



Universidade Federal Rural De Pernambuco
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Departamento de Física

Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada

**Dos voos de Lévy truncados ao movimento browniano em cardumes
de peixe Zebra (*Danio rerio*).**

Andreza Merquiades da Silva

Dissertação de Mestrado

Recife - PE
31 de maio de 2025

Universidade Federal Rural de Pernambuco
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada

Andreza Merquiades da Silva

**Dos voos de Lévy truncados ao movimento browniano em cardumes
de peixe Zebra (*Danio rerio*)**

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada do Departamento de Física da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física Aplicada.

Orientador: Dr. Anderson Luiz da Rocha e Barbosa
Coorientador: Dr. Francisco Carol Bonfim Leal

Recife - PE
31 de maio de 2023

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA APLICADA

Dos voos de Lévy truncados ao movimento browniano em cardumes de peixe Zebra (*Danio rerio*)

Andreza Merquiades da Silva

Dissertação julgada adequada para obtenção do título de mestre em Física, defendida e aprovada por unanimidade em 28/06/2025 pela Comissão Examinadora.

Orientadores:

Prof. Dr. Anderson Luiz da Rocha e Barbosa
UFRPE

Dr. Francisco Carol Bonfim Leal
UFRPE

Banca Examinadora:

Dr. Antonio Jorge Fontenele Neto
University of Arkansas, EUA.

Prof. Dra. Viviane Morais de Oliveira
UFRPE

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Bibliotecária Suely Manzi – CRB/4 809

S586d Silva, Andreza Merquiades da
Dos voos de Lévy truncados ao movimento browniano em cardumes de peixe zebra (*Danio rerio*) / Andreza Merquiades da Silva. – 2025
60 f.: il.

Orientador: Anderson Luiz da Rocha e Barbosa.
Coorientador: Francisco Carol Bonfim Leal
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada, Recife, BR-PE, 2025.
Inclui bibliografia e apêndice(s).

1. Física – Estudo e ensino 2. Comportamento coletivo 3. Matéria
4. Peixes 5. Movimento browniano 6. Processos estocásticos
7. Termodinâmica de sistemas em não-equilíbrio 8. Transformações de fase (Física estatística) I. Barbosa, Anderson Luiz da Rocha e, orient.
II. Leal, Francisco Carol Bonfim III. Título

CDD 621

”Se estiver se sentindo desmotivado ou que não é bom o suficiente, incendeie o seu coração, enxugue as lágrimas e siga em frente. Quando se entristecer ou se acovardar, lembre-se que o fluxo do tempo nunca para. Ele não vai te esperar enquanto você se afoga em tristeza”.

Kyojuro Rengoku

Resumo

O comportamento coletivo de cardumes é sensível à densidade, influenciando as estruturas internas e as interações entre vizinhos. Este trabalho investigou como diferentes densidades afetam os padrões de movimento em cardumes de peixe-zebra (*Danio rerio*), utilizando dados experimentais para grupos de 2 a 30 indivíduos. A análise do deslocamento quadrático médio revelou que os peixes apresentam difusão anômala e, em baixas densidades, exibem movimentos superdifusivos, deslocando-se mais rapidamente em relação ao centro de massa do cardume do que caminhantes brownianos. A partir da distribuição cumulativa complementar dos comprimentos dos passos, foram identificados expoentes de leis de potência truncadas: para $N \leq 15$, os cardumes seguem um regime de voo de Lévy, enquanto para $N > 15$, o comportamento se aproxima de um regime browniano. A presença de assinaturas de caminhadas de Lévy nos deslocamentos em relação ao centro de massa é interpretada como uma estratégia de movimento equilibrado, que facilita a dinâmica coletiva e a transferência de informações dentro do grupo. Conclui-se que o aumento da densidade provoca uma transição de regime nos padrões de difusão, modificando as relações de vizinhança e a organização coletiva nos cardumes.

Palavras-chave: Comportamento coletivo, Matéria ativa, Sistemas Físicos de não-equilíbrio, Cardumes de peixes, Transições de fase.

Abstract

The collective behavior of fish schools is sensitive to density, influencing their internal structure and neighbor interactions. This study investigated how different densities affect the movement patterns of zebrafish (*Danio rerio*) schools using experimental data from groups of 2 to 30 individuals. Analysis of the mean square displacement revealed that the fish exhibit anomalous diffusion and, at low densities, display superdiffusive behavior, moving faster relative to the school's center of mass than Brownian walkers. From the complementary cumulative distribution of step lengths, truncated power-law exponents were identified: for $N \leq 15$, the schools follow a Lévy flight regime, while for $N > 15$, the behavior approaches a Brownian regime. The presence of Lévy walk signatures in the displacements relative to the center of mass is interpreted as a balanced movement strategy that facilitates dynamic collective motion and information transfer within the group. We conclude that increasing density induces a regime transition in the diffusion patterns, modifying neighborhood relationships and the collective organization within the schools. **Keywords:** Collective behavior, Active matter, Non-equilibrium Physical systems, Fish schools, Phase transitions.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Maria Adriana Merquiades da Silva e Cícero Alves da Silva, pelo apoio incondicional e por estarem ao meu lado, mesmo quando o caminho parecia difícil.

Ao meu avô, Arnaldo Domingos da Silva (in memoriam), minha eterna gratidão por seu exemplo e amor.

Ao meu companheiro, David Junior, por permanecer ao meu lado em todos os desafios enfrentados durante o mestrado, sendo apoio e incentivo em cada etapa.

Aos meus orientadores, Anderson e Francisco, por acreditarem no meu trabalho e me guiarem com paciência e cuidado em cada fase, especialmente no início, quando a insegurança diante dos novos desafios era grande.

Anderson, cuja inteligência e objetividade me inspiraram durante esta jornada. Sua serenidade e otimismo me trouxeram calma nos momentos de maior incerteza, e sou grata por sua sensibilidade em perceber minhas dificuldades iniciais, redirecionando a pesquisa de forma que eu pudesse enfrentar os desafios com confiança, descobrindo minhas capacidades ao longo do caminho.

Francisco, pelo cuidado e paciência com que orientou cada passo deste trabalho, esclarecendo dúvidas e me orientando de forma humana e generosa. Sua presença acolhedora me fortaleceu nos momentos de insegurança, e seus conselhos me incentivaram a sair da zona de conforto, buscando soluções criativas para os desafios da pesquisa. Agradeço por ter acreditado no meu potencial e por me ajudar a crescer não apenas como pesquisadora, mas também como pessoa.

Agradeço também a Neto, pelo trabalho cuidadoso na secretaria. Seu suporte foi essencial para o cumprimento de prazos, matrículas em disciplinas e para a resolução de questões burocráticas junto aos orientadores, permitindo que eu focasse no desenvolvimento da pesquisa.

Além disso, expresso minha eterna gratidão ao professor Thiago Souto, que, ainda na graduação, me disse uma frase que jamais esqueci: “Escreva! É melhor ter algo para corrigir do que não ter nada.” Foram palavras simples, mas que ecoaram em minha mente em cada momento, me lembrando de que o primeiro passo, mesmo imperfeito, é sempre o mais importante.

Por fim, agradeço à FACEPE pelo suporte financeiro, que foi fundamental para a realização deste trabalho.

Sumário

Resumo	5
Abstract	6
Agradecimentos	7
Lista de Siglas	13
1 Introdução	14
1.1 Estrutura da dissertação	16
1.1.1 Capítulo 2	16
1.1.2 Capítulo 3	17
1.1.3 Capítulo 4	17
1.1.4 Capítulo 5	17
2 Caminhada aleatória e voos de Lévy	18
2.1 Teorema Central do Limite (TCL)	19
2.2 Caminhada aleatória unidimensional e difusão normal	20
2.3 Teorema Central do Limite Generalizado (TCLG)	22
2.4 Voos de Lévy e difusão anômala	23
2.5 Voos ou caminhadas de Lévy	25
2.6 A hipótese dos voos de Lévy na eficiência na busca (<i>foraging</i>)	27
3 Método de análise de dados experimentais	29
3.1 <i>Danio rerio</i> (peixe Zebra)	30
3.2 Configuração experimental	31
3.3 Deslocamento quadrático médio e processos difusivos	33
3.4 Movimento intermitente: pausa e movimento	35
3.4.1 Seleção automática de limiares em velocidades via método de Otsu adaptado	36
3.4.2 Comprimento de passo e identificação de pausas na trajetória	39
4 Resultados e Análises	42
4.1 Regimes difusivos a partir do deslocamento quadrático médio	43
4.2 Segmentação dos estados de pausa e movimento com o método de Otsu	45
4.3 Distribuição de comprimentos de passos e o expoente μ	47
4.4 Distribuição q -Gaussiana do ruído associado ao comprimento do passo	51
5 Conclusão	54
5.1 Trabalho em redação	55
5.2 Participação em eventos	55

Lista de Figuras

1.1	Exemplos de sistemas com comportamento coletivo em diferentes contextos. (a) Cardume de sardinhas exibindo movimento coordenado no mar. (b) Bando de estorninhos realizando voo coletivo na revoada. (c) Tráfego de veículos no Recife, ilustrando dinâmica coletiva em sistemas humanos. (d) Colônia de bactérias, mostrando organização e interação em sistemas biológicos em escala microscópica.	14
1.2	Exemplos de frames em diferentes condições. (a) No tempo inicial $t = 0$, partículas estão distribuídas de forma aleatória em posições e direções. (b) Com baixa densidade e baixo ruído, as partículas formam agrupamentos e se movem de forma ordenada. (c) Com maior densidade e ruído, as partículas apresentam movimento aleatório, mas com certa correlação. (d) Em alta densidade e baixo ruído, observa-se movimento coletivo espontâneo das partículas em uma mesma direção [4].	15
2.1	Trajetórias de um caminhante após 10.000 passos em uma rede quadrada. (a) Caminhada aleatória no regime browniano, caracterizada por difusão normal e distribuição gaussiana dos passos, com $\alpha = 3$. (b) Caminhada aleatória com características do voo Lévy, onde os passos seguem uma lei de potência com expoente $\alpha = 1.5$	23
2.2	Representação esquemática da distribuição de probabilidade $P(\ell)$ em função do comprimento do passo ℓ , considerando diferentes regimes de movimento: linha contínua ($\mu = 1$); linha tracejada ($\mu = 3$); onde a região intermediária ($1 < \mu < 3$) corresponde aos voos de Lévy. Adaptado de [15].	24
2.3	Deslocamento quadrático médio em função do tempo em escala log-log. Os pontos pretos se referem aos caminhantes brownianos com difusão normal com $\gamma = 1$ e os verdes referem-se aos caminhantes de Lévy com $\gamma > 1$.	25
2.4	Exemplos de trajetórias unidimensionais de voos e caminhadas de Lévy para diferentes valores do expoente da lei de potência μ . Retirada de [15]	26
2.5	Apresenta a eficiência ótima em trajetórias de busca por alvos distribuídos em um plano, mostrando a relação entre o parâmetro μ e a eficiência $\lambda\eta$, obtidos a partir de simulação computacional. O gráfico indica que a eficiência atinge um máximo próximo a $\mu = 2$, sugerindo um comportamento ideal para certos padrões de forrageamento não destrutivo. Retirado de [15].	28
3.1	Danio rerio adulto com aproximadamente 1 ano e 7 meses de vida. Os peixes utilizados pertencem ao Laboratório de Ecofisiologia e Comportamento Animal (LECA). Retirada de [29].	30
3.2	Aquário usado para o transporte dos peixes. Retirado de [29].	31
3.3	(a) Recipiente sobre tampo de iluminação de LED difusa (plafon). (b) Suporte para a câmera. Retirado de [29].	32
3.4	Interface do IdTracker, retirado de [29].	33

