\omega}_j$ são funções não lineares e independente dos recursos dos agentes (m_i e m_j) e são definidas segundo as equações:

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_i = \eta(m_j - m_i)\epsilon\omega_i \\ \tilde{\omega}_j = \eta(m_i - m_j)\epsilon\omega_j, \end{cases} \quad (2.18)$$

onde ϵ é um número aleatório com densidade $g(\epsilon)$, $\eta(m) = 1$ com probabilidade p_0 para $m > 0$ e $\eta(m) = 0$ com probabilidade $1 - p_0$ para $m < 0$.

- No modelo de Chakraborti e Chakrabarti $\tilde{\omega}_i$ e $\tilde{\omega}_j$ são escritos como:

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_i &= \epsilon(1 - \lambda_i) \equiv \epsilon\omega_i \\ \tilde{\omega}_j &= (1 - \epsilon)(1 - \lambda_j) \equiv (1 - \epsilon)\omega_j, \end{cases} \quad (2.19)$$

onde ϵ é um número aleatório com distribuição uniforme no intervalo $0 < \epsilon < 1$. A variável estocástica $\tilde{\omega}_i$ é um número aleatório uniformemente distribuído no intervalo $]0, \omega_i]$.

- O modelo de Dragulescu e Yakovenko é obtido quando $\omega_i \rightarrow 1$ no caso anterior.

Na tabela 2.1 é apresentado um resumo comparativo dos modelos vistos até o momento neste capítulo.

Modelo	$n(\lambda)$	$\bar{\omega}_i$	$\bar{\omega}_j$
Angle	$(3 - 2\omega)/(2\omega)$	$\eta(m_j - m_i)\epsilon$	$(1 - \eta)(m_j - m_i)\epsilon$
Bennati	1	ϵ	$(1 - \epsilon)$
Chakraborti e Chakrabarti	$(3 - 2\omega)/(\omega)$	$\epsilon(1 - \lambda_i)$	$(1 - \epsilon)(1 - \lambda_j)$
Dragulescu e Yakovenko	1	ϵ	$(1 - \epsilon)$

Tabela 2.1: Tabela comparativa dos parâmetros $n(\lambda)$, $\bar{\omega}_i$ e $\bar{\omega}_j$ entre os modelos de Angle, Bennati, Chakraborti & Chakrabarti e Dragulescu & Yakovenko para distribuição de renda.

2.2.1 Modelo heterogêneo e adaptativo

Os modelos tratados até o momento têm como característica geral possuem parâmetros regulados de forma exógena ao sistema, em particular a taxa de gasto de cada agente. No modelo heterogêneo adaptativo (MHA) [10], a troca de riqueza ou recursos entre os agentes está submetida a um processo adaptativo, onde a taxa de gasto de cada agente pode ser regulada individualmente em função de seu nível de recursos. No MHA, o sistema é fechado

e composto por N agentes $i = 1, 2, \dots, N$, onde cada agente possui uma quantidade de recursos $m_i > 0$ e a soma total de recursos M é dada por

$$M = \sum_i^N m_i. \quad (2.20)$$

Em cada passo de tempo (passo de Monte Carlo) o agente i possui uma taxa de gasto ω_i com valores compreendidos no intervalo $]0, 1]$, esse parâmetro representa a fração de recursos que um agente i irá transferir a cada transação para um agente j escolhido aleatoriamente entre os $N - 1$ agentes do sistema. Ao término de uma interação (ou negociação), a quantidade final de recursos obtidos por cada agente segue as equações

$$\begin{cases} m_i(t+1) = m_i(t) + \Delta m_{ij} \\ m_j(t+1) = m_j(t) - \Delta m_{ij} \\ \Delta m_{ij} = \omega_j m_j - \omega_i m_i. \end{cases} \quad (2.21)$$

Após cada transação é computada a variação percentual de recursos α_i dos agentes.

$$\alpha_i \equiv \frac{m_i(t+1)}{m_i(t)}. \quad (2.22)$$

O MHA é dividido em duas classes, modelo heterogêneo adaptativo tipo 1 (MHA1) e modelo heterogêneo adaptativo tipo 2 (MHA2), descritos nas próximas seções.

2.2.2 Modelo heterogêneo adaptativo tipo 1 (MHA1)

No MHA1, após uma transação, o agente terá uma redução da taxa de gasto ($\omega_i(t+1) < \omega_i(t)$) se $\alpha_i < 1$, ou seja, se $m_i(t+1) < m_i(t)$, na próxima transação. Caso contrário, ou seja, se $m_i(t+1) > m_i(t)$ ($\alpha_i \geq 1$), irá ocorrer um aumento na taxa de gasto ($\omega_i(t+1) > \omega_i(t)$) na próxima transação. Portanto, neste modelo, os parâmetros de renda m_i e de taxa de gasto ω_i são **positivamente** correlacionados. Esse comportamento é representado matematicamente

pelas equações

$$\omega_i(t+1) = \begin{cases} \alpha\omega_i(t), & \text{se } \alpha < 1 \\ \frac{1}{\alpha}\omega_i(t) + (1 - \frac{1}{\alpha}), & \text{se } \alpha \geq 1 \end{cases} \quad (2.23)$$

Neste caso, são observados três casos limite:

1. Se após uma transação um agente tiver $m_i(t+1) \gg m_i(t)$, sua atitude será aumentar sua taxa de gasto $\omega_i(t+1)$ para 1.
2. Caso após uma negociação um agente tenha $m_i(t+1) = m_i(t)$, a taxa de gasto permanecerá constante $\omega_i(t+1) = \omega_i(t)$.
3. Se após uma transação um agente possuir $m_i(t+1) \ll m_i(t)$, sua taxa de gasto será aproximadamente nula $\omega_i(t+1) \approx 0$.

2.2.3 Modelo heterogêneo e adaptativo tipo 2 (MHA2)

Neste caso, após uma transação, o agente terá um aumento da taxa de gasto ($\omega_i(t+1) > \omega_i(t)$) se $\alpha_i < 1$, ou seja, se $m_i(t+1) < m_i(t)$, na próxima transação. Caso contrário, ou seja, se $m_i(t+1) > m_i(t)$ ($\alpha_i \geq 1$), também irá ocorrer um aumento na taxa de gasto ($\omega_i(t+1) > \omega_i(t)$) na próxima transação. Portanto, neste modelo, os parâmetros de renda m_i e de taxa de gasto ω_i são **negativamente** correlacionados. Esse comportamento é representado matematicamente pelas equações

$$\omega_i(t+1) = \begin{cases} \alpha\omega_i(t) + (1 - \alpha), & \text{se } \alpha < 1 \\ \frac{1}{\alpha}\omega_i(t) + (1 - \frac{1}{\alpha}), & \text{se } \alpha \geq 1 \end{cases} \quad (2.24)$$

Similarmente ao MHA1, no modelo heterogêneo e adaptativo tipo 2 podem ser observadas três situações limites:

1. Se após uma transação um agente tiver $m_i(t+1) \gg m_i(t)$, sua atitude será aumentar sua taxa de gasto $\omega_i(t+1)$ para 1.

2. Caso após uma negociação um agente tenha $m_i(t+1) = m_i(t)$, a taxa de gasto permanecerá constante $\omega_i(t+1) = \omega_i(t)$.
3. Se após uma transação um agente possuir $m_i(t+1) \ll m_i(t)$, sua taxa de gasto será maximizada $\omega_i(t+1) = 1$.

As duas primeiras situações são idênticas ao modelo MHA1, porém na terceira situação o comportamento no MHA2 tende a maximizar a sua taxa de gasto, enquanto no MHA1, a taxa de gasto tende a ser nula. Estes modelos podem produzir distribuições de renda com características monomodais, bimodais e com dois regimes, as quais dependem da fração de agentes do tipo MHA1 e MHA2, definidos na simulação, para constituir o sistema.

A utilização do Modelo heterogêneo adaptativo em simulações tem gerado resultados importantes na descrição de alguns aspectos relacionados a distribuição de renda, faremos agora uma breve descrição de alguns desses resultados obtidos em trabalhos anteriores que tiveram como base o modelo heterogêneo adaptativo.

Em 2013, no trabalho de Junior [10], foi proposto um modelo cuja dinâmica para taxa de troca tinha associado um parâmetro γ denominado inércia, relacionado a capacidade de um indivíduo adaptar-se ou não. Foi investigado o papel da adaptação com a variação da fração f do sistema que pode adaptar-se. Para os agentes do tipo MHA1 foi observado que quando a fração de agentes que podem adaptar-se cresce, o índice de Gini $[G]$ e a taxa de gasto média $[\omega]$ diminuem monotonicamente com f conforme pode ser visto na figura 2.4.

Para os agentes do tipo MHA2 a taxa de gasto média cresce com o aumento da fração de f e existe um decréscimo do índice de Gini, este comportamento pode ser observado no gráfico da figura 2.5.

Outro resultado importante de [10], é que todos os pontos correspondentes às médias para o coeficiente de Gini e taxa de gasto de 1 países selecionados no período de 1990 à 2009 encontram-se dentro da região delimitada pelos modelos propostos, como pode ser constatado na figura 2.6.

Ainda em [10], foi apresentado um gráfico do comportamento da distribuição de renda $P(m)$ em função da renda m para MHA1, neste, percebeu-se um comportamento bimodal resultante da dinâmica dos agentes para frações de f da população com inércia $\gamma = 1$ no

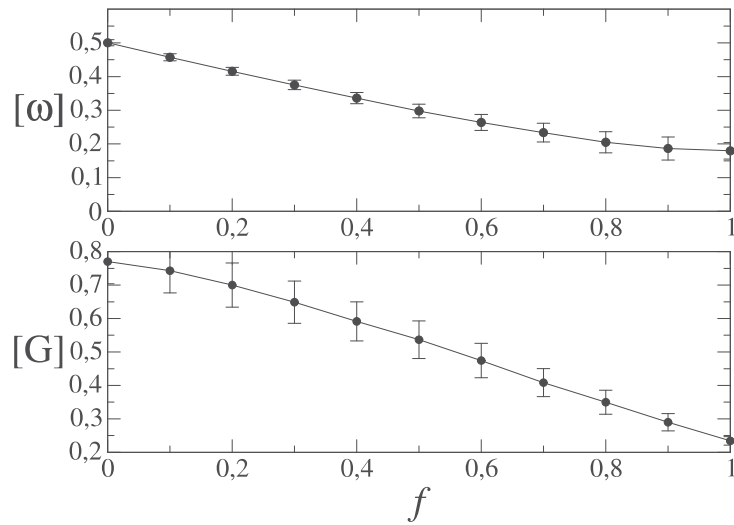


Figura 2.4: Comportamento da taxa de gasto ω e o do índice de Gini G como função do aumento da fração da população com inércia nula $\gamma = 1$ para o modelo MHA1. Retirada e modificada de [10].

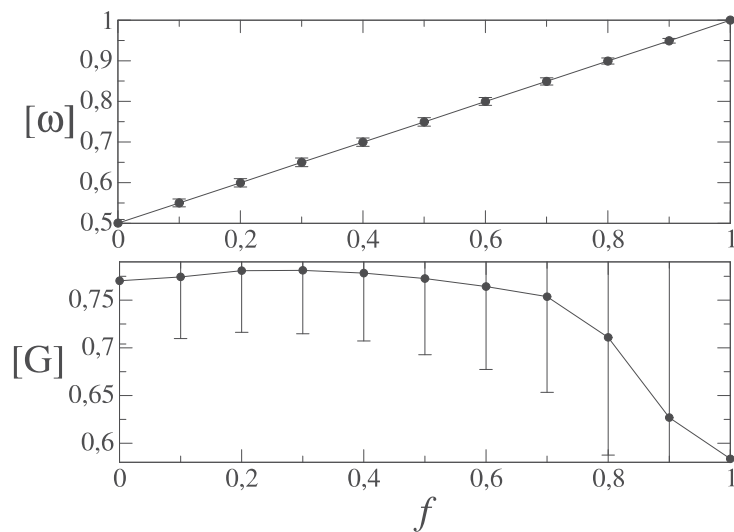


Figura 2.5: Comportamento da taxa de gasto ω e o do índice de Gini G como função do aumento da fração da população com inércia nula $\gamma = 1$ para o modelo MHA2. Retirada e modificada de [10].

intervalo $0 \leq f \leq 1$. Observou-se que a proporção de agentes concentrado nas regiões de renda baixa e intermediária variava com o aumento de f conforme pode ser visualizado na figura 2.7.