3.5	Difusão de 100 partículas em um movimento aleatório em duas dimensões. A sequência ilustra a evolução temporal da dinâmica das partículas, mostrando sua dispersão progressiva desde (a), passando por (b), até (c).	33
3.6	Trajetórias obtidas a partir da movimentação de 8 peixes Zebra no cardume, considerando dois referenciais distintos: (a) referencial fixo no aquário identificadas por $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ e (b) referencial centrado no centro de massa do cardume identificadas por $\mathbf{x} = \mathbf{X} - \mathbf{X}_{cm}$ e $\mathbf{y} = \mathbf{Y} - \mathbf{Y}_{cm}$. Adaptado de [6].	34
3.7	(a) Vetores indicando a posição do centro de massa para $N = 2$ peixes e a posição de um dos peixes [29]. (b) Deslocamento quadrático médio de 2000 caminhantes aleatórios confinados em um potencial harmônico com constante $k = 0.01$, após 30.000 passos, para $\gamma \approx 1$	35
3.8	Movimento do peixe em 1D para demonstrar o movimento e as pausas na trajetória. Adaptado de [39].	36
3.9	Local de amostragem na seleção do limiar de Otsu para (A) histograma com vale e (B) histograma com único pico. Retirado de [40].	37
3.10	Distribuição de velocidade de um caminhante em uma caminhada aleatória com 10.000 passos. A linha vermelha representa o limiar ótimo v_L , que maximiza a variância entre classes.	39
3.11	Trajetória bidimensional de um único peixe dentro de um cardume contendo 10 indivíduos ao longo do tempo. O comprimento de passo, representado por ℓ , é definido como a distância entre dois pontos de pausa sucessivos. Para sua determinação, o algoritmo integra os segmentos da trajetória compreendidos entre os momentos classificados como pausa, conforme exemplificado, na qual ℓ é destacado por uma linha tracejada conectando dois eventos consecutivos de pausa. A seta preta indica o sentido da passagem do tempo.	40
3.12	Simulação da distribuição acumulada do comprimento do passo de uma caminhada aleatória com 10.000 passos, ilustrando que os valores seguem uma lei de potência. Os resultados são mostrados para diferentes valores do parâmetro μ : $\mu = 1.5$ e $\mu = 2$, que correspondem ao regime de voos de Lévy, e $\mu = 3.5$, associado ao movimento browniano. O ajuste da curva vermelha é apresentado para $\mu = 1$ (linha contínua) e $\mu = 3$ (linha tracejada), evidenciando o comportamento assintótico esperado para esses regimes.	41
4.1	Deslocamento quadrático médio em função do tempo para cardumes com diferentes tamanhos populacionais. Valores referentes a 1 realização experimental. A linha tracejada é um ajuste teórico para $\gamma = 1$	43
4.2	a) Variação do expoente médio $\bar{\gamma}$ em função da densidade ρ , indicando uma transição gradual no regime de difusão. A linha tracejada representa os valores de $\gamma = 1$ e na região sombreada com a cor vermelha representa $\gamma < 1$ (subdifusão). b) Comportamento da constante de difusão média $\bar{D}$. As barras de erro representam o desvio padrão das médias de 5 realizações experimentais.	44
4.3	Os painéis (a), (b) e (c) mostram exemplos de cluster de pausa e movimento para diferentes escolhas de limiares, com os segmentos coloridos indicando pausas (vermelho) e movimentos (azul). No painel (d), é apresentada a distribuição de velocidades $P(v)$ para 1 peixe dentro do cardume com 10 peixes. A linha vertical marca o limiar de velocidade v_L	46

4.4	Varição do valor médio do limiar d_L (em cm) em função do número de peixes N no cardume. Cada ponto representa a média de cinco realizações independentes, e as barras de erro indicam o desvio padrão.	47
4.5	Distribuições de probabilidade dos módulos dos deslocamentos $ \ell \geq \ell_{min}$ para diferentes números de peixes N . Os gráficos (a)-(c) mostram os ajustes de lei de potência truncada para $N = 2, 15$ e 30 , respectivamente, indicando o valor estimado do expoente μ em cada caso. Em (d), as distribuições colapsadas evidenciam o aumento sistemático do expoente μ com N . As linhas guias em (d) representam leis de potência com diferentes expoentes para comparação teórica para $\mu = 1$ (linha contínua) e $\mu = 3$ (linha pontilhada).	48
4.6	Evolução do expoente de cauda $\langle \mu \rangle$ da distribuição de passos em função da densidade ρ . A região sombreada representa a faixa limite ao movimento browniano. As barras de erro indicam o erro em torno de $\langle \mu \rangle$	49
4.7	Evolução da configuração espacial com relação ao centro de massa, de 30 peixes ao longo do tempo. a) $t = 3.316 \times 10^{-2} s$, b) $t = 1.658 \times 10^{-1} s$, c) $t = 3.316 \times 10^{-1} s$ e d) $t = 6.633 \times 10^{-1} s$. Os domínios delimitados pelas curvas vermelhas evidenciam a fragmentação do cardume em subgrupos, especialmente em condições de alta densidade. Observa-se também o trânsito de indivíduos entre diferentes domínios ao longo do tempo. . .	50
4.8	a) Distribuições de probabilidade dos deslocamentos para diferentes tamanhos de grupo, ajustadas por distribuições do tipo q -gaussiana. b) Variação do parâmetro médio $\bar{q}$ em função da densidade ρ , evidenciando a transição de um regime não-gaussiano para um comportamento mais próximo do regime gaussiano padrão. As barras de erro representam o desvio padrão nos ajustes de q	52

Lista de Tabelas

4.1	Médias dos expoentes de difusão anômala $\langle\gamma\rangle$ e das constantes de difusão $\langle D\rangle$ para diferentes escalas populacionais de peixes. Os erros indicam o desvio padrão das médias de 5 realizações experimentais.	45
4.2	Valores de limiar $d_L(\text{cm})$, obtidos para diferentes tamanhos de cardume, considerando cinco realizações independentes para cada quantidade de peixes.	46
4.3	Valores médios dos expoentes μ das distribuições de passos, em função do número de peixes N	49
4.4	Valores médios dos expoentes μ das distribuições de passos e dos parâmetros entrópicos $\bar{q}$ obtidos a partir dos ajustes por q -gaussianas, em função do número de partículas N	52

Lista de Siglas

DCC Distribuição Cumulativa Complementar

DSLR Digital Single-Lens Reflex

IID Independente e Identicamente Distribuída

LaSCoU Laboratório de Sistemas Complexos e Universalidades

LECA Laboratório de Ecofisiologia e Comportamento Animal

MSD Mean Square Displacement (Deslocamento Quadrático Médio)

MLE Maximum Likelihood Estimation

TCL Teorema Central do Limite

TCLG Teorema Central do Limite Generalizado

CAPÍTULO 1

Introdução

A natureza exibe uma variedade de exemplos de comportamento coletivo, desde aves que migram em formação a cardumes de peixes, passando por colônias de bactérias e até mesmo pelo tráfego de veículos, como mostra a figura 1.1. Apesar de suas aparências distintas, todos esses sistemas consistem em muitos agentes que interagem localmente, por vezes de forma complexa, e cuja dinâmica conjunta dá origem a padrões coletivos que não podem ser antecipados apenas a partir do comportamento individual [1].

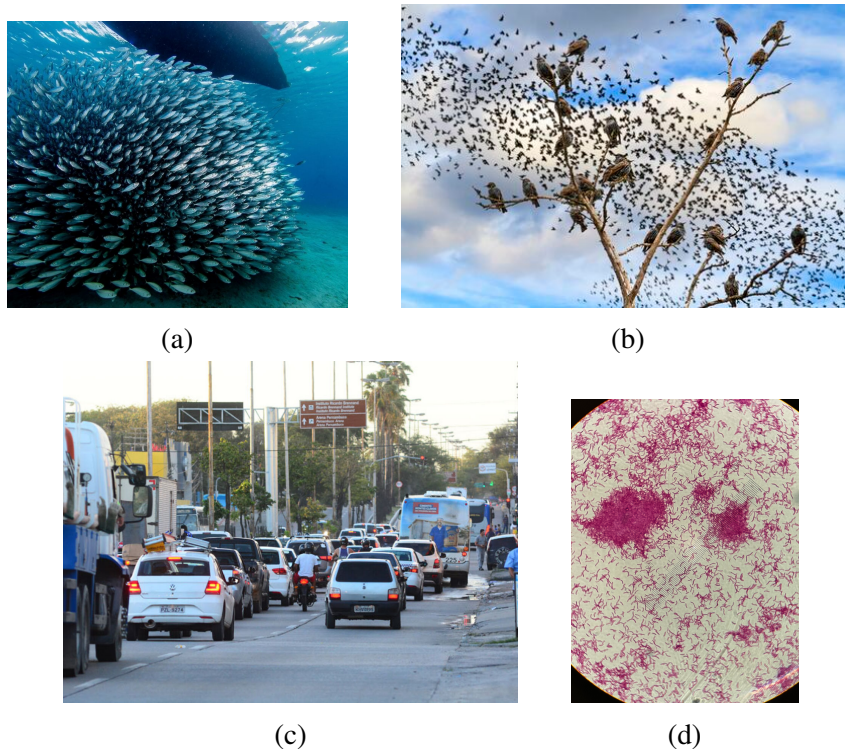


Figura 1.1: Exemplos de sistemas com comportamento coletivo em diferentes contextos. (a) Cardume de sardinhas exibindo movimento coordenado no mar. (b) Bando de estorninhos realizando voo coletivo na revoada. (c) Tráfego de veículos no Recife, ilustrando dinâmica coletiva em sistemas humanos. (d) Colônia de bactérias, mostrando organização e interação em sistemas biológicos em escala microscópica.