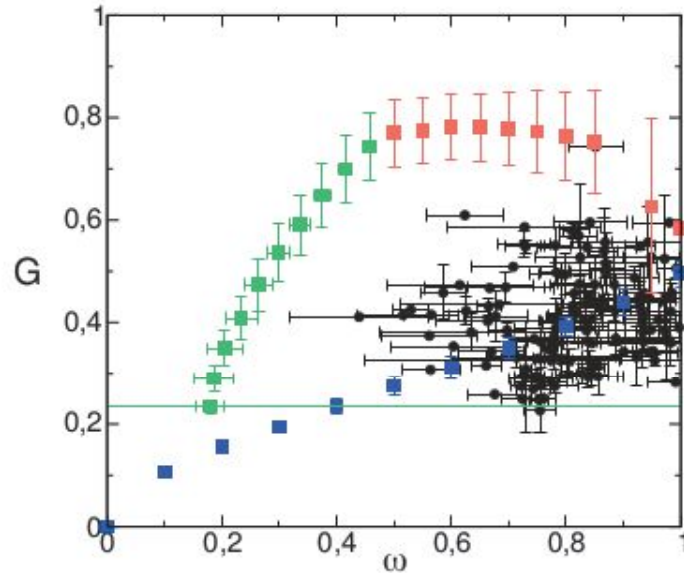


Figura 2.6: Resultados para o coeficiente de Gini e taxa de gasto do MHA1 (quadrados verdes), MHA2 (quadrados vermelhos) e modelo homogêneo (quadrados azuis) em comparação com as médias para o coeficiente de Gini e taxa de gasto de 123 países, no período de 1990 à 2009 (círculo pretos). Retirada de [10].

Em 2016, Santos [49], propôs um modelo de três estados, onde estavam presentes uma fração f_0 de agentes com inércia infinita, outra fração f_1 de agentes do tipo MHA1 (positivamente correlacionado) e por fim uma fração f_2 de agentes do tipo MHA2 (negativamente correlacionado). Na figura 2.8 são apresentados os resultados comparativos entre os modelos do tipo MHA1 (curva verde), tipo MHA2 (curva vermelha), MHA constituído apenas por agentes com inércia nula (curva laranja) e o modelo de três estados (quadrados azuis). Foi observado que os pontos do modelo de três estados ocupa a região entre as curvas verde (MHA1), vermelha (MHA2) e laranja (inércia nula). Concluiu-se que o resultado mais próximo dos dados reais é o caso onde o modelo heterogêneo adaptativo era constituído apenas por agentes com inércia nula.

Santos [49] também apresentou uma dinâmica onde são realizadas redistribuições de renda no sistema com uma probabilidade f_r de ocorrer uma taxação dos recursos. Ao haver essa taxação, uma fração $g \sim U[0, 1]$ da renda de cada agente é retirada e depois redistribuída uniformemente. Neste modelo, foram utilizados apenas agentes capazes de

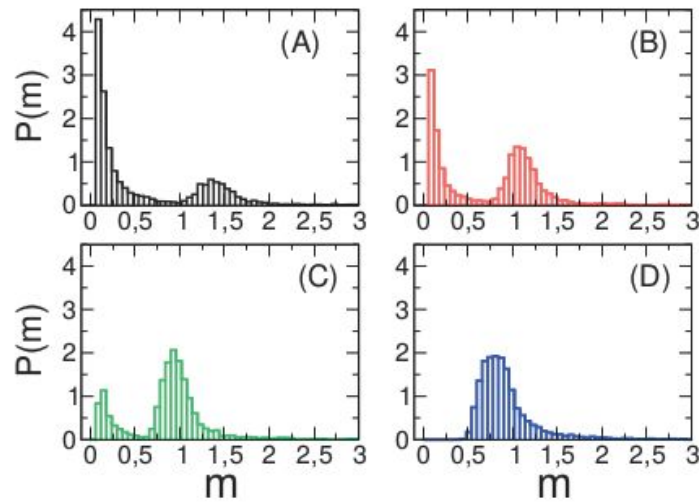


Figura 2.7: Comportamento da distribuição de renda $P(m)$ em função da renda m para MHA1. As diversas cores expressam diferentes frações f da população com inércia $\gamma = 1$, gráfico (A) $f = 0,25$ (preto), gráfico (B) $f = 0,50$ (vermelho), gráfico (C) $f = 0,75$ (verde) e gráfico (D) $f = 1,0$ (azul) . Retirada de [10].

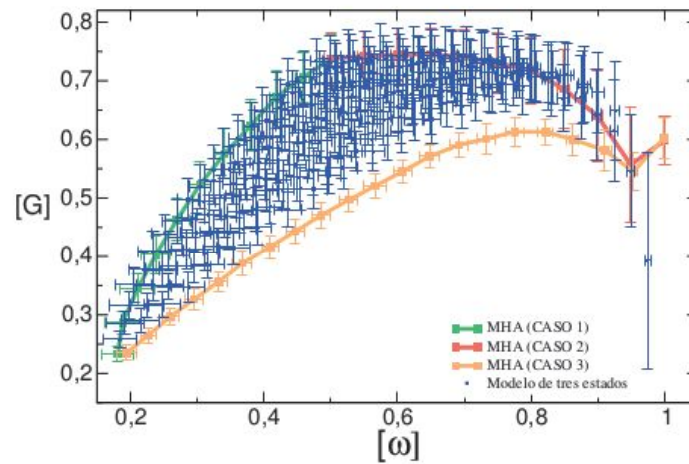


Figura 2.8: Resultados para o coeficiente de Gini e taxa de gasto média para MHA1, MHA2, MHA formado apenas por agentes com inércia nula e o modelo de três estados. Retirada de [49].

adaptar-se instantaneamente e investigadas as propriedades como função da probabilidade f_r ($0 \leq f_r \leq 1$), obtendo a curva para os valores médios dos índices de Gini e da taxa de gasto. Nos resultado obtido, observou-se que em todos os casos, independente da probabilidade de

haver uma taxação, a redistribuição provoca uma diminuição do índice de Gini.

Em comparação com os dados reais, observou-se que quase que a totalidade dos dados reais coletados de 132 países, no período de 1998 à 2012, encontram-se entre as curva de $f_r = 0$ e $f_r = 1$, conforme exibido na figura 2.9

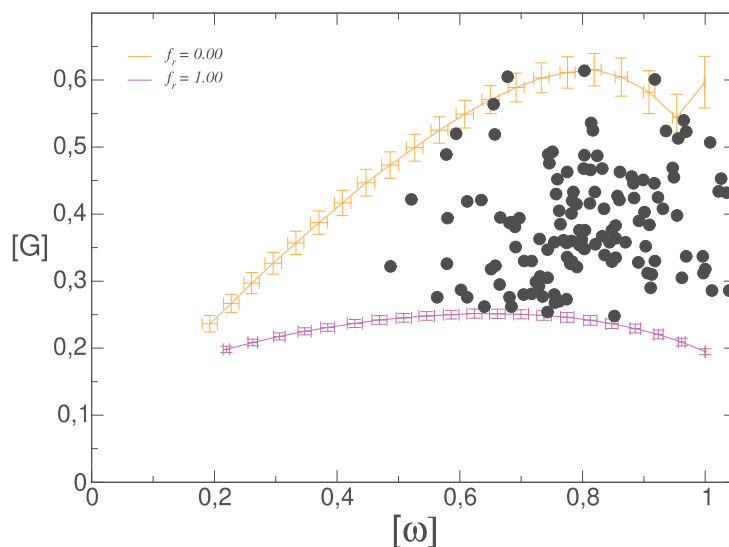


Figura 2.9: Resultados para os valores médios do coeficiente de Gini e taxa de gasto para $f_r = 0$ (curva laranja) e $f_r = 1$ (curva rosa) comparados com dados reais (círculos pretos) para 132 países, no período de 1998 à 2012. Retirada e modificada de [49].

Capítulo 3

Modelo heterogêneo adaptativo com informação

No capítulo 2 foram apresentados alguns dos principais modelos baseados em agentes utilizados nos estudos para uma melhor compreensão das propriedades que caracterizam as distribuições de rendas em sistemas econômicos fechados. Neste capítulo será apresentado um novo modelo baseado em agentes, denominado modelo heterogêneo adaptativo com informação. Esta nova proposta é um aperfeiçoamento do modelo heterogêneo adaptativo apresentado no capítulo anterior, neste, os agentes além de apresentar as características já relatadas anteriormente (heterogeneidade e adaptação), terão ainda a informação ou conhecimento sobre o valor do gasto médio dos agentes que compõe o sistema, ou seja, quanto foi o valor médio que os agentes desembolsaram nas interações de trocas dos recursos, assim, os agentes que possuírem esta informação, farão uso da mesma como critério para tomar a decisão de realização ou não de uma transação. Com o incremento da informação introduzido entre os agentes, pretende-se analisar quais efeitos podem ser observados em relação aos aspectos relacionados à distribuição de renda e a partir dos dados obtidos será feita uma comparação entre estes resultados e os dados de vários países coletados do banco mundial.

Em trabalhos anteriores [10, 49], os agentes do modelo heterogêneo e adaptativo não possuíam nenhuma informação global do sistema, as decisões eram baseadas nas interações realizadas anteriormente por cada agente, assim, um indivíduo só conhecia a sua própria taxa

de gasto praticada no passado e modificava a mesma de acordo com o seu tipo de adaptação (MHA1 ou MHA2).

No modelo proposto neste trabalho, além dos agentes i e j realizarem as transações de acordo com o tipo de adaptação (MHA1 ou MHA2) a qual cada um pertence, foi incorporada uma outra característica à dinâmica, a informação. Agora, uma determinada porcentagem dos agentes possuem o conhecimento ou a informação da média de gasto do sistema praticada no passo anterior. Matematicamente, o gasto médio do sistema pode ser definido como

$$\Omega = \frac{\sum_{i=1}^N \omega_i m_i}{N}. \quad (3.1)$$

Portanto, no modelo proposto haverá 4 tipos de agentes:

- Os agentes do tipo MHA1 e que possuem informação;
- Os agentes do tipo MHA1 sem informação;
- Os agentes do tipo MHA2 e que possuem informação;
- Os agentes do tipo MHA2 sem informação;

de maneira que a soma do número de indivíduos classificados entre esses 4 tipos resulta na quantidade total de agentes que formam o sistema.

A dinâmica das interação entre os agentes i e j , neste modelo, só ocorrerá se alguma das seguintes condições forem atendidas:

1. Se i e j são do tipo que possui a informação e $\omega_i m_i \leq \Omega$ e $\omega_j m_j \leq \Omega$.
2. Se i não possui a informação e j possui a informação e $\omega_j m_j \leq \Omega$.
3. Se j não possui a informação e i possui a informação e $\omega_i m_i \leq \Omega$.
4. Se i e j são do tipo que não possui a informação.

Uma vez atendida uma das condições apresentadas, as interações ocorrem de acordo com o tipo de adaptação de cada agente (MHA1 ou MHA2) como foi definido em (2.21), (2.23) e (2.24). Vale destacar, no modelo proposto neste trabalho, que os agentes não

possuem informação sobre o futuro econômico, as decisões são baseadas nas informações de experiências do passado, além disso, os casos onde nenhum agente possui a informação, recai no modelo heterogêneo adaptativo apresentado na seção 2.2.1.

Admitimos mais uma vez que a escala de tempo (t) envolvida na simulação é suficientemente longa para que os agentes se adaptem, mas é curta quando levada em consideração a conservação do número de agentes (N) e a quantidade de recursos totais (M) que compõe o sistema. No início da simulação cada agente possui uma quantidade fixa de recursos igual a 1 ($m_i = 1, \forall i$) e uma taxa de gasto $\omega_i \sim U]0, 1[$. Para a realização de uma análise dos valores das grandezas resultantes da dinâmica, é interessante a introdução de parâmetros globais que possam caracterizar o sistema, e portanto, estabelecer uma comparação entre os valores obtidos na dinâmica, referente ao modelo proposto, com dados coletados em outras pesquisas. Diante do exposto, definimos a taxa de gasto média como

$$\langle \omega \rangle = \frac{\sum_{i=1}^N \omega_i}{N}, \quad (3.2)$$

e o índice de Gini, calculado de forma operacional por Iglesias e colaboradores, [50]

$$G = \frac{1}{2} \frac{\sum_{i,j} |m_i - m_j|}{N \sum_i m_i}. \quad (3.3)$$

As equações 3.2 e 3.3 definem os valores para a média da taxa de gasto e índice de Gini, respectivamente, para uma amostra, no entanto, nesta pesquisa trabalharemos com K amostras, de modo que os valores a serem estudados e utilizados para construção dos gráficos são uma média sobre todas as amostra, definidos por

$$[\omega] \equiv \frac{1}{K} \sum_i^K \langle \omega_i \rangle, \quad (3.4)$$

$$[G] \equiv \frac{1}{K} \sum_i^K G_i, \quad (3.5)$$

como a média amostral para a taxa de gasto média e índice de Gini respectivamente.