Esses padrões emergentes cumprem funções adaptativas cruciais, como: evasão de predadores, otimização de rotas, eficiência na comunicação ou no forrageamento e são particularmente notáveis por surgirem em ambientes dinâmicos e sujeitos a ruído. Diante disso, surge uma questão central: quais princípios fundamentais regem o movimento coletivo de sistemas compostos por muitos corpos interagindo fora do equilíbrio?

Um caminho promissor para explorar essa questão é oferecido pelo estudo da matéria ativa, um ramo da física estatística que investiga sistemas compostos por unidades que convertem energia em movimento de forma autônoma, mantendo-se continuamente fora do equilíbrio. Sua principal característica é a capacidade de gerar fluxos e padrões coletivos a partir da dissipação local de energia, resultando em comportamentos organizados que emergem das interações locais entre os constituintes, sem a necessidade de um poder centralizado [2, 3].

Dentro desse contexto, o Modelo de Vicsek, proposto em 1995, tornou-se um marco [4]. Ele descreve partículas que se movem sozinhas e que tendem a se alinhar com a direção média dos seus vizinhos, com uma pequena dose de aleatoriedade (ruído). Mesmo com essa regra simples e local, o modelo mostra que é possível formar grupos organizados em movimento, revelando como a ordem global pode surgir de interações locais. Essa dinâmica leva a uma transição de fase, de um estado desordenado para um organizado, algo surpreendente dada a simplicidade das regras envolvidas.

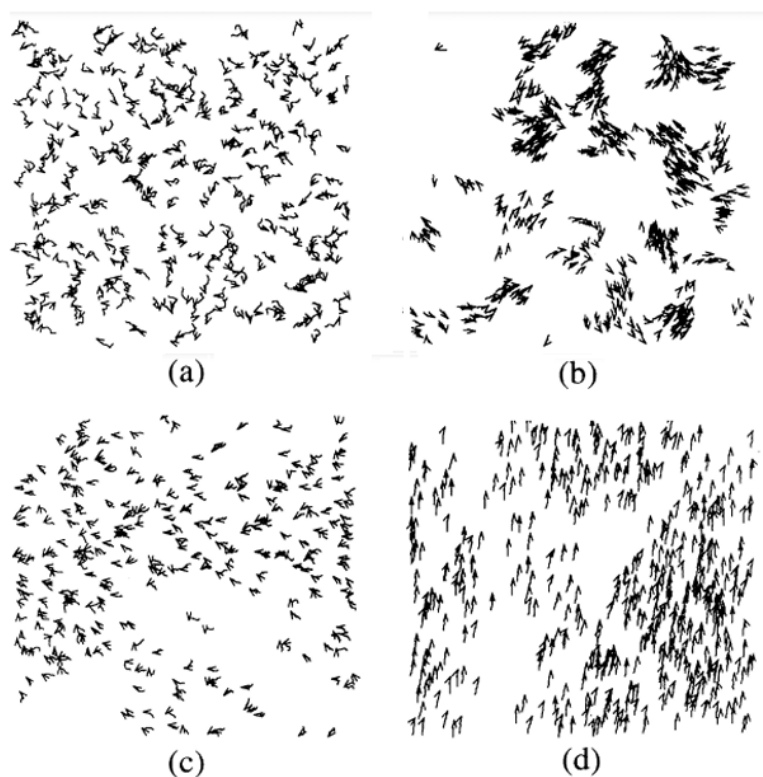


Figura 1.2: Exemplos de frames em diferentes condições. (a) No tempo inicial $t = 0$, partículas estão distribuídas de forma aleatória em posições e direções. (b) Com baixa densidade e baixo ruído, as partículas formam agrupamentos e se movem de forma ordenada. (c) Com maior densidade e ruído, as partículas apresentam movimento aleatório, mas com certa correlação. (d) Em alta densidade e baixo ruído, observa-se movimento coletivo espontâneo das partículas em uma mesma direção [4].

Esse princípio se estende a sistemas que interagem de forma ativa, sejam eles naturais (como células, peixes ou pássaros) ou artificiais (como robôs ou drones). Nesses sistemas, cada unidade responde apenas a interações com seu vizinho mais próximo, seguindo regras como atração ou repulsão buscando manter a coesão dos indivíduos. A complexidade do comportamento coletivo surge, então, de forma distribuída, sem a necessidade de um líder [4, 2].

No entanto, para aprofundar a compreensão dessas dinâmicas e verificar a aplicação

dos modelos teóricos aos sistemas reais, é essencial recorrer à análise experimental. A validação empírica tem sido essencial para conectar teoria e realidade, especialmente em sistemas biológicos.

Estudos recentes têm avançado nesse sentido, exemplos notáveis incluem investigações sobre o ruído nas trajetórias de bandos de estorninhos (*Sturnus vulgaris*) [5] e cardumes de Ayus (*Plecoglossus altivelis*) [6], que revelaram assinaturas de leis de potência nos deslocamentos dos indivíduos em relação ao centro de massa do grupo. Esses padrões evidenciaram um comportamento superdifusivo, indicando que os indivíduos se movem mais rapidamente que o previsto por um passeio browniano comum. De forma complementar, Vasconcelos et al. [7] investigaram dinâmicas coletivas em cardumes de peixes-zebra, identificando transições de fase na polarização do movimento coletivo. Tais transições indicam reorganizações coletivas altamente sensíveis a parâmetros como a densidade populacional e a intensidade das interações locais.

Diante do crescente interesse em compreender como padrões coletivos de movimentação emergem em sistemas biológicos, este estudo se volta à investigação do comportamento de cardumes de peixe-zebra (*Danio rerio*) em diferentes escalas populacionais. Essa espécie é amplamente utilizada em pesquisas biomédicas devido à sua alta similaridade genética com humanos, à transparência corporal durante o desenvolvimento e à sensibilidade comportamental a alterações ambientais. Por essas razões, o peixe Zebra constitui um modelo experimental robusto não apenas para o estudo de dinâmica coletiva, mas também para aplicações no monitoramento de efeitos de fármacos e no entendimento de doenças humanas [8].

À luz desse cenário, este trabalho propõe a investigação dos deslocamentos coletivos de peixes-zebra, com o objetivo de analisar os regimes de difusão predominantes e verificar a ocorrência de possíveis transições nos padrões de difusão em função do tamanho do grupo. Para isso, foram coletadas e analisadas trajetórias experimentais visando quantificar a relação entre o tamanho do grupo e os padrões de deslocamento. A análise quantitativa das trajetórias foi realizada por meio do cálculo do deslocamento quadrático médio (MSD), da análise da distribuição dos comprimentos de passo e da classificação automatizada dos estados de pausa e movimento, utilizando limiares de velocidade determinados pelo método de Otsu adaptado. Adicionalmente, investigou-se se o ruído no comprimento do passo apresentava características de cauda pesada ou gaussiana por meio de ajustes utilizando a q-gaussiana. Essa abordagem permitiu identificar os regimes difusivos dominantes em cada configuração populacional e avaliar a progressão da dinâmica coletiva à medida que a densidade aumentava.

Observações preliminares indicam que grupos menores tendem a exibir trajetórias com características superdifusivas, marcadas por movimentos mais exploratórios e intermitentes, semelhantes aos voos de Lévy truncados. Por outro lado, à medida que o número de indivíduos aumenta, esse comportamento parece se transformar gradualmente, aproximando-se de um regime de difusão browniano, mais regular e distribuído.

1.1 Estrutura da dissertação

Essa dissertação está dividida em mais quatro capítulos que são brevemente apresentados a seguir.

1.1.1 Capítulo 2

Fornece os fundamentos teóricos necessários para compreender os diferentes regimes de difusão. Apresenta o Teorema Central do Limite (TCL), sua generalização (TCLG) e o

conceito de difusão anômala. Discute-se a distinção entre voos de Lévy e caminhadas de Lévy, além da hipótese de que voos de Lévy otimizam estratégias de busca em sistemas biológicos.

1.1.2 Capítulo 3

Descreve detalhadamente os procedimentos experimentais adotados para a coleta de dados com cardumes de peixe-zebra, incluindo a caracterização da espécie, o ambiente controlado e os dispositivos utilizados. Apresenta-se também a metodologia de análise, incluindo o cálculo do deslocamento quadrático médio (MSD), o método de Otsu para segmentação das trajetórias e a extração dos comprimentos de passo.

1.1.3 Capítulo 4

Reúne as análises estatísticas aplicadas aos dados experimentais. São apresentados os regimes de difusão observados a partir do MSD, a segmentação entre pausas e movimentos, a distribuição dos comprimentos de passo (com cálculo do expoente μ e o ajuste das distribuições empíricas por q -gaussianas. Evidencia-se uma transição progressiva do regime superdifusivo para o browniano conforme aumenta o número de indivíduos no cardume.

1.1.4 Capítulo 5

Este capítulo encerra a dissertação, reunindo os principais resultados e interpretações extraídas das análises realizadas. Retomamos os objetivos propostos inicialmente e avaliamos em que medida foram atingidos, destacando o papel das ferramentas da Física Estatística na caracterização do comportamento coletivo dos peixes-zebra. Além disso, discutimos limitações encontradas durante os experimentos e apresentamos sugestões de aprimoramento metodológico e novas abordagens para investigações futuras.

CAPÍTULO 2

Caminhada aleatória e voos de Lévy

A difusão é um mecanismo fundamental que descreve o deslocamento de partículas de uma região de maior concentração para uma região de menor concentração. Para compreender a natureza desses processos, o conceito de caminhadas aleatórias desempenha um papel fundamental, pois descreve as trajetórias de partículas que se deslocam em passos discretos influenciadas por flutuações ou forças estocásticas. Esses modelos são amplamente utilizados para estudar fenômenos naturais, como o movimento browniano, cuja explicação teórica foi formulada pela primeira vez por Albert Einstein em 1905 [9]. Neste trabalho seminal, Einstein demonstrou matematicamente que a distribuição espacial das partículas, resultante de suas interações com as moléculas do fluido, seguem uma distribuição normal gaussiana no limite de tempos longos, uma propriedade diretamente relacionada ao Teorema Central do Limite (TCL) [10].

O TCL surge como resultado da convergência estatística dos deslocamentos quando o número de passos cresce indefinidamente, em sistemas em que os incrementos são Independentes e Identicamente Distribuídos (IID) e com média e variância finitas, como nos casos gaussianos [10]. No entanto, muitos sistemas de interesse não obedecem a essas condições. Em particular, fenômenos como os voos de Lévy, que descrevem passos de tamanhos assimétricos e com distribuições de cauda pesada, não seguem o TCL clássico, pois, quando os deslocamentos mais longos dominam a caminhada, o segundo momento diverge. Sendo assim, é necessária uma abordagem generalizada, como o Teorema do Limite Central Generalizado (TCLG) [11, 12].

Os voos de Lévy são uma extensão do conceito de caminhada aleatória, caracterizados por longos deslocamentos intercalados com passos menores. Esses padrões emergem em diversos contextos físicos, biológicos e financeiros, onde a dinâmica é dominada por distribuições de probabilidade com caudas pesadas, frequentemente representadas por leis de potência do tipo $P(\ell) \sim \ell^{-\mu}$. Os voos de Lévy descrevem regimes de difusão anômala, como os sistemas superdifusivos. Esses regimes não podem ser explicados por modelos clássicos de difusão, como no movimento browniano.

Nesse capítulo, discutiremos os conceitos que fundamentam o fenômeno dos voos de Lévy e caminhadas aleatórias no processo de difusão. Na seção 2.1, será introduzido o Teorema do Limite Central (TCL). Em seguida, na seção 2.2, será analisada a aplicação do TCL em uma caminhada aleatória unidimensional e sua conexão com a difusão normal. Na seção 2.3, será explorado o Teorema Central do Limite Generalizado (TCLG), e seu resultado associado, as distribuições α -estáveis de Lévy. Na seção 2.4, será descrito o conceito de voos de Lévy e sua conexão com a difusão anômala superdifusiva. Na seção 2.5, será discutida a diferença entre caminhada de Lévy e voos de Lévy. Por fim, na seção 2.6, exploraremos a aplicação dos voos de Lévy na eficiência dos processos de busca relacionados ao forrageamento de animais.

2.1 Teorema Central do Limite (TCL)

O TCL estabelece que, para uma sequência de N variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas $X = x_1 + x_2 + \dots + x_N$, com média e variância finitas, a soma dessas variáveis converge para uma distribuição normal à medida que N cresce indefinidamente. Nesta seção, exploramos sua formulação e demonstramos matematicamente como esse comportamento emerge das propriedades das funções características [13]. A variável aleatória X é definida como:

$$X = \sum_{i=1}^N x_i, \quad (2.1)$$

onde x_i são as variáveis independentes e identicamente distribuídas Independente e Identicamente Distribuída (IID). A distribuição de probabilidade proveniente da equação 2.1, pode ser escrita como [12, 13]

$$P_N(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x_1) dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} P(x_2) dx_2 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} P(x_N) dx_N \delta(x_1 + x_2 + \dots + x_N - X), \quad (2.2)$$

onde $\delta(x)$ é a função delta de Dirac, que impõe a condição que a soma das variáveis seja igual a X . A função delta pode ser representada no espaço de Fourier como

$$\delta(X) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikX} dk. \quad (2.3)$$

Utilizando a definição da função delta de Dirac, apresentada em 2.3 podemos reformular $P_N(X)$ a partir da função característica como uma transformada inversa de Fourier. Assim,

$$P_N(X) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikX} [\tilde{P}(k)]^N dk, \quad (2.4)$$

onde $[\tilde{P}(k)]^N$ representa a função característica da soma de N variáveis aleatórias x_i , pois a soma no espaço real se transforma em uma multiplicação no espaço de Fourier. Já $\tilde{P}_X(k)$ é a função característica da variável aleatória X . Logo,

$$[\tilde{P}(k)]^N = \tilde{P}_X(k), \quad (2.5)$$

onde,

$$\tilde{P}_X(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_N(X) e^{ikX} dX = \langle e^{ikX} \rangle. \quad (2.6)$$

A função característica $\tilde{P}_X(k)$ é a transformada de Fourier da distribuição de probabilidade $P_N(X)$, e contém toda a informação estatística sobre a variável aleatória X . Para distribuições como a gaussiana, por exemplo, a expansão em série de Taylor da função característica assume a forma fechada:

$$\tilde{P}_X(k) = \exp \left(ika - \frac{1}{2} b^2 k^2 \right), \quad (2.7)$$

onde a é a média e b^2 é a variância. Essa expressão evidencia que a distribuição é completamente caracterizada por seus dois primeiros momentos — um fato que se torna claro ao introduzirmos os cumulantes, que são definidos a partir do logaritmo da função característica:

$$\log(\tilde{P}_X(k)) = \log \left[\exp \left(ika - \frac{1}{2}b^2k^2 \right) \right] = ika - \frac{1}{2}b^2k^2. \quad (2.8)$$

Comparando com a expansão em cumulantes [14]:

$$\log(\tilde{P}_X(k)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \langle X^n \rangle_c, \quad (2.9)$$

e

$$\tilde{P}_X(k) = \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \langle X^n \rangle_c \right], \quad (2.10)$$

de onde extraímos diretamente os dois únicos cumulantes não nulos [12] :

$$\langle X \rangle_c = \langle X \rangle \equiv a \quad (2.11)$$

$$\langle X^2 \rangle_c = \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 \equiv b^2. \quad (2.12)$$

Todos os cumulantes de ordem superior são nulos, indicando que a gaussiana não possui assimetria nem caudas pesadas. Esses dois parâmetros, a e b^2 , são suficientes para caracterizar o comportamento da soma normalizada das variáveis aleatórias. Com isso, podemos definir uma versão normalizada para X , do tipo

$$Y = \frac{(X - Na)}{\sqrt{Nb}} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1). \quad (2.13)$$

Dessa forma, quando $N \rightarrow \infty$, os cumulantes $\langle Y^n \rangle_c$, para $n > 2$, desaparecem, e a distribuição de Y converge para uma gaussiana padrão caracterizada por média 0 e variância 1. Como Y , foi definido a partir da normalização de X , segue-se que a variável original $X = \sqrt{N}(Y + Na)$ também deverá assumir uma distribuição gaussiana. Isso ocorre, pois a média Na e a variância Nb^2 convergem gradualmente para os parâmetros de uma distribuição normal [12, 11]. Assim, a densidade de probabilidade de X pode ser expressa como

$$P_N(X) = \frac{1}{b\sqrt{2\pi N}} \exp \left(-\frac{(X - Na)^2}{2Nb^2} \right). \quad (2.14)$$

2.2 Caminhada aleatória unidimensional e difusão normal

As caminhadas aleatórias desempenham um papel fundamental para compreensão do TCL, pois ilustra como a soma dos incrementos aleatórios convergem para uma distribuição gaussiana a medida que o número de passos aumenta. Essa abordagem também permite descrever processos de difusão, nos quais a dinâmica da caminhada é governada por passos aleatórios e IID [11, 10, 12]. Para descrever essa dinâmica, considere uma caminhada aleatória unidimensional, onde a posição final x do caminhante, após N passos, é dada pela soma de todos os deslocamentos individuais

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_N, \quad (2.15)$$

onde cada passo x_i é uma variável IID. O tempo total da caminhada é $t = N\tau$, onde τ representa o intervalo de tempo de cada passo. A função característica da soma de N variáveis pode ser expressa como:

$$\tilde{P}_x(k) = [\tilde{P}(k)]^N = \langle e^{ikx} \rangle^N. \quad (2.16)$$

Expandindo $\tilde{P}_x(k)$ em serie de Taylor e truncando no termo de segunda ordem, obtemos

$$\tilde{P}_x(k) \sim \exp \left(i \langle x \rangle k - \langle x^2 \rangle \frac{k^2}{2} \right), \quad (2.17)$$

onde, $\langle x \rangle$ e $\langle x^2 \rangle$ representam a média e a variância, respectivamente. Substituindo na expressão 2.16, temos que

$$\tilde{P}_x(k) = \exp \left(iN \langle x \rangle k - N \langle x^2 \rangle \frac{k^2}{2} \right). \quad (2.18)$$

Essa expressão revela como a função característica de $P(x)$ tende a uma distribuição na forma de uma gaussiana para N suficiente grande

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N \langle x^2 \rangle}} \exp \left[- \frac{(x - N \langle x \rangle)^2}{2N \langle x^2 \rangle} \right], \quad (2.19)$$

com média $\langle x \rangle$ e variância $\langle x^2 \rangle$. Ao substituir $N = t/\tau$, podemos descrever o processos de caminhada aleatória em termos de um tempo total t , onde τ representa o intervalo de tempo entre cada passos. Essa reformulação permite identificar propriedades fundamentais do sistema, como a velocidade média do caminhante aleatório

$$v = \frac{\langle x \rangle}{\tau}, \quad (2.20)$$

e o coeficiente de difusão

$$D = \frac{\langle x^2 \rangle}{\tau}. \quad (2.21)$$

Após um intervalo de tempo t os caminhantes estarão espalhados em diferentes posições devido a natureza aleatória do processo. A densidade de probabilidade $P(x, t)$, que descreve a probabilidade de encontrar o caminhante na posição x após o tempo t é dada por

$$P(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}} \exp \left[- \frac{(x - vt)^2}{2Dt} \right]. \quad (2.22)$$

Essa função mostra que, à medida que $N \rightarrow \infty$, a posição do caminhante segue uma distribuição gaussiana, conforme o TLC, com parâmetros que dependem do tempo, com média

$$\langle x(t) \rangle = vt \quad (2.23)$$

e variância

$$\langle x^2(t) \rangle = Dt. \quad (2.24)$$

A variância cresce linearmente com o tempo, um comportamento típico de processos difusos normais, como o movimento browniano, com passos regulares, como mostra a figura 2.1 (a). Além disso, é importante destacar que a equação 2.22 é solução particular da equação de difusão unidimensional, que governa a evolução da densidade de probabilidade $P(x, t)$ [10].