3.1 Resultados da simulação

Após a apresentação do modelo e sua dinâmica, nesta seção serão apresentados os resultados e as análises obtidos. As simulações foram realizadas com $K = 100$ amostras, numa escala de tempo da ordem de $t = 5000$ passos de Monte Carlo (um passo de Monte Carlo é o tempo necessário para que todos os agentes realizem ao menos uma interação), espera-se que o sistema atinja o estado estacionário, e que as quantidades observadas atinjam um valor constante dentro da barra de erro para um sistema com $N = 20000$ agentes.

O sistema possui uma determinada fração q e p de agentes do tipo MHA2 e com informação respectivamente, definidas no início da simulação.

Inicialmente apresentaremos o comportamento das médias amostrais da taxa de gasto $[\omega]$ em função do tempo, conforme a figura 3.1. A cada gráfico está associado uma fração $1 - q$ de agentes do tipo MHA1 e uma fração q de agentes do tipo MHA2 variando no intervalo $[0, 1]$ em passos $dq = 0,2$. Os códigos de cores correspondem a fração de agentes que possuem informação (p) variando no intervalo $0 \leq p \leq 1$ em passos $dp = 0,1$.

No gráfico onde $q = 0$ da figura 3.1, é observado que a taxa de gasto ($[\omega]$) atinge um estado estacionário em patamares mais altos, aproximando-se do valor inicial de 0,5 a medida que a fração p de agentes com informação aumenta. Quando a fração de agentes do tipo MHA2 aumenta, as taxas de gastos para as diversas frações p de agentes com informação vão atingindo estados estacionário em patamares cada vez mais próximos um dos outros, chegando quase ao mesmo patamar quando q é igual a 0,6. No gráfico onde $q = 0,8$, ocorre a inversão do comportamento observado no primeiro gráfico, ou seja, a taxa de gasto atinge patamares cada vez mais baixos a medida que p aumenta. No último gráfico da figura 3.1, onde $q = 1,0$, o comportamento se mantém o mesmo do gráfico para $q = 0,8$, porém atingindo o estado estacionário em patamares mais altos.

Nos gráficos das figuras 3.2 e 3.3 é observado o comportamento da média amostral da taxa de gasto $[\omega]$. Na figura 3.2, é mostrado o comportamento da taxa de gasto em função da fração q de agentes do tipo MHA2 para sistemas com frações p de agentes com informação variando no intervalo $0 \leq p \leq 1$ em passos $dp = 0,1$. Na figura 3.3, as frações p e q definem o espaço de parâmetro do modelo e a dependência da taxa de gasto $[\omega]$.

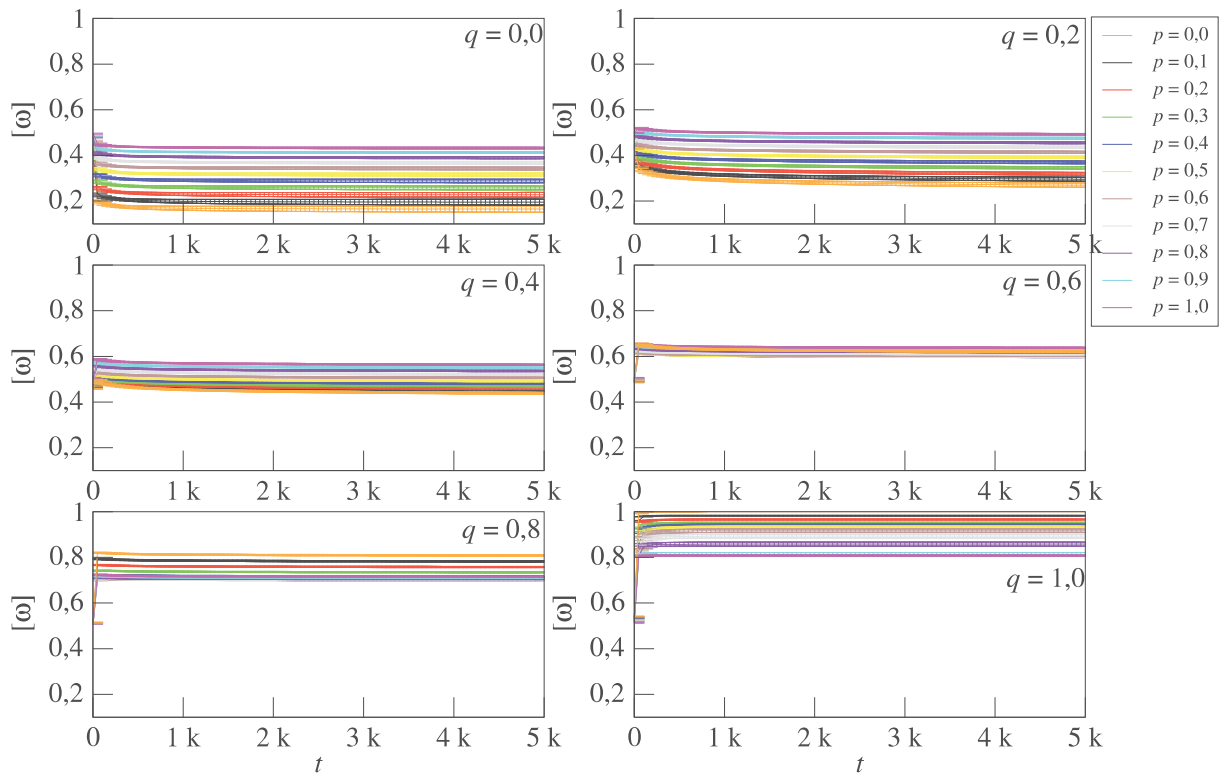


Figura 3.1: Gráfico da taxa de gasto $[\omega]$ em função do tempo, onde q representa a fração de agentes do tipo MHA2 e p a fração de agentes com informação conforme legenda.

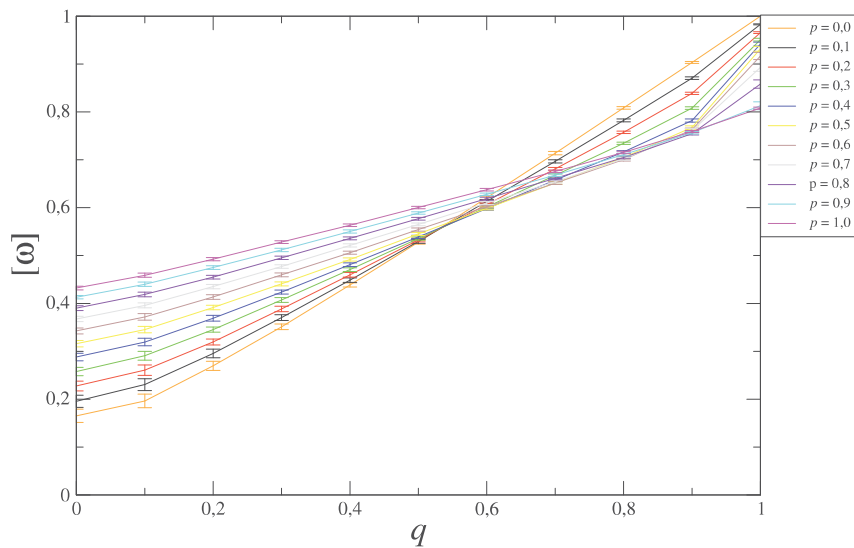


Figura 3.2: Gráfico da taxa de gasto $[\omega]$ em função da fração q de agentes do tipo MHA2 para sistemas com diversas frações de agentes com informação conforme legenda.

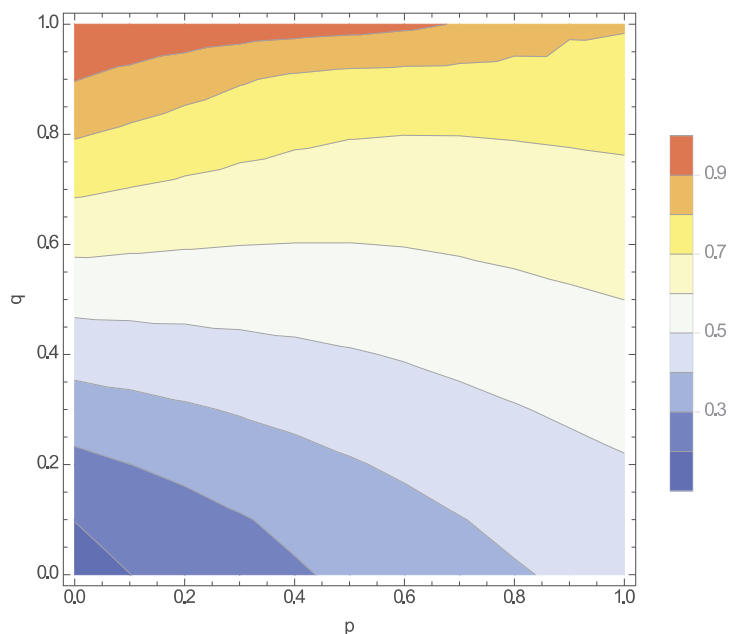


Figura 3.3: Gráfico da taxa de gasto $[\omega]$ (vide legenda) em função das frações q de agentes do tipo MHA2 e das frações p de agentes com informação.

Inicialmente, em $q = 0$, a taxa de gasto é maior conforme a fração de agentes com informação aumenta. Uma característica interessante pode ser observada quando ocorre um aumento de q , os valores médios das taxas de gastos também aumentam, porém os sistemas onde há uma maior fração de agentes com informação aumentam a uma taxa menor. Quando q é aproximadamente 0,62, os valores das taxas de gasto são praticamente os mesmos, independentemente da fração p de agentes com informação. A partir deste ponto, as taxas de gastos diminuem com o aumento de p . Como pode ser visto na figura 3.3, a região na cor vermelha possui os maiores valores de ω , esta região é caracterizada por possuir valores altos de q e baixos de p , enquanto a região com o tom mais escuro da cor azul, onde os valores de q e p são menores que 0,1, apresenta os menores valores para taxa de gasto. De maneira geral, o valor da taxa de gasto é diretamente proporcional as frações de agentes que se adaptam negativamente, enquanto a variação fração p resulta em variações da taxa de gasto mais significativa quando o sistema possui menores frações de q .

Nas figuras 3.4 e 3.5 é apresentado o comportamento da média amostral do índice de Gini $[G]$. Em 3.4, os códigos de cores da legenda correspondem a fração p de agentes que

possuem informação, variando no intervalo $[0, 1]$ em passos $dp = 0,1$. Na figura 3.5, as frações p e q estão representadas nos eixos das abscissa e ordenada respectivamente, enquanto $[G]$ é definido conforme os códigos de cores da legenda.

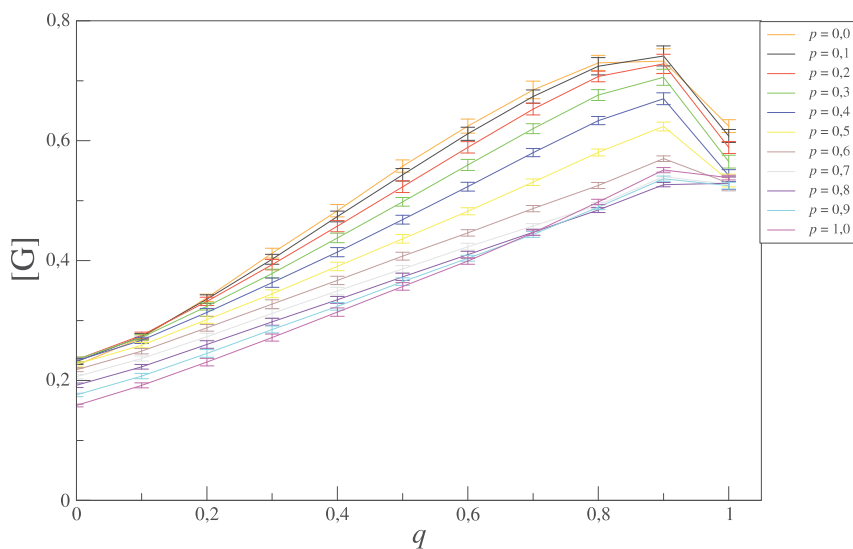


Figura 3.4: Gráfico do índice de Gini $[G]$ em função da fração q de agentes do tipo MHA2 para sistemas com diversas frações de agentes com informação conforme legenda.

Observamos que o aumento da fração q resulta, de uma forma geral, no crescimento do índice de Gini, chegando ao seu valor máximo quando $q = 0,9$, a partir deste ponto, o aumento de q resulta na redução de $[G]$. Em relação a fração p de agentes com informação, verifica-se que sistemas com maiores frações de p possuem os menores índices de Gini para um determinado q . Portanto, os sistemas com menores frações q de agentes do tipo MHA2 e com maiores frações p de agentes com informação possuem os menores índices de Gini, representada pela região com os tons mais escuro de azul na figura 3.5. Enquanto os maiores valores do índice de Gini, localizado na região de cor vermelha na figura 3.5, são obtidos quando o sistema possui uma elevada fração de agentes negativamente correlacionado e baixa fração de agentes com informação. Outro fato observado, é que as taxas de variações dos índices de Gini são menores nos sistemas onde a fração de p é maior.

Uma vez apresentados os comportamentos das médias amostrais da taxa de gasto $[\omega]$ e índice Gini $[G]$ em função da fração q de agentes do tipo MHA2. Apresentamos na figura 3.6 o comportamento de $[G]$ em função de $[\omega]$ para sistemas com frações q distribuídas no

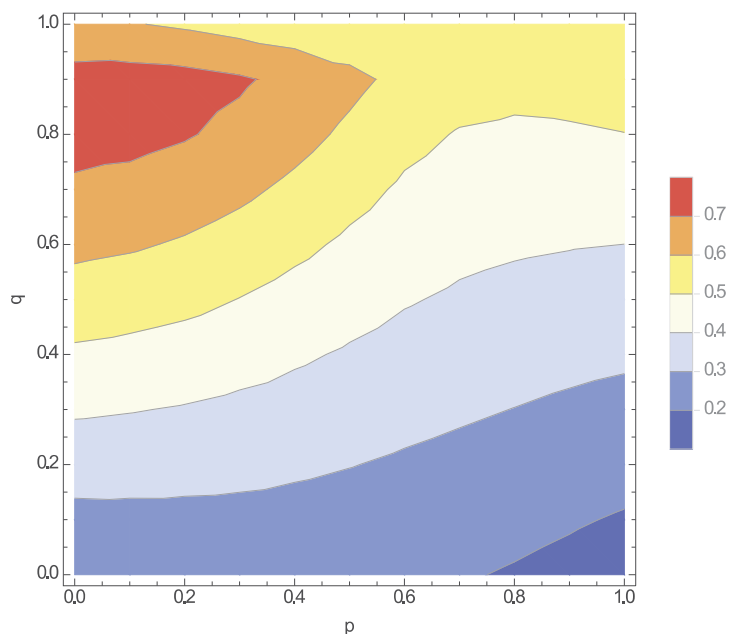


Figura 3.5: Gráfico do índice de Gini $[G]$ (vide legenda) em função das frações q de agentes do tipo MHA2 e das frações p de agentes com informação.

intervalo $[0,1]$ em passos $dp = 0,1$ e frações p de agentes com informação de acordo com os códigos de cores descrito na legenda.

Na figura 3.6 podemos constatar uma elevação do índice de Gini conforme aumenta a taxa de gasto para cada sistema com fração p de agentes com informação, o índice de Gini e a taxa de gastos atingem seus valores mínimos quando $q = 0$ e máximos quando $q = 0,9$. De forma geral, os sistemas com maiores p possuem os menores índices de Gini, obtendo o valor mínimo de $[G] \approx 0,16$ para $q = 0$ e $p = 1$.

A título de comparação entre os dados obtidos na simulação do modelo heterogêneo adaptativo com informação e dados das médias dos índices de Gini e taxas de gastos reais, é exibido na figura 3.7 o mesmo gráfico da figura 3.6 com a inclusão dos dados da figura 1.2 (círculos pretos), correspondente aos dados retirados do banco mundial [14, 13] de 123 países no período de 2000 à 2017. Podemos observar, de forma geral, que a maioria dos valores obtidos na simulação coincide ou estão muito próximos de alguns dados reais, os dados da simulação onde há uma maior fração de agentes com informação ($p \geq 0,4$) estão presentes na região onde encontra-se os dados reais, além disso, todos os dados dos índices de Gini e

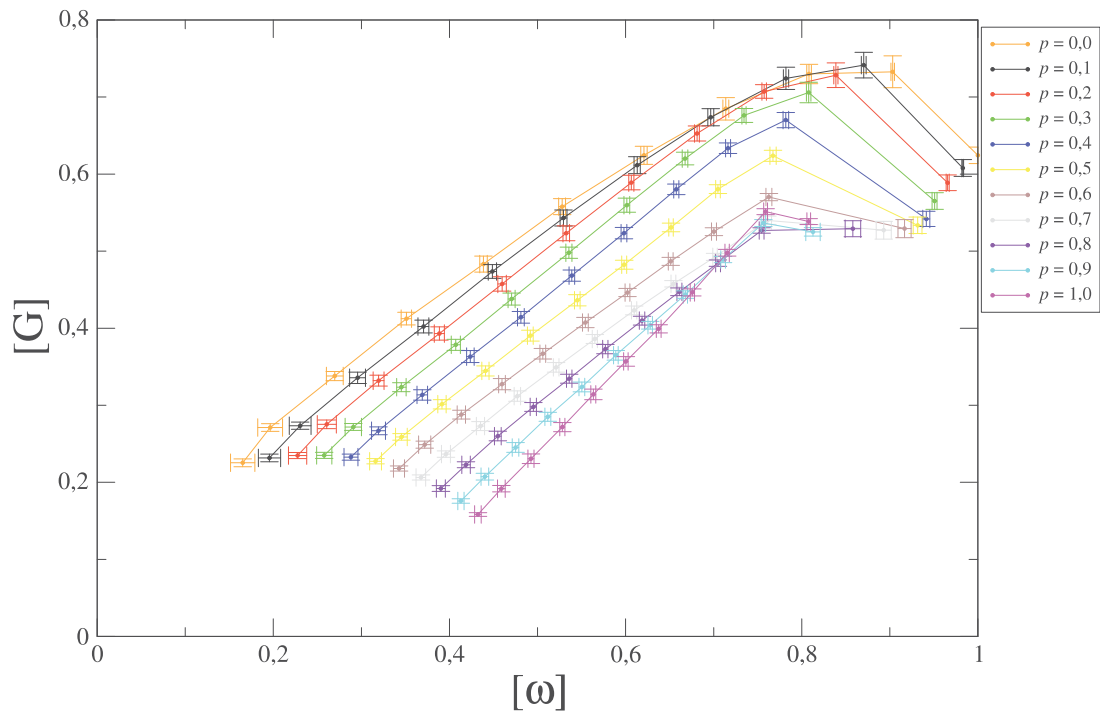


Figura 3.6: Gráfico do índice de Gini $[G]$ em função da taxa de gasto $[\omega]$ para sistemas com frações de agentes do tipo MHA2 distribuídos no intervalo $0 \leq q \leq 1$ em passos $dq = 0,1$ e frações de agentes com informação de acordo com a legenda.

taxas de gastos médios dos 123 países encontram-se delimitados pelas curvas geradas pela dinâmica.

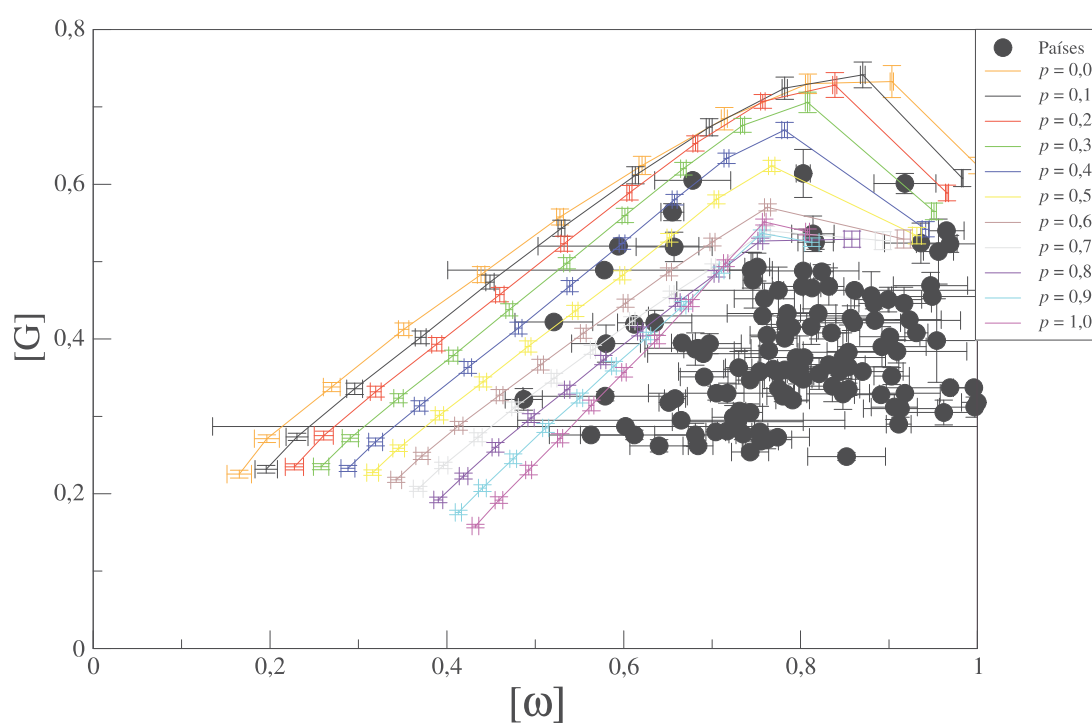


Figura 3.7: Gráfico do índice de Gini $[G]$ da taxa de gasto $[\omega]$ para sistemas com frações de agentes do tipo MHA2 distribuídos no intervalo $0 \leq q \leq 1$ em passos $dq = 0,1$, frações de agentes com informação de acordo com a legenda e dados do banco mundial referente a 123 países extraídos no período de 2000 à 2017 (círculos pretos) [13,14].

Capítulo 4

Estudo do comportamento bimodal da distribuição do modelo heterogêneo adaptativo com informação

Uma distribuição de probabilidade contínua é dita bimodal ou multimodal quando apresenta duas ou mais modas diferentes, esta característica pode ser melhor evidenciada quando, após a construção do histograma de um conjunto de dados, é percebida a presença de dois ou mais picos. Distribuições de probabilidades bimodais são encontradas em diversos campos de investigações [51], especificamente em economia, as densidades bimodais para distribuição de renda são bem documentadas na literatura [52, 53, 11, 54, 55].

A presença de multimodalidade está intimamente relacionada à heterogeneidade da população [11], portanto, as modas presentes na distribuição indicam uma certa polarização dos dados. Em relação à distribuição de renda, a presença de um comportamento bimodal indica a polarização da renda, em outras palavras, um número significativos de indivíduos são pobres enquanto uma parte significativa da população é rica. Nesse contexto, a bipolarização captura essencialmente a presença ou ausência de uma classe média em uma sociedade [12]. Segundo Chakravarty [56], a presença de uma classe média maior está associada a um crescimento econômico mais alto, melhor saúde e educação, maior receita tributária, melhor coesão social e menos conflitos. Portanto, em uma economia, o estudo da bimodalidade na

distribuição de renda é significativamente importante no entendimento de alguns aspectos econômicos e sociais.