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2}. \quad (2.25)$$

Por fim, ressaltamos que as demonstrações apresentadas acima podem ser generalizadas para caracterizar caminhadas aleatórias em dimensões superiores, como em sistemas bidimensionais e tridimensionais [15, 16].

2.3 Teorema Central do Limite Generalizado (TCLG)

Nas seções anteriores, apresentamos o TCL, que afirma que o somatório de variáveis aleatórias IID, desde que possuam média e variância finitas, convergem para uma distribuição normal. Aplicamos esse princípio ao estudar caminhadas aleatórias que evoluem ao longo do tempo, onde os incrementos contribuem de forma homogênea para moldar a distribuição final. No entanto, em muitos processos estocásticos observados na natureza, eventos extremos são frequentes, levando a distribuições com caudas pesadas, que desafiam as premissas do TCL.

Em distribuições de cauda pesada, a função de densidade de probabilidade não decai exponencialmente, mas sim na forma de uma lei de potência, expressa por [11]

$$f(x) \propto x^{-(\alpha+1)}, \alpha > 0. \quad (2.26)$$

Essa distribuição tem média e variância dadas na forma:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x x^{-(\alpha+1)} dx = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right] \begin{cases} \infty, & \text{se } \alpha \leq 1, \\ \text{converge}, & \text{se } \alpha > 1, \end{cases} \quad (2.27)$$

e

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 x^{-(\alpha+1)} dx = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{2-\alpha}}{2-\alpha} - \frac{a^{2-\alpha}}{2-\alpha} \right] \begin{cases} \infty, & \text{se } \alpha \leq 2, \\ \text{converge}, & \text{se } \alpha > 2. \end{cases} \quad (2.28)$$

Quando $0 < \alpha < 1$, o primeiro momento $\langle x \rangle$ diverge, tornando a média indefinida. De forma análoga, para $0 < \alpha < 2$, o segundo momento $\langle x^2 \rangle$, associado à variância, diverge. Como a média e/ou variância não são finitas nesses casos [17], o TCL no sentido clássico não é aplicável, pois a presença de saltos longos afeta o comportamento estatístico global do sistema.

Para lidar com a somas de variáveis aleatórias que apresentam caudas pesadas, adota-se uma versão generalizada (TCLG). O TCLG estabelece que, no limite de $N \rightarrow \infty$, a soma de variáveis aleatórias IID, com cauda pesada converge para uma distribuição estável de Lévy [18].

Para compreender este comportamento, analisaremos a distribuição de Lévy, por meio da função característica que é dada por uma transformada de Fourier [11, 12]

$$P_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{P}(k) e^{-ikx} dk, \quad (2.29)$$

onde $\tilde{P}(k)$ é a função característica da distribuição de Lévy. Quando há simetria na distribuição, tem-se a seguinte forma [12]

$$\tilde{P}(k) = e^{-a|k|^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 2, \quad (2.30)$$

onde $a > 0$ é o parâmetro de escala que controla a largura da distribuição. Quando $\alpha \geq 2$, a distribuição coincide com uma gaussiana. No intervalo $0 < \alpha < 2$, a variância diverge, caracterizando a distribuição de Lévy. Nesse caso, a densidade de probabilidade exibe um comportamento assintótico que segue uma lei de potência, descrita pela seguinte equação:

$$P_\alpha(x) \sim x^{-(\alpha+1)}. \quad (2.31)$$

Nos voos de Lévy, os passos longos, ou voos, são uma característica marcante e seguem a distribuição de cauda pesada descrita por uma lei de potência. Nesse modelo,

os comprimentos dos passos dos caminhantes aleatórios são governados por essa lei, o que leva a um regime de difusão anômala superdifusiva. Nesse regime, as partículas se espalham mais rapidamente pelo espaço em comparação aos caminhantes brownianos.

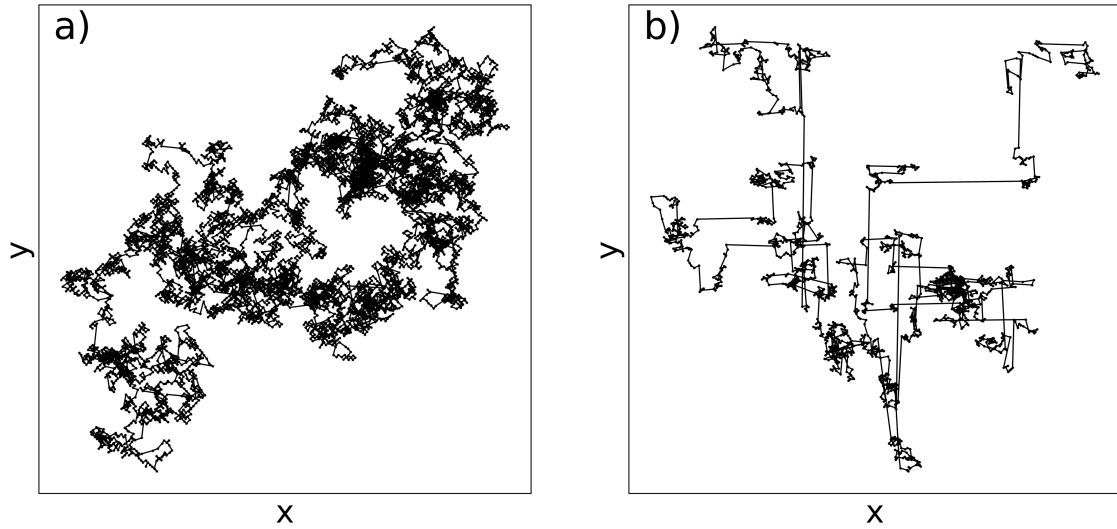


Figura 2.1: Trajetórias de um caminhante após 10.000 passos em uma rede quadrada. (a) Caminhada aleatória no regime browniano, caracterizada por difusão normal e distribuição gaussiana dos passos, com $\alpha = 3$. (b) Caminhada aleatória com características do voo Lévy, onde os passos seguem uma lei de potência com expoente $\alpha = 1.5$.

2.4 Voos de Lévy e difusão anômala

Os voos de Lévy são uma classe de passeios aleatórios caracterizados por passos cujos comprimentos seguem uma distribuição de probabilidade com caudas que decaem como uma lei de potência [19]. Em outras palavras, enquanto em um passeio aleatório clássico (como o movimento browniano) os passos têm comprimentos normalmente distribuídos e finitos, nos voos de Lévy há uma maior probabilidade de ocorrerem saltos longos, devido à cauda pesada da distribuição, como ilustra na figura 2.1(b) [11, 12].

Matematicamente, a distribuição de probabilidade dos comprimentos dos passos para os voos de Lévy segue a forma:

$$P(l) \propto l^{-\mu}, \quad (2.32)$$

onde l representa o comprimento do passo e $\mu > 0$ é o expoente de lei de potência, que governa a taxa de decaimento da cauda da distribuição. O parâmetro μ está relacionado ao expoente α pela expressão $\mu = \alpha + 1$, caracterizando diferentes regimes de movimento, dependendo do seu valor. Para $1 < \mu < 3$, a variância é divergente caracterizando o padrão de voos de Lévy. Aqui os passos longos têm maior influência, resultando em difusão anômala superdifusiva. Para $\mu > 3$, a variância é finita e o movimento tende ao regime browniano com difusão normal. Para $\mu \rightarrow 1$, ocorre o regime balístico, caracterizado por movimentos retilíneos e rápidos, como mostrado na figura 2.2.

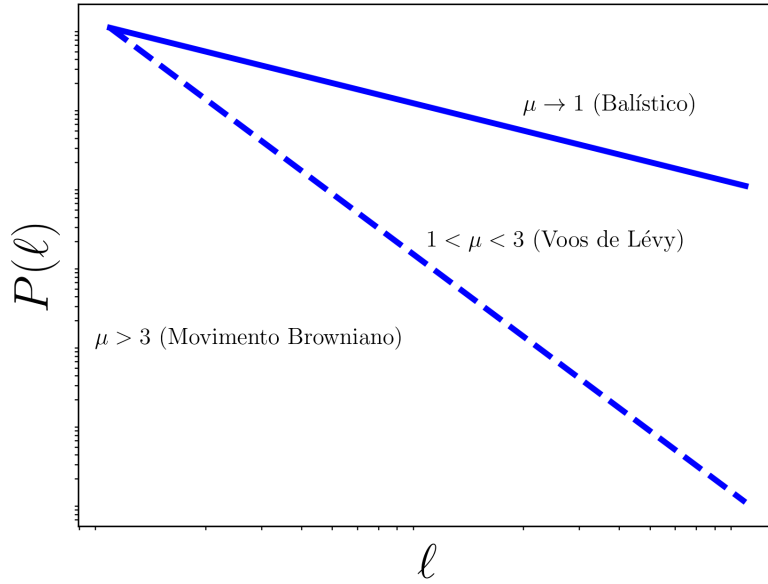


Figura 2.2: Representação esquemática da distribuição de probabilidade $P(\ell)$ em função do comprimento do passo ℓ , considerando diferentes regimes de movimento: linha contínua ($\mu = 1$); linha tracejada ($\mu = 3$); onde a região intermediária ($1 < \mu < 3$) corresponde aos voos de Lévy. Adaptado de [15].

Para o caso, quando $\langle \ell^2 \rangle \rightarrow \infty$, o deslocamento quadrático médio, não cresce linearmente com o tempo. Assim, esse comportamento pode ser descrito pelos regimes de difusão anômala [6], sendo caracterizado pela lei de potência,

$$\langle r^2(t) \rangle \sim Dt^\gamma, \quad (2.33)$$

onde r representa a posição do caminhante em um sistema de coordenadas, D é a constante de difusão anômala. Os valores de γ classificam os diferentes regimes de difusão conforme descrito em [15, 12]:

- $\gamma = 1$ o regime de difusão é normal e o movimento é browniano;
- $\gamma > 1$ o regime de difusão é anômalo do tipo superdifusivo;
- $\gamma < 1$ o regime de difusão é anômalo do tipo subdifusivo;
- $\gamma = 2$ o regime de difusão é anômalo do tipo balístico.

A superdifusão faz com que o caminhante explore uma área de busca maior do que em processos de difusão normal [15]. Esse tipo de movimento é marcado por saltos ocasionais longos, que podem ser descritos por distribuições com caudas pesadas, como as distribuições de Lévy. Esses saltos aumentam a área total explorada, tornando a busca mais eficiente em certos contextos. A figura 2.3, ilustra que a curva correspondente ao voo de Lévy, para $\gamma > 1$, representa um crescimento mais rápido em comparação ao regime browniano.

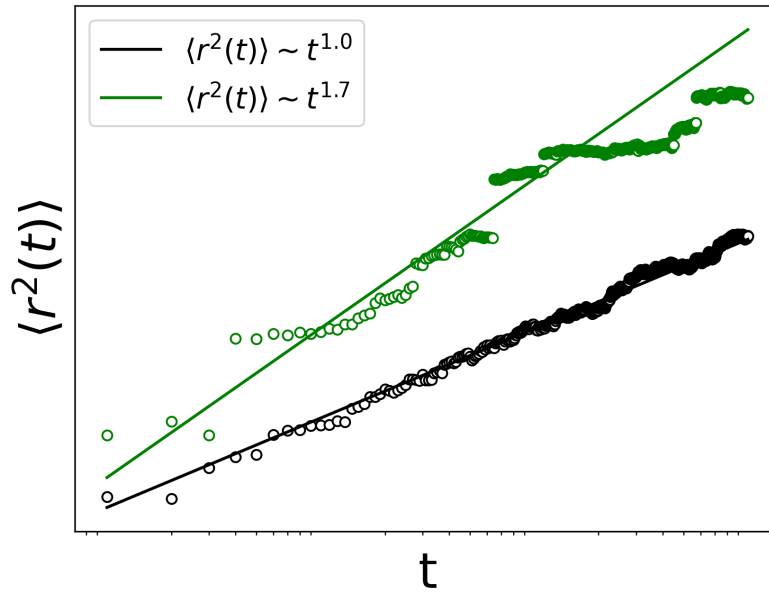


Figura 2.3: Deslocamento quadrático médio em função do tempo em escala log-log. Os pontos pretos se referem aos caminhantes brownianos com difusão normal com $\gamma = 1$ e os verdes referem-se aos caminhantes de Lévy com $\gamma > 1$.

Assim como o modelo de voos de Lévy, existem outras caminhadas aleatórias que seguem um regime de difusão anômalo, como em meios fractais [12]. Nesse regime, o processo aleatório não pode ser descrito pela equações que descrevem difusão normal usuais como a equação de Fokker-Planck [10]. No entanto, é possível utilizar de generalizações da equação de difusão, podendo adicionar propriedades dependentes no tempo ou até mesmo introduzir uma não linearidade ou derivadas fracionárias nas equações de difusão usuais [20, 21, 22, 12]. Essas estratégias tornaram-se bem vistas, pelos pesquisadores, nas descrições de processos difusivos anômalos [20]. Assim, pesquisas recentes destacam a aplicação do modelo em padrões de otimização na busca de alimento por animais (*foraging*) [15, 22], como o movimento de pássaros [5], peixes [6] e viagens humanas [15].

2.5 Voos ou caminhadas de Lévy

A distinção entre voos de Lévy (*Lévy flights*) e caminhadas de Lévy (*Lévy walks*), está diretamente relacionada à dinâmica de deslocamento e ao tempo operacional. Nos voos de Lévy, a partícula ou agente pode realizar deslocamentos de diferentes magnitudes, incluindo grandes saltos, sem restrição explícita de tempo. Isso resulta em trajetórias altamente intermitentes, caracterizadas por períodos de movimento rápido seguidos por pausas longas. Por outro lado, na caminhada de Lévy, cada deslocamento está vinculado a um tempo proporcional ao seu comprimento, limitando a velocidade máxima e impondo uma correlação temporal mais forte na trajetória.

Os voos de Lévy apresentam correlação de longo alcance quando analisados em escalas maiores, devido à distribuição de passos que segue uma lei de potência com caudas longas. No entanto, em pequenas escalas de tempo, os passos individuais podem ser considerados estatisticamente independentes, permitindo uma interpretação Markoviana efetiva nesse regime [15, 12].

Por outro lado, as caminhadas de Lévy podem se tornar semelhantes aos voos de Lévy para tempos longos. Essa semelhança decorre do fenômeno de envelhecimento, que surge

devido à velocidade finita de propagação e à dependência temporal dos deslocamentos. Conforme o tempo avança, os deslocamentos maiores tornam-se menos frequentes, o que afeta a difusão do sistema. Isso sugere que a correlação de longo alcance pode emergir gradualmente nas caminhadas de Lévy, tornando seu comportamento próximo ao dos voos de Lévy em escalas temporais suficientemente grandes.

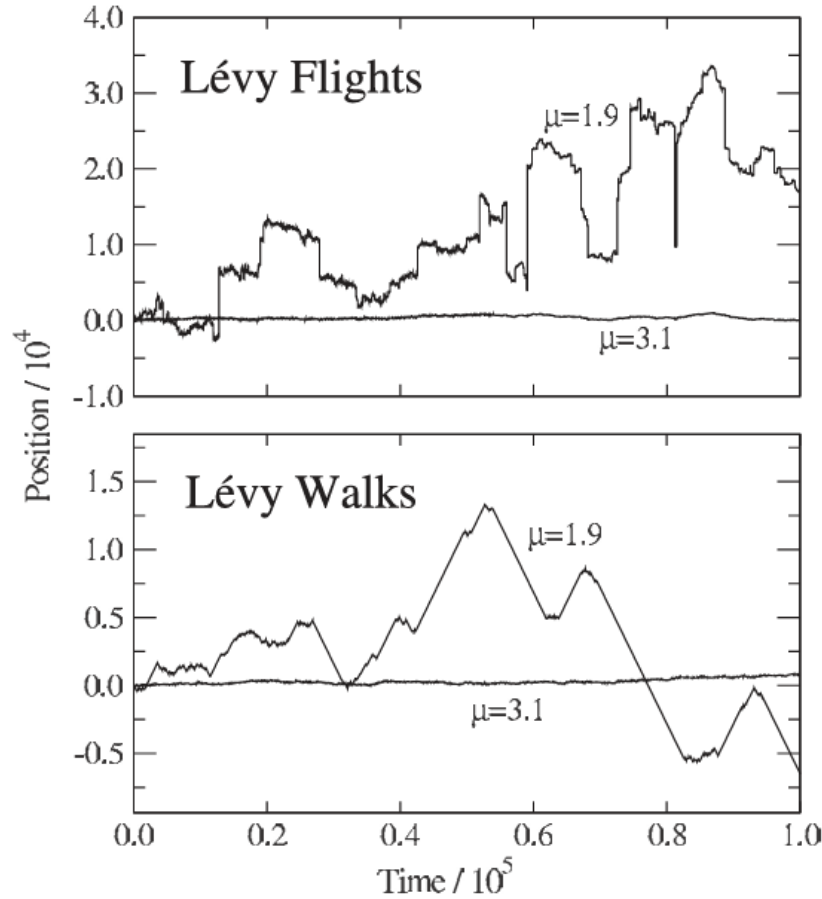


Figura 2.4: Exemplos de trajetórias unidimensionais de voos e caminhadas de Lévy para diferentes valores do expoente da lei de potência μ . Retirada de [15]

A figura 2.4 ilustra essa diferença fundamental. O primeiro gráfico exibe uma trajetória típica de um voo de Lévy, onde observam-se grandes saltos intercalados com períodos de relativa estagnação. Esse padrão é característico de processos superdifusivos, nos quais o MSD cresce de forma não linear com o tempo, muitas vezes seguindo uma relação de potência [15]. O segundo gráfico apresenta uma caminhada de Lévy, onde os deslocamentos ainda seguem uma distribuição de Lévy, mas o tempo necessário para realizá-los é proporcional ao seu tamanho, resultando em trajetórias mais suaves e com maior persistência. A principal distinção entre esses dois processos é que, enquanto os caminhantes de Lévy possuem uma velocidade de deslocamento finita, evidenciada pela inclinação finita nos diagramas espaço-tempo, os voadores de Lévy realizam seus deslocamentos de maneira instantânea [23].

É importante destacar que os voos de Lévy ideais são modelos matemáticos teóricos e não possuem uma realização física exata, pois sua distribuição apresenta caudas pesadas que levam à divergência de momentos estatísticos, como a média e a variância. No entanto, em sistemas reais, toda grandeza possui limites, sejam elas inferiores ou superiores. Assim, os truncamentos surgem de diferentes maneiras, limitando o tamanho máximo dos

deslocamentos permitidos. Quando um voo de Lévy ou uma caminhada de Lévy tem um corte superior na cauda da lei de potência, esses processos passam a ser denominados voos de Lévy truncados ou caminhadas de Lévy truncadas [15].

2.6 A hipótese dos voos de Lévy na eficiência na busca (*foraging*)

Na natureza, os alvos buscados pelos animais são diversos e depende das suas necessidades fisiológicas. No entanto, existem aspectos em comum que estão intimamente ligados a adaptação no ambiente para a sobrevivência. Esses alvos incluem a busca por alimento para suprir suas necessidades energéticas, parceiros para reprodução e abrigo, tanto para se proteger de predadores quanto para garantir condições favoráveis para a criação de seus filhotes [15, 24]. Estudos recentes têm revelado que muito animais, como peixes e pássaros, apresentam padrões de deslocamento que seguem características dos voos de Lévy [6, 5]. Essas trajetórias modeladas como voos de Lévy, destacam-se por sua eficiência na busca, permitindo que os animais explorem grandes áreas de maneira otimizada enquanto aumentam suas chances de encontrar recursos escassos [25].

A eficiência das trajetórias que seguem o padrão de voos de Lévy está intrinsecamente ligada ao expoente de lei de potência, μ , que governa a distribuição de comprimento de passo [26]. Esse expoente determina a natureza da trajetória: para $\mu > 3$, o movimento é dominado por passos curtos e regulares, caracterizando um comportamento próximo ao movimento browniano; já para $1 < \mu < 3$, a trajetória exibe uma mistura de passos longos e curtos, típica dos voos de Lévy, como mostramos nas seções 2.4 e 2.3.

Essa estrutura fractal da trajetória maximiza a eficiência de busca em ambientes com recursos esparsos, pois os passos longos permitem uma exploração global, enquanto os passos curtos facilitam a busca local. A vantagem dos voos de Lévy em tais cenários pode ser entendida através da otimização da taxa de encontro de recursos, que é significativamente maior do que a observada em movimentos brownianos [15]. Do ponto de vista evolutivo, isso sugere que a seleção natural favoreceu organismos capazes de explorar seu ambiente de forma eficiente, utilizando estratégias que se aproximam desses padrões matemáticos.