A identificação de bimodalidade em uma distribuição de probabilidade nem sempre é possível ser feita através da construção de histogramas. O comportamento bimodal pode ser evidenciado ou não em uma distribuição dependendo da escolha dos intervalos para as classes em um histograma. Para uma identificação mais precisa da bimodalidade foram criados alguns teste, desses podemos destacar o cálculo do coeficiente de bimodalidade definido a partir dos valores da assimetria e da curtose, estes dois parâmetros, por sua vez, dependem dos valores dos momentos centrados de ordem $r = 1, 2, 3$ e 4 . Neste trabalho, os momentos centrados de ordem r foram calculados a partir da equação

$$\mu_r = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (m_i - \mu_1)^r \quad \therefore \quad \mu_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N m_i \quad (4.1)$$

onde m_i corresponde a renda do i -ésimo agente e N o número total de agentes do sistema. Assim, o coeficiente de bimodalidade β é definido matematicamente pela equação [57, 58]

$$\beta \equiv \frac{\gamma^2 + 1}{\kappa} \quad \therefore \quad \gamma = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} \quad \text{e} \quad \kappa = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} \quad (4.2)$$

onde γ e κ são os valores da assimetria e curtose respectivamente. O valor de β encontra-se entre 0 e 1, para uma distribuição uniforme, o valor do coeficiente de bimodalidade é igual a $\frac{5}{9}$, valores maiores que $\frac{5}{9}$ poderão indicar uma distribuição bimodal ou multimodal. O valor máximo de 1 é obtido por uma população com somente dois valores distintos, enquanto distribuições com caldas muito pesadas tem pequenos valores de β independente do número de modas.

Para construção dos gráficos deste trabalho será utilizada uma média sobre todas as amostras do coeficiente bimodalidade definida pela equação 4.3

$$[\beta] \equiv \frac{1}{K} \sum_i^K \beta_i \quad (4.3)$$

No estudo do modelo heterogêneo adaptativo [10], os gráficos das distribuições de renda para o modelo MHA1 apresentaram um comportamento bimodal conforme foi apresentado na figura 2.7. Naquela ocasião, foi observada que havia uma variação da concentração de agentes nas regiões inferiores e intermediárias de renda com o aumento da fração de agentes do tipo MHA1 (correlacionados positivamente). Neste capítulo pretendemos estudar o comportamento da bimodalidade para o modelo heterogêneo adaptativo com informação, vamos calcular o coeficiente β e estudar seu comportamento com a variação dos parâmetros p e q .

4.1 Resultados das simulações

As simulações foram realizadas com $K = 500$ amostras, numa escala de tempo da ordem de $t = 5000$ passos de Monte Carlo, no qual o sistema atinge o estado estacionário de forma que as quantidades observadas atinjam um valor constante dentro da barra de erro para um sistema com $N = 10000$ agentes. Cada agente possui inicialmente uma quantidade de recurso igual a 1, taxa de gasto $\omega \sim U]0, 1[$. Assim como no capítulo anterior, uma fração q dos N agentes são do tipo MHA2, enquanto que o parâmetro p especifica a fração de agentes com informação.

4.1.1 Cálculo do coeficiente de bimodalidade

Observamos nas figuras 4.1 e 4.2 os gráficos do comportamento da média amostral para o coeficiente de bimodalidade em função dos parâmetros q e p . Na figura 4.1, temos a variação da fração q de agentes negativamente correlacionados (MHA2) no intervalo $0 \leq q \leq 1$ em passos $dq = 0,1$ o código de cores corresponde a fração p de agentes que possuem informação no intervalo $0 \leq p \leq 1$ em passos $dp = 0,1$ conforme legenda. A linha tracejada em vermelho corresponde ao valor de $[\beta] = \frac{5}{9}$ indicando o limite inferior para valores de $[\beta]$ que indicam uma distribuição bimodal ou multimodal. Na figura 4.2, as frações p e q estão representadas nos eixos das abscissa e ordenada respectivamente, enquanto $[\beta]$ é definido conforme os códigos de cores da legenda.

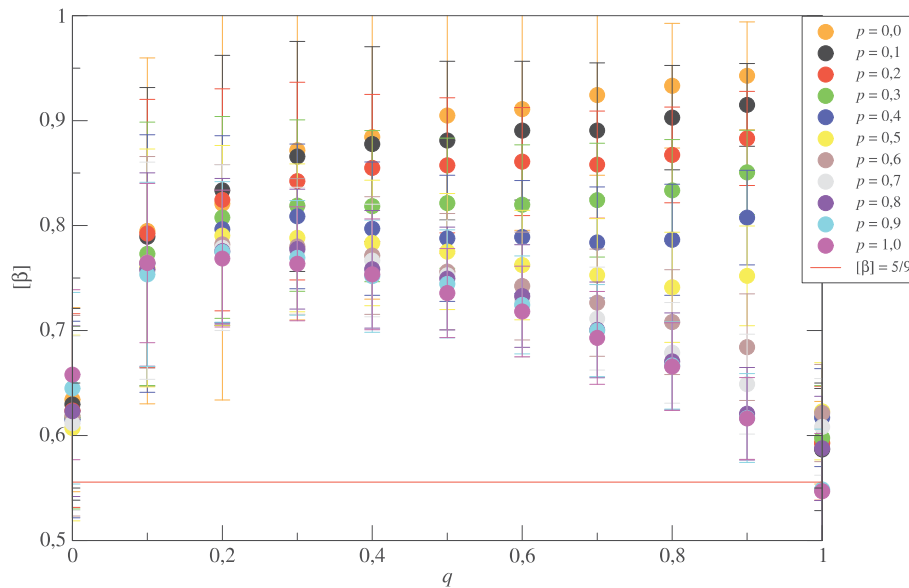


Figura 4.1: Gráfico do coeficiente de bimodalidade médio em função da fração q de agentes do tipo MHA2. As diversas cores representam a fração p de agentes com informação conforme legenda.

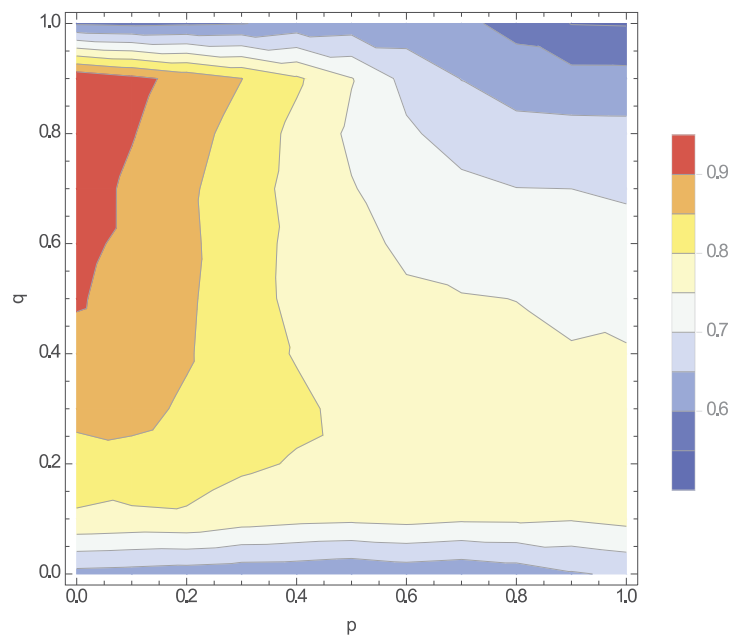


Figura 4.2: Comportamento do coeficiente de bimodalidade $[\beta]$ (vide legenda) em função das frações q de agentes do tipo MHA2 e das frações p de agentes com informação.

Verificamos que nas situações onde ocorrem uma maior uniformidade no tipo de adaptação dos agentes, ou seja, $q = 0,0$ e $q = 1,0$, o sistema apresenta uma menor polarização, com valores de β próximos de $\frac{5}{9}$, independentemente da fração p de agentes com informação. Para as situações intermediárias com $0 < q < 1$ a polarização possui um comportamento monotonicamente decrescente com p , sendo mais diverso com o aumento de q . Constatamos na figura 4.2 que há uma predominância no valor de β no intervalo $0,7 \leq \beta \leq 0,9$, e apresentando $\beta < 0,8$ quando $p \geq 0,5$. Nas figuras 4.3 à 4.8 são apresentados gráficos típicos das distribuições de renda $P(m)$ para diversos valores de p e q .

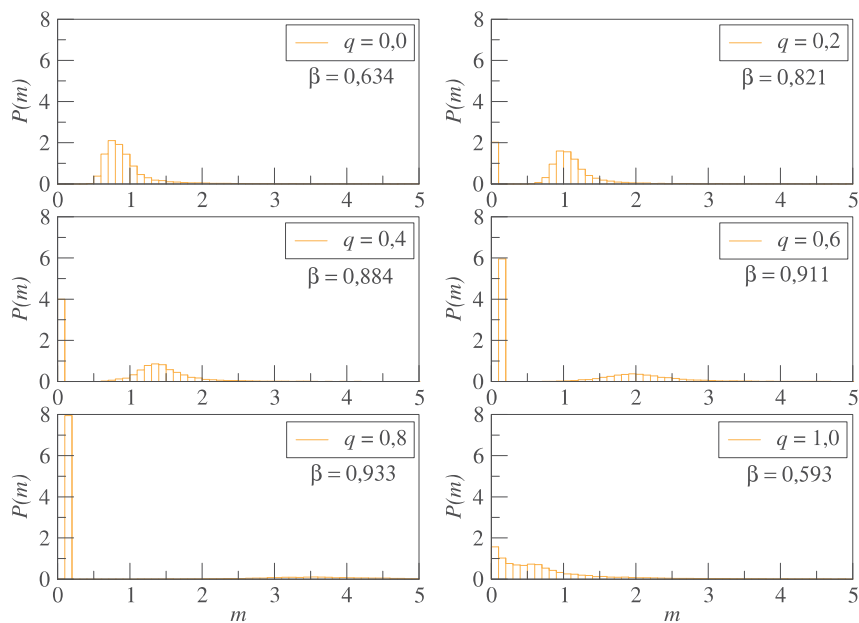


Figura 4.3: Comportamento da distribuição de renda $P(m)$ para o modelo heterogêneo adaptativo com informação. Cada gráfico possui uma fração $p = 0,0$ de agentes com informação, frações q de agentes do tipo MHA2 e coeficiente de bimodalidade β .

Em todos os gráficos é possível observar um comportamento bimodal em concordância com os coeficientes de bimodalidades calculados nos diversos casos. Nestas figuras, podemos observar com maior clareza os comportamentos já evidenciados pelos coeficientes de bimodalidade em função dos parâmetros q e p . Também podemos ver, que com o aumento de p , temos um gradual crescimento entorno de $m = 1$. O que pode estar relacionado a redução do número de agentes que participam da dinâmica devido a maior restrição associada a informação.

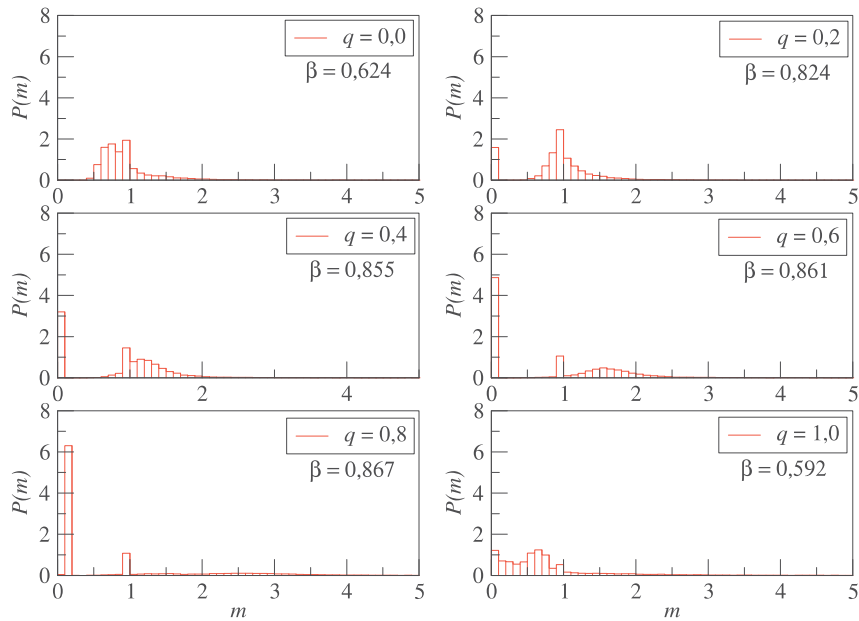


Figura 4.4: Comportamento da distribuição de renda $P(m)$ para o modelo heterogêneo adaptativo com informação. Cada gráfico possui uma fração $p = 0,2$ de agentes com informação, frações q de agentes do tipo MHA2 e coeficiente de bimodalidade β .

A figura 4.9 exibe o comportamento do número médio de transações para q e p , onde é constatada, de uma maneira geral, uma redução no número médio transações com o aumento da fração p de agentes com informação.

Na figura 4.10, as médias amostrais de $[G]$ e $[\beta]$ estão representadas nos eixos das abscissa e ordenada respectivamente, enquanto o gasto médio $[\Omega]$ é definido conforme os códigos de cores da legenda.

Inicialmente é importante perceber na figura 4.10 a inexistência de estados associados a baixa bimodalidade e baixa desigualdade, alta bimodalidade e baixa desigualdade e baixa bimodalidade e alta desigualdade. Na região onde o gasto médio de recursos possui seus maiores valores, $[G]$ e $[\beta]$ encontram-se nos intervalos $0,5 < G < 0,65$ e $0,55 < \beta < 0,75$. As regiões onde $\Omega \leq 0,5$ podem ter os menores valores de $[\beta]$ e $[G]$, assim como, também podem possuir os maiores valores para estes dois parâmetros. De forma geral, podemos verificar que um alto valor do gasto médio $[\Omega > 0,7]$ pode sugerir que o sistema possua um índice de Gini elevado e uma distribuição pouco polarizada.

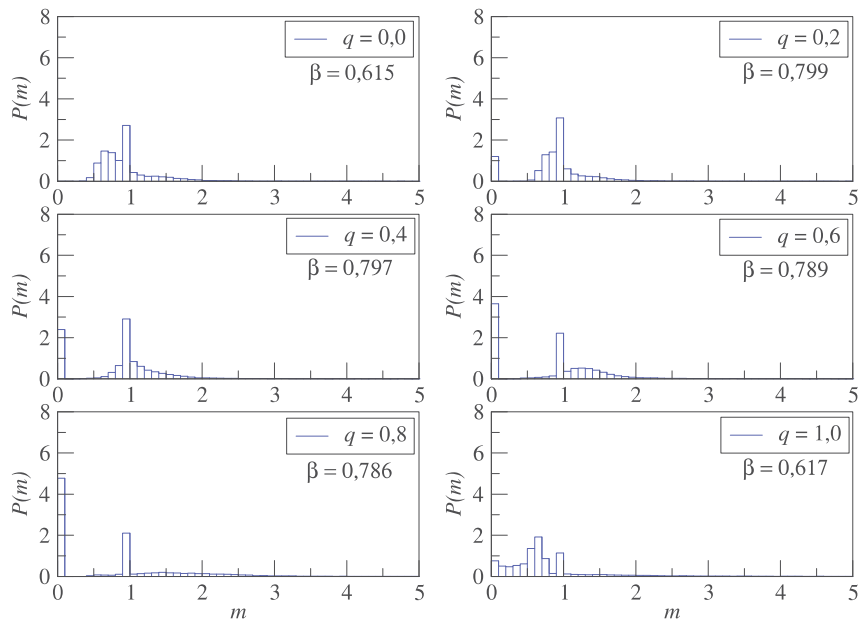


Figura 4.5: Comportamento da distribuição de renda $P(m)$ para o modelo heterogêneo adaptativo com informação. Cada gráfico possui uma fração $p = 0,4$ de agentes com informação, frações q de agentes do tipo MHA2 e coeficiente de bimodalidade β .

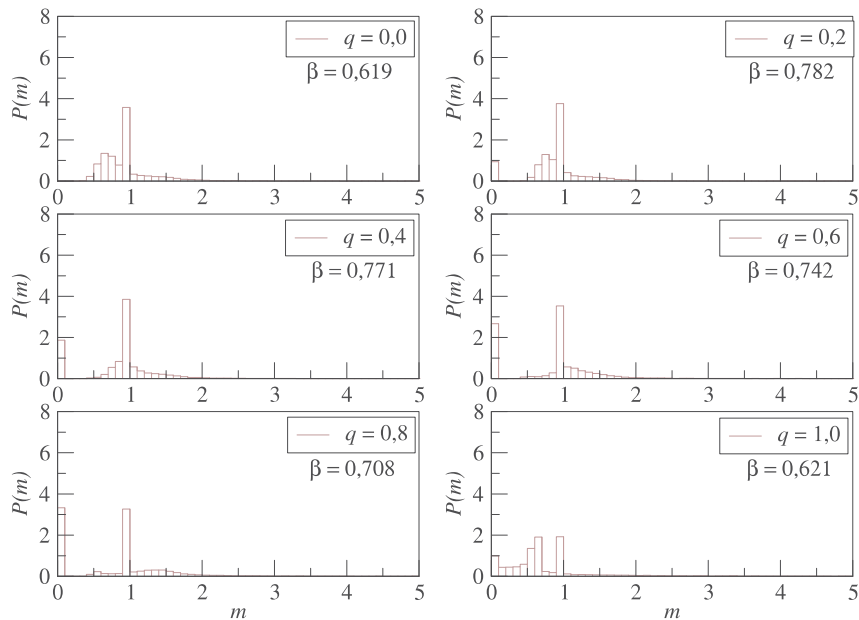


Figura 4.6: Comportamento da distribuição de renda $P(m)$ para o modelo heterogêneo adaptativo com informação. Cada gráfico possui uma fração $p = 0,6$ de agentes com informação, frações q de agentes do tipo MHA2 e coeficiente de bimodalidade β .

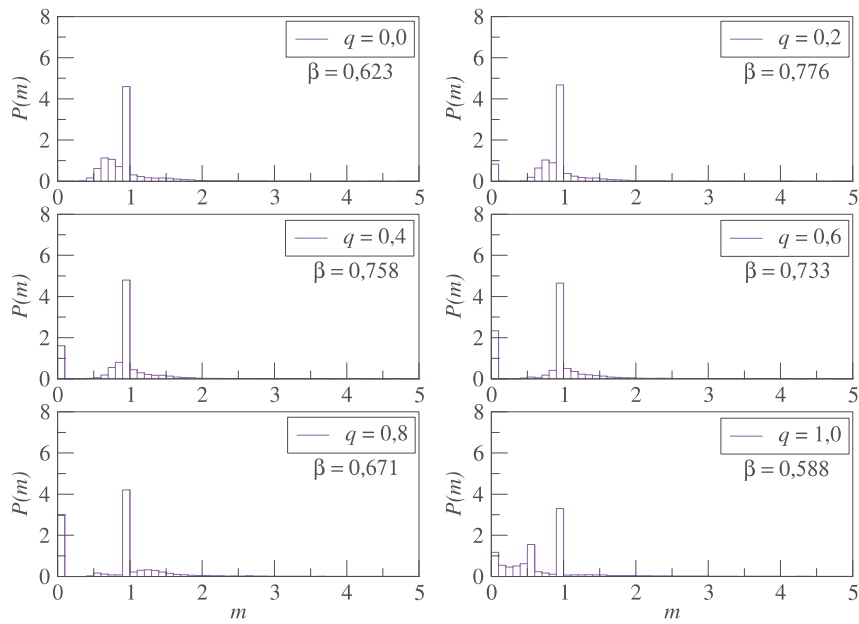


Figura 4.7: Comportamento da distribuição de renda $P(m)$ para o modelo heterogêneo adaptativo com informação. Cada gráfico possui uma fração $p = 0,8$ de agentes com informação, frações q de agentes do tipo MHA2 e coeficiente de bimodalidade β .

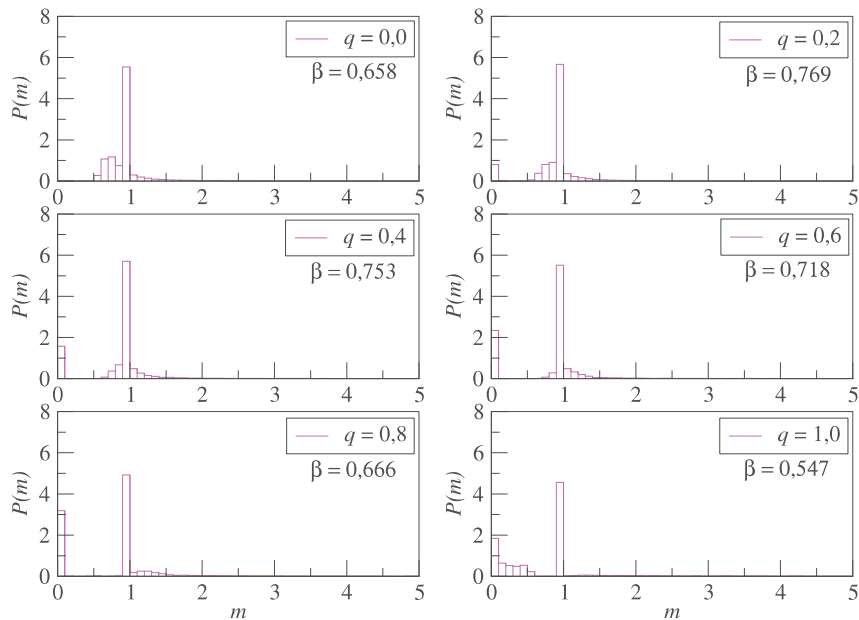


Figura 4.8: Comportamento da distribuição de renda $P(m)$ para o modelo heterogêneo adaptativo com informação. Cada gráfico possui uma fração $p = 1,0$ de agentes com informação, frações q de agentes do tipo MHA2 e coeficiente de bimodalidade β .

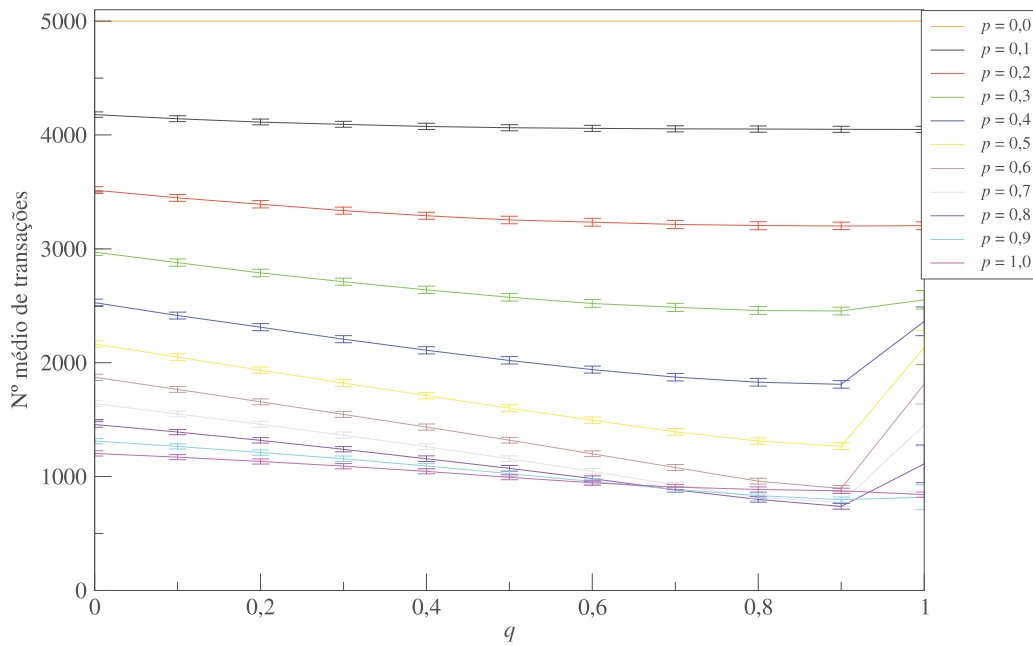


Figura 4.9: Gráfico do número médio de transações em função da fração q de agentes do tipo MHA2. As diversas cores representam a fração p de agentes com informação.