Embora as caminhadas brownianas ou voos de Lévy sejam ferramentas poderosas para descrever padrões de busca, é importante considerar restrições biológicas e espaciais imposta na natureza. Dessa forma os truncamentos na lei de potência devem emergir, garantindo que o modelo continue realista com as condições do sistema analisado.

Ao variar o valor do expoente μ , as estratégias do movimento também variam, pois a probabilidade de ocorrência de passos longos dentro da trajetória variam. Isso pode representar padrões de movimentação e dispersão de diferentes organismo em diferentes circunstâncias [24].

Estudos sobre padrão de busca indicam, que para alvos revisitáveis, o valor de $\mu \sim 2$ representa um ponto que otimiza a eficiência na busca em ambientes heterogêneos com escassez de recursos, equilibrando exploração global e local. Porém, em regiões com recursos abundantes, os voos de Lévy tornam-se menos eficientes [15, 24].

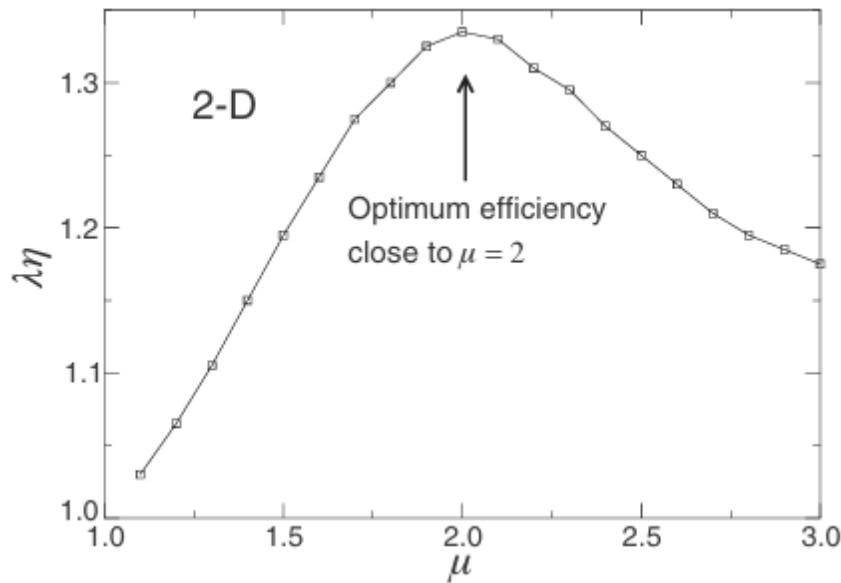


Figura 2.5: Apresenta a eficiência ótima em trajetórias de busca por alvos distribuídos em um plano, mostrando a relação entre o parâmetro μ e a eficiência $\lambda\eta$, obtidos a partir de simulação computacional. O gráfico indica que a eficiência atinge um máximo próximo a $\mu = 2$, sugerindo um comportamento ideal para certos padrões de forrageamento não destrutivo. Retirado de [15].

Modelos posteriores ampliaram essa análise, considerando alvos em aglomerados, como cardumes de peixes migratórios, colônias de insetos ou árvores frutíferas, bem como recursos com tempos de renovação variáveis, como flores reabastecendo néctar, carniça disponível temporariamente para necrófagos ou poças de água intermitentes em ambientes áridos. Além disso, foram incluídos cenários com recursos camuflados, como presas enterradas sob a areia, insetos miméticos¹ ocultos na vegetação ou frutos que ainda não amadureceram completamente [15].

Em geral, a estratégia associada a $\mu \sim 2$, como mostra a figura 2.5, mostra-se eficiente para equilibrar exploração de novas áreas e retorno a regiões previamente visitadas, maximizando a taxa de encontro com recursos nesses ambientes complexos. No entanto, se os alvos forem difíceis de detectar, a busca intermitente pode ser necessária para otimizar a detecção.

¹Um inseto mimético é aquele que imita a aparência, comportamento ou características de outros organismos ou do ambiente para se proteger de predadores ou capturar presas.

CAPÍTULO 3

Método de análise de dados experimentais

Os animais precisam se movimentar naturalmente para buscar alimento, encontrar parceiros para a reprodução e evitar predadores. No entanto, os padrões de deslocamento variam conforme diversos fatores, incluindo a densidade populacional, mudanças ambientais, interações com outras espécies e a disponibilidade de recursos. Essas variáveis influenciam tanto a trajetória quanto a velocidade dos deslocamentos, moldando estratégias de movimentação dinâmicas e adaptativas [15].

Diante dessa complexidade, os avanços nas metodologias experimentais têm impulsionado o conhecimento sobre o comportamento animal, resultando em um crescente número de publicações científicas. Entre os modelos biológicos utilizados para o estudo do movimento coletivo, destaca-se o peixe Zebra, amplamente empregado em investigações experimentais. Estudos recentes evidenciam a criticalidade auto-organizada em cardumes dessa espécie [27], demonstrando a sensibilidade a pequenas perturbações. Além disso, foi identificada uma transição de fase na polarização dos cardumes, passando de um regime multifractal correlacionado em baixas densidades para um regime monofractal e não correlacionado em altas densidades, o que indica uma mudança significativa na organização do grupo [7].

De forma complementar, investigações sobre o movimento intermitente de gafanhotos-do-deserto revelam que a dinâmica alterna períodos de busca local com fases de realocação, evidenciando um padrão de alternância entre diferentes modos de movimentação [28]. Essa mesma característica é observada em bandos de estorninhos, onde os voos de Lévy superdifusivos descrevem o equilíbrio dinâmico entre coesão e dispersão do grupo, permitindo uma adaptação eficiente ao ambiente [5].

Esses trabalhos mostram a diversidade de estratégias para análise do movimento de animais e fornecem um caminho promissor para a abordagem de análises de dados experimentais. O conjunto de dados experimentais que descrevem a posição dos peixes Zebra, em formação de cardume, e sua respectiva velocidade foram coletados e tratados pelo Laboratório de Sistemas Complexos e Universalidades (*LaSCoU*), na Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE). Utilizando peixes ornamentais, da espécie *Danio rerio*, como modelo de partículas autopropelidas, os experimentos foram conduzidos em um ambiente confinado e sob condições controladas, permitindo uma caracterização detalhada dos comportamentos emergentes nesses sistemas [29]. Dando continuidade a essa abordagem, nesse capítulo, detalhamos o experimento e os métodos utilizados nas análises das trajetórias dos cardumes de peixe Zebra. Descrevemos na seção 3.1 as características do peixe Zebra (*Danio rerio*), enfatizando sua relevância como modelo experimental devido à sua resistência ambiental, comportamento social e similaridade genética com os humanos. Na seção 3.2 detalhamos as abordagens experimentais adotadas para a coleta dos dados das trajetórias dos cardumes de peixe Zebra. Na seção 3.3 descrevemos o método utilizado para a análise da difusão do sistema através do MSD. Por fim, na seção 3.4, apresentamos uma abordagem estatística para segmentar o movimento intermitente em pausas e deslo-

camentos, com base na distribuição de velocidades e no método de Otsu, permitindo a extração do comprimento de passo e a caracterização de padrões compatíveis com voos de Lévy.

3.1 *Danio rerio* (peixe Zebra)

O peixe Zebra (*Danio rerio*), é um peixe ornamental de água doce, nativo dos principais rios da Índia, Bangladesh e Nepal. Essas regiões possuem clima tropical de monções, caracterizado por estações bem definidas de inverno e verão. A espécie ocupa áreas rasas de plantações de arroz, rios, valas e pequenos córregos. Devido à variação ambiental e às características climáticas da região, o peixe Zebra apresenta alta tolerância a flutuações de temperatura e condições da água, com uma faixa térmica que pode variar de 12°C a 39°C, e em pH entre 5,9 a 9,2. Além disso, o peixe Zebra é uma espécie gregária, que forma cardumes compostos por aproximadamente 5 a 20 indivíduos e, quando adulto, atinge 4 a 5 cm de comprimento [30]. Seu corpo exibe uma coloração distinta, com faixas horizontais alternadas em tons claros e escuros, como ilustrado na figura 3.1 [31, 29, 30].

Além disso, os peixes dessa espécie apresentam comportamento tigmotático, caracterizado pela preferência em nadar próximos às bordas do ambiente, como as paredes do aquário. Esse padrão é geralmente interpretado como uma estratégia de defesa contra predadores em ambientes naturais. No entanto, em condições de laboratório, após o período de aclimação, os indivíduos tendem a explorar livremente toda a coluna d'água, incluindo as regiões centrais do tanque, o que facilita a observação dos comportamentos coletivos em experimentos controlados [32].



Figura 3.1: *Danio rerio* adulto com aproximadamente 1 ano e 7 meses de vida. Os peixes utilizados pertencem ao Laboratório de Ecofisiologia e Comportamento Animal (LECA). Retirada de [29].

A manipulação experimental desses peixes é facilitada por características como tamanho corporal reduzido, custo operacional baixo e homologia genética com humanos [33]. Além disso, a possibilidade de cultivar todas as fases do ciclo de vida (embriões, larvas e adultos) em laboratório garante disponibilidade contínua de amostras, essencial para estudos estatísticos reprodutíveis [34, 30, 32].

O peixe Zebra é um organismo ectotérmico, depende exclusivamente do ambiente para regular sua temperatura corporal, o que torna o controle ambiental um fator importante em sua criação. Para garantir seu desenvolvimento e reprodução adequados, recomenda-se manter a temperatura da água entre 22°C e 30°C, aliado a um pH estável na faixa de

7 a 8. Embora classificado como peixe de água doce, a espécie demonstra notável tolerância à salinidade, adaptando-se inclusive a água salobras. Em condições laboratoriais os parâmetros ideais incluem salinidade entre 0.25 e 0.75 ppm, a condutividade elétrica 100 e 200 $\mu\text{S}/\text{cm}$ e concentração mínima de oxigênio dissolvido de 7.8 mg/L [30]. Essas condições, quando rigorosamente controladas, asseguram um ambiente propício à saúde à reprodutibilidade experimental da espécie [31].

De igual modo, a iluminação também desempenha um papel fundamental para a criação do *Danio rerio*. Como essa espécie habita águas rasas com vegetação aquática, ela pode, ao longo do dia, ocupar tanto regiões sombreadas quanto regiões expostas à luz solar. Logo, as condições de iluminação em cativeiro devem reproduzir esse padrão natural, combinando um ciclo de luz de 14 h e escuridão de 10 h [29].