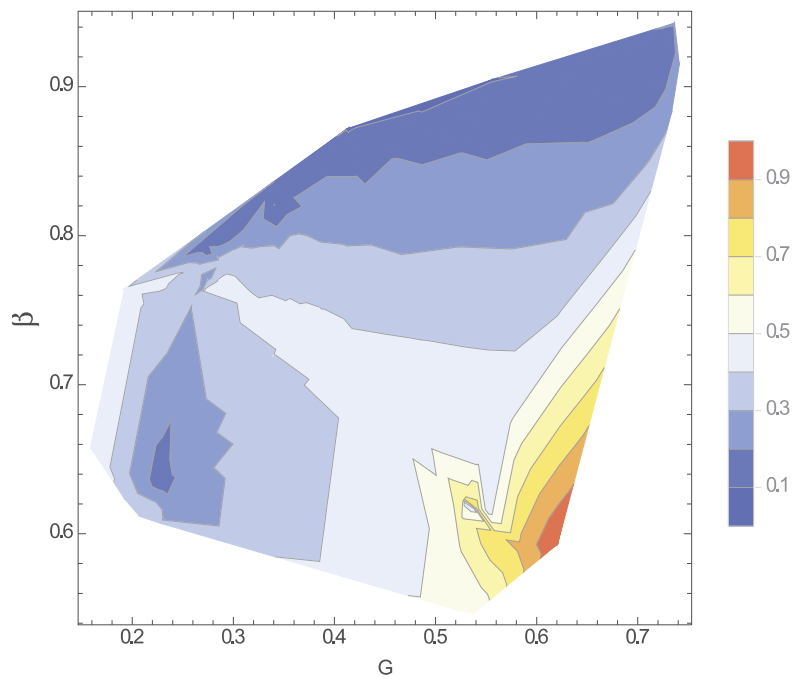


Figura 4.10: Gráfico do gasto médio de recursos $[\Omega]$ (vide legenda) em função da média amostral do coeficiente de bimodalidade $[\beta]$ e da média amostral do índice de Gini $[G]$.

Capítulo 5

Conclusão

Neste trabalho apresentamos uma modificação ao modelo heterogêneo adaptativo, incorporando a assimetria de informação, dos agentes sobre a distribuição de renda, a este novo modelo denominamos de modelo heterogêneo adaptativo com informação. Inicialmente, analisamos os efeitos causados pela informação sobre a desigualdade da distribuição de renda através do estudo do comportamento de parâmetros emergentes da dinâmica como o índice de Gini [G] e a taxa de gasto [ω] em função de modificações na fração q de agentes com adaptabilidade do tipo 2 (MHA2) e na fração p de agentes com informação.

No capítulo 3 foi observado que a taxa de gasto ($[\omega]$) atinge estados estacionários em patamares que dependem tanto da fração p de agentes com informação quanto da proporção da população do tipo MHA2 (agentes com os parâmetros renda e taxa de gasto correlacionados negativamente). Inicialmente, os valores das taxas de gastos aumentam com o crescimento de p , porém, quando a fração de agentes do tipo MHA2 atinge aproximadamente 65% da população, as taxas de gastos passam a diminuir com o crescimento de p . Em relação ao índice de Gini, constatou-se que os menores valores são atingidos quando as frações de agentes com informação são maiores, enquanto o crescimento da fração q de agentes do tipo 2, de maneira geral, resulta no aumento do índice de Gini. No estudo da relação entre [G] e [ω] foi observado uma elevação do índice de Gini conforme aumenta a taxa de gasto para cada sistema com fração p de agentes com informação. O índice de Gini e a taxa de gastos atingem seus valores mínimos, para um determinado sistema com fração p , quando $q = 0$, e

máximos quando $q \cong 0,9$. De forma geral, os sistemas com maiores p possuem os menores índices de Gini.

Após a análise dos dados extraídos da dinâmica do modelo proposto, estabelecemos uma comparação no espaço de parâmetros ($[G], [\omega]$) entre os dados oriundos do nosso modelo e os dados de 123 países retirados da base de dados do banco mundial [14, 13]. Verificamos que a maioria dos valores obtidos na simulação coincide ou estão muito próximos dos dados reais, os dados da simulação onde há uma maior fração de agentes com informação estão presentes na região onde encontra-se os dados reais, além disso, todos os dados dos índices de Gini e taxas de gastos médios dos 123 países encontram-se delimitados pelas curvas correspondentes a $p \leq 0,3$. Assim, constatamos que o nosso modelo é capaz de fornecer parâmetros emergentes da dinâmica compatíveis com dados reais.

No capítulo 4 analisamos o comportamento da forma da distribuição gerada pelo modelo proposto, mais especificamente, verificamos que a distribuição apresenta comportamento bimodal através do cálculo do coeficiente de bimodalidade β e analisamos a relação entre este e os parâmetros p , q , $[G]$ e $[\Omega]$. Em relação a β , observou-se que praticamente todos os valores calculados eram maiores que $5/9$, indicando que as distribuições apresentavam caráter bimodal. Nas situações onde ocorrem uma maior uniformidade no tipo de adaptação dos agentes, ou seja, $q = 0$ e $q = 1$, o sistema apresenta um menor coeficiente de bimodalidade, com valores de β próximos a $5/9$, independentemente da fração p de agentes com informação. Para as situações intermediárias com $0 < q < 1$ a polarização possui um comportamento monotonicamente decrescente com p , sendo mais distinto com o aumento de q .

Na análise dos histogramas podemos ver, que com o aumento de p , temos um gradual crescimento entorno de $m = 1$. O que pode estar relacionado a redução do número de agentes que participam da dinâmica devido a maior restrição associada a informação. Corroborando com esta hipótese, na figura 4.9 pode ser observado que, de uma maneira geral, ocorre uma redução no número médio transações com o aumento da fração p de agentes com informação. Outro fato significativo observado, é que os valores calculados dos coeficientes de bimodalidade apresentaram-se em conformidade com os comportamentos das distribuições vistos nos histogramas, evidenciando graus diferentes de polarização para cada tipo de distribuição.

Ao tentar estabelecer uma relação entre β , $[\Omega]$ e $[G]$ concluímos que as regiões onde

$[\Omega] \leq 0,5$ podem ter os menores valores de $[\beta]$ e $[G]$, assim como, também podem possuir os maiores valores para estes dois parâmetros. De forma geral, verificou-se que um alto valor de gasto médio ($[\Omega] > 0,7$) pode sugerir que o sistema possua um índice de Gini elevado e uma distribuição pouco polarizada.

Como perspectivas para futuros trabalhos, propomos uma modificação ao modelo heterogêneo adaptativo com informação, de maneira que agora, o nível de informação dos agentes dependa da renda e a interação entre os agentes esteja associada a uma probabilidade de ocorrência. Como segunda proposta, sugerimos uma simulação com o mesmo modelo citado, mas agora em um sistema aberto, onde os agentes possam ter rendas negativas como sugerido na literatura [59] de modo a tornar a dinâmica mais realista, incorporando outras escalas de tempo.

Apêndice A

Dados do Banco Mundial

A seguir são apresentados na tabela A.1, os valores médios das taxas de gastos e índices de Gini com seus respectivos desvios padrões para dados coletados de 123 países, no período de 2000 à 2017, extraídos da base de dados do Banco Mundial [13,14].

Tabela A.1: Valores médios da taxa de gasto $\bar{\omega}$ e índice de Gini \bar{G} de 123 países coletados entre os anos de 2000 à 2017 [13,14]

N	País	$\bar{\omega}$	$\Delta\omega$	\bar{G}	ΔG
1	Albânia	0,911	0,014	0,290	0,000
2	Argélia	0,563	0,047	0,276	0,000
3	Angola	0,594	0,091	0,520	0,000
4	Argentina	0,820	0,020	0,433	0,033
5	Armênia	0,962	0,054	0,305	0,016
6	Austrália	0,743	0,016	0,347	0,000
7	Áustria	0,731	0,007	0,307	0,004
8	Bangladesh	0,780	0,018	0,326	0,007
9	Belarus	0,681	0,046	0,276	0,015
10	Bélgica	0,754	0,009	0,280	0,004
11	Benin	0,880	0,023	0,456	0,031
Continua na próxima página					

Tabela A.1 – Continuação da página anterior

N	País	$\bar{\omega}$	$\Delta\omega$	\bar{G}	ΔG
12	Butão	0,684	0,060	0,388	0,000
13	Bolívia	0,803	0,063	0,488	0,054
14	Botsuana	0,678	0,043	0,605	0,000
15	Brasil	0,817	0,020	0,525	0,009
16	Bulgária	0,796	0,028	0,356	0,014
17	Burkina Faso	0,848	0,048	0,376	0,032
18	Camarões	0,813	0,010	0,466	0,000
19	Canadá	0,775	0,018	0,336	0,004
20	Chade	0,785	0,068	0,433	0,000
21	Chile	0,744	0,024	0,489	0,023
22	China	0,521	0,044	0,422	0,000
23	Colômbia	0,814	0,024	0,536	0,023
24	República Democrática do Congo	0,860	0,053	0,421	0,000
25	República do Congo	0,578	0,177	0,489	0,000
26	Costa Rica	0,824	0,013	0,487	0,009
27	Costa do Marfim	0,790	0,023	0,415	0,000
28	Croácia	0,791	0,019	0,321	0,005
29	Chipre	0,836	0,026	0,339	0,020
30	República Tcheca	0,684	0,017	0,262	0,003
31	Dinamarca	0,735	0,016	0,277	0,007
32	Djibuti	0,883	0,017	0,446	0,007
33	República Dominicana	0,832	0,017	0,468	0,024
34	Equador	0,746	0,011	0,476	0,036
35	Egito	0,913	0,042	0,310	0,011
36	Estônia	0,717	0,019	0,330	0,013
37	Eswatini	0,969	0,038	0,523	0,011
Continua na próxima página					

Tabela A.1 – Continuação da página anterior

N	País	$\bar{\omega}$	$\Delta\omega$	\bar{G}	ΔG
38	Etiópia	0,799	0,025	0,361	0,042
39	Fiji	0,832	0,041	0,367	0,000
40	Finlândia	0,774	0,036	0,273	0,003
41	França	0,783	0,009	0,329	0,005
42	Gâmbia	0,954	0,058	0,398	0,054
43	Geórgia	0,909	0,079	0,384	0,015
44	Alemanha	0,743	0,014	0,305	0,011
45	Gana	0,884	0,097	0,424	0,000
46	Grécia	0,903	0,020	0,352	0,011
47	Guatemala	0,956	0,017	0,512	0,042
48	Guiné	0,969	0,072	0,337	0,000
49	Honduras	0,936	0,041	0,524	0,026
50	Hungria	0,724	0,024	0,299	0,015
51	Islândia	0,762	0,028	0,270	0,012
52	Índia	0,691	0,027	0,351	0,000
53	Indonésia	0,666	0,012	0,395	0,000
54	Iran	0,580	0,039	0,394	0,024
55	Iraque	0,665	0,185	0,295	0,000
56	Irlanda	0,579	0,093	0,326	0,006
57	Israel	0,783	0,009	0,420	0,008
58	Itália	0,803	0,010	0,348	0,005
59	Jordânia	0,996	0,023	0,337	0,000
60	Casaquistão	0,612	0,061	0,276	0,006
61	Quênia	0,931	0,013	0,408	0,000
62	Coréia do Sul	0,651	0,011	0,318	0,003
63	Laos	0,854	0,057	0,364	0,000
Continua na próxima página					

Tabela A.1 – Continuação da página anterior

N	País	$\bar{\omega}$	$\Delta\omega$	\bar{G}	ΔG
64	Letônia	0,799	0,016	0,352	0,006
65	Líbano	1,000	0,018	0,318	0,000
66	Lituânia	0,821	0,036	0,355	0,020
67	Luxemburgo	0,487	0,021	0,322	0,014
68	Macedônia	0,892	0,050	0,390	0,026
69	Madagascar	0,923	0,036	0,425	0,001
70	Malawi	0,949	0,049	0,455	0,000
71	Malásia	0,635	0,042	0,421	0,016
72	Máli	0,918	0,040	0,330	0,000
73	Malta	0,729	0,074	0,293	0,005
74	Mauritânia	0,754	0,092	0,358	0,045
75	Maurício	0,870	0,046	0,358	0,000
76	México	0,775	0,006	0,463	0,030
77	Mongólia	0,705	0,077	0,330	0,009
78	Montenegro	0,997	0,040	0,312	0,013
79	Marrocos	0,782	0,014	0,401	0,008
80	Moçambique	0,965	0,020	0,540	0,000
81	Myanmar	0,690	0,063	0,381	0,000
82	Namíbia	0,918	0,035	0,601	0,013
83	Nepal	0,891	0,030	0,328	0,000
84	Holanda	0,704	0,011	0,280	0,003
85	Nicarágua	0,899	0,038	0,451	0,016
86	Níger	0,848	0,041	0,329	0,020
87	Nigéria	0,757	0,129	0,430	0,000
88	Noruega	0,640	0,033	0,262	0,008
89	Paquistão	0,906	0,026	0,312	0,016
Continua na próxima página					

Tabela A.1 – Continuação da página anterior

N	País	$\bar{\omega}$	$\Delta\omega$	\bar{G}	ΔG
90	Panamá	0,657	0,043	0,519	0,019
91	Papua Nova Guiné	0,612	0,000	0,419	0,000
92	Paraguai	0,751	0,014	0,493	0,018
93	Peru	0,759	0,034	0,452	0,020
94	Portugal	0,844	0,014	0,358	0,005
95	Romênia	0,782	0,030	0,360	0,005
96	Rússia	0,697	0,036	0,394	0,013
97	Ruanda	0,947	0,042	0,469	0,017
98	Senegal	0,901	0,034	0,403	0,000
99	Seicheles	0,802	0,034	0,468	0,000
100	República Eslováquia	0,755	0,020	0,268	0,007
101	Eslovênia	0,743	0,021	0,254	0,005
102	África do Sul	0,803	0,008	0,614	0,031
103	Sudão do Sul	0,861	0,201	0,463	0,000
104	Espanha	0,774	0,009	0,357	0,005
105	Sri Lanka	0,764	0,039	0,385	0,018
106	Sudão	0,795	0,016	0,354	0,000
107	Suécia	0,717	0,011	0,281	0,007
108	Suíça	0,658	0,012	0,323	0,005
109	Tanzânia	0,804	0,049	0,376	0,004
110	Tailândia	0,681	0,013	0,387	0,021
111	Timor Leste	0,602	0,467	0,287	0,000
112	Togo	0,917	0,031	0,446	0,021
113	Tunísia	0,854	0,057	0,383	0,035
114	Turquia	0,762	0,019	0,405	0,014
115	Uganda	0,857	0,029	0,427	0,016
Continua na próxima página					

Tabela A.1 – Continuação da página anterior

N	País	$\bar{\omega}$	$\Delta\omega$	\bar{G}	ΔG
116	Ucrânia	0,852	0,044	0,248	0,005
117	Reino Unido	0,854	0,013	0,335	0,008
118	Estados Unidos	0,835	0,017	0,408	0,005
119	Uruguai	0,812	0,028	0,416	0,023
120	Usbequistão	0,769	0,056	0,361	0,000
121	Vanuatu	0,795	0,058	0,376	0,000
122	Vietnã	0,730	0,015	0,362	0,021
123	Zâmbia	0,655	0,013	0,564	0,011

Referências Bibliográficas

- [1] Nino Boccara. *Modeling Complex Systems*. Springer-Verlag New York, 2010.
- [2] Alan Kirman and Jan Tuinstra. Bounded rationality, heterogeneity and market dynamics. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 29(4):595–600, 2005.
- [3] Arnab Chatterjee, Bikas K. Chakrabarti, and Robin B. Stinchcombe. Master equation for a kinetic model of a trading market and its analytic solution. *Phys. Rev. E*, 72:026126, Aug 2005.
- [4] A. Drăgulescu and Victor M. Yakovenko. Evidence for the exponential distribution of income in the USA. *European Physical Journal B*, 20:585–589, Apr 2001.
- [5] F. Clementi and M. Gallegati. Power law tails in the Italian personal income distribution. *Physica A Statistical Mechanics and its Applications*, 350:427–438, May 2005.
- [6] Juan C. Ferrero. The statistical distribution of money and the rate of money transference. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 341:575 – 585, 2004.
- [7] J. R. Iglesias, S. Gonçalves, G. Abramson, and J. L. Vega. Correlation between risk aversion and wealth distribution. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 342(1):186 – 192, 2004. Proceedings of the VIII Latin American Workshop on Nonlinear Phenomena.
- [8] Sitabhra Sinha. Evidence for power-law tail of the wealth distribution in India. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 359:555 – 562, 2006.
- [9] Nicola Scafetta, Sergio Picozzi, and Bruce J. West. A trade-investment model for distribution of wealth. *Physica D Nonlinear Phenomena*, 193:338–352, Jun 2004.

-
- [10] Luiz Carlos da Silva Junior. Efeitos de heterogeneidade e adaptabilidade sobre processos de distribuição de renda. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2013.
- [11] Hajo Holzmann and Sebastian Vollmer. A likelihood ratio test for bimodality in two-component mixtures with application to regional income distribution in the EU. *AStA Advances in Statistical Analysis*, 92(1):57–69, Feb 2008.
- [12] Laurence Roope, Miguel Niño-Zarazúa, and Finn Tarp. How polarized is the global income distribution? *Economics Letters*, 167:86 – 89, 2018.
- [13] worldbank. <https://data.worldbank.org/indicator/SI.POV.GINI>. Acessado: 05-02-2019.
- [14] worldbank. <https://data.worldbank.org/indicator/NE.CON.TOTL.ZS>. Acessado: 05-02-2019.
- [15] B. G. Sharma, S. Agrawal, M. Sharma, D. P. Bisen, and R. Sharma. Econophysics: A Brief Review of Historical Development, Present Status and Future Trends. *ArXiv e-prints*, August 2011.
- [16] Rosario N. Mantegna and H. Eugene Stanley. *An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2000.
- [17] Adam Smith. *An Inquiry Into the Nature and Causes of the Wealth of Nations* (Ed. R. H. Campbell, A. S. Skinner, and W. B. Todd). Oxford University Press, 1976 (1776).
- [18] A. Carbone, G. Kaniadakis, and A. M. Scarfone. Where do we stand on econophysics? *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 382(1):xi – xiv, 2007. Applications of Physics in Financial Analysis.
- [19] Norriss S. Hetherington. Isaac Newton’s influence on Adam Smith’s natural laws in economics. *Journal of the History of Ideas*, 44(3):497–505, 1983.

-
- [20] João Antonio de Paula. Walras no Journal Des Economistes: 1860-65. *Revista Brasileira de Economia*, 56:121 – 146, Março 2002.
- [21] Santiago Pich. Adolphe Quetelet e a biopolítica como teologia secularizada. *Hist. cienc. saude-Manguinhos*, 20:849 – 864, Setembro 2013.
- [22] Georg G. Iggers. Further remarks about early uses of the term "social science". *Journal of the History of Ideas*, 20(3):433–436, 1959.
- [23] G. Daniel and D. Sornette. Econophysics: historical perspectives. *ArXiv e-prints*, February 2008.
- [24] P. R. Krugman. *The Self-organizing Economy*. Blackwell Publishers, 1996.
- [25] A. W. Flux. Reviewed work: Cours d'Économie politique by vilfredo pareto. 7(25):91 – 94, 1897.
- [26] I. Florescu. *Probability and Stochastic Processes*. Wiley, New Jersey, 2014.
- [27] Mark Davis and Alison Etheridge. *Louis Bachelier's Theory of Speculation: The Origins of Modern Finance*. Princeton University Press, 2006.
- [28] Fischer Black and Myron Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3):637–654, 1973.
- [29] Giorgio Parisi. Complex systems: a physicist's viewpoint. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 263(1):557 – 564, 1999. Proceedings of the 20th IUPAP International Conference on Statistical Physics.
- [30] Raul Gleria, Iram Matsushita, and Sergio da Silva. Sistemas complexos, criticalidade e leis de potência. *Rev. Bras. Ensino Física*, 2004.
- [31] I. Kertesz and I. Kondor. *Econophysics: An Emerging Science*. Kluwer, 1999.
- [32] Warren Weaver. *Science and Complexity*, pages 449–456. Springer US, Boston, MA, 1991.

- [33] James Ladyman, James Lambert, and Karoline Wiesner. What is a complex system? *European Journal for Philosophy of Science*, 3(1):33–67, Jan 2013.
- [34] Melanie Mitchell. *Complexity: A Guided Tour*. Oxford University Press, Inc., New York, NY, USA, 2009.
- [35] Ilan Gleiser. *Caos e Complexidade. A Evolução do Pensamento Econômico*. Campus, Rio de Janeiro, 2002.
- [36] Eric Bonabeau. Agent-based modeling: Methods and techniques for simulating human systems. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 99(suppl 3):7280–7287, 2002.
- [37] C. M. Macal and M. J. North. Tutorial on agent-based modeling and simulation part 2: How to model with agents. In *Proceedings of the 2006 Winter Simulation Conference*, pages 73–83, Dec 2006.
- [38] C. M. Macal and M. J. North. Tutorial on agent-based modelling and simulation. *Journal of Simulation*, 4(3):151–162, Sep 2010.
- [39] P. Sandroni. *Novíssimo dicionário de economia*. Editora Best Seller, 1999.
- [40] Rodolfo Hoffmann. Distribuição de renda e crescimento econômico. *Estudos Avançados*, 15:67 – 76, 04 2001.
- [41] M. Patriarca, A. Chakraborti, E. Heinsalu, and G. Germano. Relaxation in statistical many-agent economy models. *European Physical Journal B*, 57:219–224, May 2007.
- [42] A. Chatterjee and B. K. Chakrabarti. Kinetic exchange models for income and wealth distributions. *European Physical Journal B*, 60:135–149, November 2007.
- [43] John Angle. The surplus theory of social stratification and the size distribution of personal wealth. *Social Forces*, 65:293, December 1986.
- [44] M. Patriarca, E. Heinsalu, and A. Chakraborty. The ABCD’s of statistical many-agent economy models. Technical Report physics/0611245, Nov 2006.

-
- [45] Marco Patriarca, Anirban Chakraborti, and Kimmo Kaski. Statistical model with a standard Γ distribution. *Phys. Rev. E*, 70:016104, Jul 2004.
- [46] Marco Patriarca, Anirban Chakraborti, and Kimmo Kaski. Gibbs versus non-gibbs distributions in money dynamics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 340(1):334 – 339, 2004. News and Expectations in Thermostatistics.
- [47] A. S. Chakraborti. Modelling savings behavior of agents in the kinetic exchange models of market. *ArXiv e-prints*, June 2010.
- [48] A. Dragulescu and V. M. Yakovenko. Statistical mechanics of money. *European Physical Journal B*, 17:723–729, Oct 2000.
- [49] Alan de Andrade Santos. Simulação computacional e abordagem numérica para um modelo heterogêneo e adaptativo de distribuição de renda. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2016.
- [50] G. M. Caon, S. Gonçalves, and J. R. Iglesias. The unfair consequences of equal opportunities: Comparing exchange models of wealth distribution. *The European Physical Journal Special Topics*, 143(1):69–74, Apr 2007.
- [51] Thomas R. Knapp. Bimodality revisited. *Journal of Modern Applied Statistical Methods*, 2007.
- [52] Rómulo Chumacero and Ricardo Paredes. Characterizing income distribution for poverty and inequality analysis. *Estudios de Economía*, 32:97–117, 01 2005.
- [53] Juan C. Ferrero. *The Monomodal, Polymodal, Equilibrium and Nonequilibrium Distribution of Money*, pages 159–167. Springer Milan, Milano, 2005.
- [54] Richard Paapaa and Herman K. van Dijk. Distribution and mobility of wealth of nations. *European Economic Review*, 42(7):1269 – 1293, 1998.
- [55] Maria Grazia Pittau and Roberto Zelli. Empirical evidence of income dynamics across eu regions. *Journal of Applied Econometrics*, 21(5):605–628, 2006.

-
- [56] Satya R. Chakravarty. *Inequality, Polarization and Conflict*. Number 978-81-322-2166-1 in Economic Studies in Inequality, Social Exclusion, and Well-Being. Springer, December 2015.
- [57] SAS insitute Inc. *SAS/STAT 12.1 user's guide*, 2012. Cary, NC: USA.
- [58] Aaron M. Ellison. Effect of seed dimorphism on the density-dependent dynamics of experimental populations of atriplex triangularis (chenopodiaceae). *American Journal of Botany*, 74(8):1280–1288, 1987.
- [59] Victor M. Yakovenko and J. Barkley Rosser. Colloquium: Statistical mechanics of money, wealth, and income. *Rev. Mod. Phys.*, 81:1703–1725, Dec 2009.