Essa espécie vem ganhando notoriedade no meio científico não apenas pelos fatores previamente citados, mas principalmente pela sua notável similaridade genética com os seres humanos. A alta similaridade genética entre o *Danio rerio* e os seres humanos, estimada em cerca de 70%, confere a essa espécie um papel de destaque como modelo experimental em diversas áreas da ciência. Essa característica permite a utilização do peixe-zebra em estudos relacionados a doenças humanas [35, 36], desenvolvimento embrionário, triagem de fármacos [37] e avaliação toxicológica [38]. Além de possibilitar a observação de processos biológicos em tempo real, sobretudo nas fases iniciais de desenvolvimento, o uso dessa espécie representa uma alternativa ética, de baixo custo e com alta eficiência em relação aos modelos tradicionais baseados em roedores [8].

3.2 Configuração experimental

No trabalho de Neto et. al. [29], foram investigados os efeitos do tamanho de grupos de *Danio rerio* por meio de experimentos com 115 indivíduos adultos (1,5 anos de idade; comprimento médio: 3,0 cm). Os peixes foram distribuídos aleatoriamente em grupos de 2, 3, 5, 8, 10, 13, 15, 18, 20, 25 e 30 indivíduos, mantendo-se uma proporção equilibrada entre machos e fêmeas para controle de vies biológico. Cada tamanho de grupo foi testado cinco vezes, utilizando conjuntos distintos de indivíduos em cada repetição para garantir independência estatística. Essa abordagem, combinada com a randomização de machos e fêmeas, minimizou vies comportamental e permitiu uma análise robusta dos dados.



Figura 3.2: Aquário usado para o transporte dos peixes. Retirado de [29].

Os experimentos foram conduzidos entre março e setembro de 2023, utilizando um tanque circular com 50 cm de diâmetro, contendo uma lâmina d'água de 5 cm de altura. Essa profundidade foi escolhida com o objetivo de restringir o movimento vertical dos

peixes, permitindo assim a coleta de trajetórias essencialmente bidimensionais dos cardumes ao longo do plano horizontal. A temperatura da água foi mantida constante em $24,5^{\circ}\text{C}$ ($\pm 0,5^{\circ}\text{C}$), em condições de ambiente controlado. Tanto os peixes quanto a água utilizada foram fornecidos pelo Laboratório de Ecofisiologia e Comportamento Animal (LECA-UFRPE). Para minimizar o estresse durante o transporte até o *LaSCoU*, os peixes foram transferidos em recipientes com volume e parâmetros físico-químicos idênticos aos do tanque experimental, como mostra a figura 3.2. A observação dos comportamentos ocorreu entre 8:00 e 12:00 (horário local), período selecionado para alinhar-se à fase de maior atividade da espécie [31].



(a)



(b)

Figura 3.3: (a) Recipiente sobre tampo de iluminação de LED difusa (plafon). (b) Suporte para a câmera. Retirado de [29].

O experimento foi realizado em um tanque iluminado por luz LED difusa, cercado por paredes brancas para manter uma iluminação uniforme e minimizar interferências externas, figura 3.3(a). As filmagens foram feitas com uma câmera *Digital Single-Lens Reflex* (DSLR) *full-frame* equipada com uma lente de 50 mm, posicionada 1,46 m acima do tanque, com uma barra fixada na parede para garantir que a câmera ficasse bem estabilizada devido ao peso da lente, como mostra a figura 3.3(b). A câmera capturou imagens em preto e branco com resolução de 1920×1080 pixel e uma taxa de aquisição de 30 quadros por segundo. Antes da gravação, os peixes permaneceram no tanque por 10 minutos para se aclimatarem ao ambiente.

A coleta de dados foi realizada utilizando o *software IdTracker*, figura 3.4, que digitalizou as filmagens e forneceu as coordenadas x e y dos peixes ao longo do tempo, referenciadas ao centro do aquário ($R = 0$). Entretanto, em situações de alta densidade de peixes, o *software* apresentou limitações, como trocas de identidade e perda de trajetórias devido a sobreposições ou aglomerações. Para corrigir essas inconsistências, pode-se aplicar a interpolação linear, permitindo reconstruir trajetórias contínuas e estimar pontos perdidos durante oclusões, minimizando erros associados à troca de identidade [29].

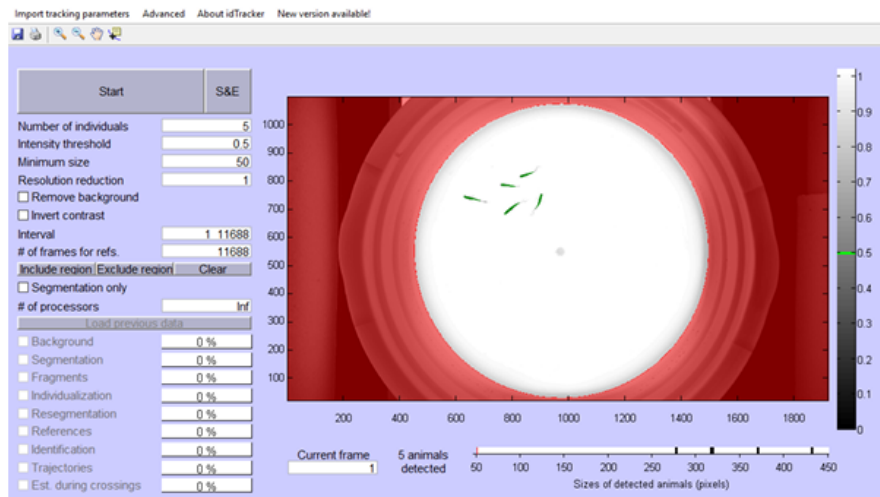


Figura 3.4: Interface do IdTracker, retirado de [29].

Cada experimento consistiu em gravações de 6.5 minutos, após a exclusão dos primeiros e últimos 60 segundos de filmagem, eliminando possíveis ruídos ou interferências transientes no início e término dos testes. Com o objetivo de minimizar os impactos causados pelo experimentos nos peixes, esse trabalho seguiu as normas que asseguram uma boa qualidade de vida durante o processo [32]. Todo o manejo com os animais, para esta pesquisa, foram aprovados pelo Comitê de Ética do Uso de Animais- CEUA/UFRPE, (Protocolo N°1676051021) [29].

3.3 Deslocamento quadrático médio e processos difusivos

A dinâmica de partículas em meios aleatórios pode ser rigorosamente caracterizada por meio da análise do deslocamento quadrático médio (*Mean Squared Displacement – MSD*), uma métrica fundamental na descrição estatística de processos difusivos [9, 10]. Essa abordagem permite quantificar, a partir da média do quadrado da distância percorrida ao longo do tempo, a natureza do regime difusivo, distinguindo entre difusão normal ou anômala [21].

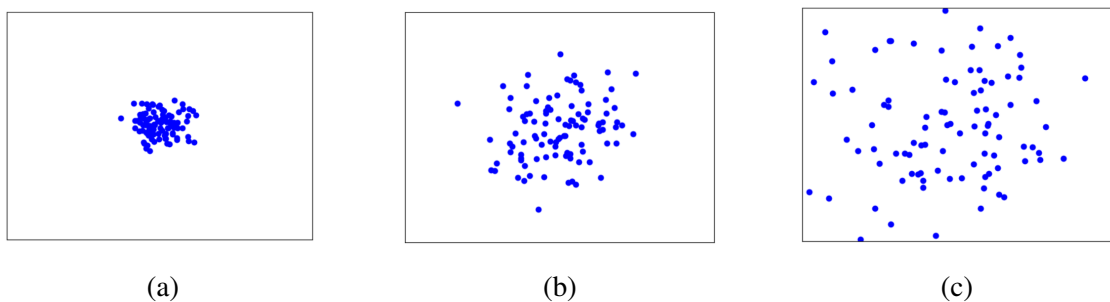


Figura 3.5: Difusão de 100 partículas em um movimento aleatório em duas dimensões. A sequência ilustra a evolução temporal da dinâmica das partículas, mostrando sua dispersão progressiva desde (a), passando por (b), até (c).

O comportamento estocástico das partículas dá origem ao fenômeno da difusão, cuja dispersão evolui ao longo do tempo enquanto o centro de massa permanece estacionário, como mostrado na figura 3.5. Do ponto de vista da física estatística, esse movimento é impulsionado por gradientes de concentração [10], ou seja, as partículas tendem a migrar

de regiões mais densas para menos densas, buscando o equilíbrio. Essa análise não apenas descreve a cinemática coletiva do sistema, mas também fornece elementos para compreender sua estrutura subjacente e possíveis restrições topológicas. Dessa forma, a dispersão dos cardumes pode ser caracterizada por meio do deslocamento quadrático médio, que descreve a evolução da separação entre os indivíduos ao longo do tempo. Esse método, amplamente utilizado para analisar processos difusivos, permite quantificar a dinâmica do sistema e identificar padrões de movimentação coletiva.

Matematicamente, o MSD pode ser definido como [6, 5]

$$\delta r^2(t) = \frac{1}{T-t} \frac{1}{N} \sum_{t_0=0}^{T-t-\delta_0} \sum_{i=1}^N |\mathbf{r}_i(t_0+t) - \mathbf{r}_i(t_0)|^2, \quad (3.1)$$

onde, $\frac{1}{T-t} \sum_{t_0=0}^{T-t-\delta_0}$ representa a média temporal móvel, garantindo que a análise contemple diferentes origens temporais ao longo da trajetória [13]. Aqui T corresponde ao tempo total de observação, t ao intervalo de tempo entre duas medições sucessivas e t_0 ao tempo inicial da janela de observação e $\delta_0 = 1/30$ que é o *frame* do experimento. O segundo somatório, $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N$, refere-se à média sobre todas as partícula no sistema, sendo N o número total de partículas. A variável $\mathbf{r}_i(t) = \mathbf{R}_i(t) - \mathbf{R}_{cm}(t)$ expressa a posição relativa da i -ésima partícula com relação ao centro de massa do sistema, como mostra a figura 3.7(a), definida por

$$\mathbf{R}_i(t) = \mathbf{X}_i(t) + \mathbf{Y}_i(t), \quad (3.2)$$

enquanto a posição do centro de massa do sistema é dada por

$$\mathbf{R}_{cm}(t) = \mathbf{X}_{cm}(t) + \mathbf{Y}_{cm}(t). \quad (3.3)$$

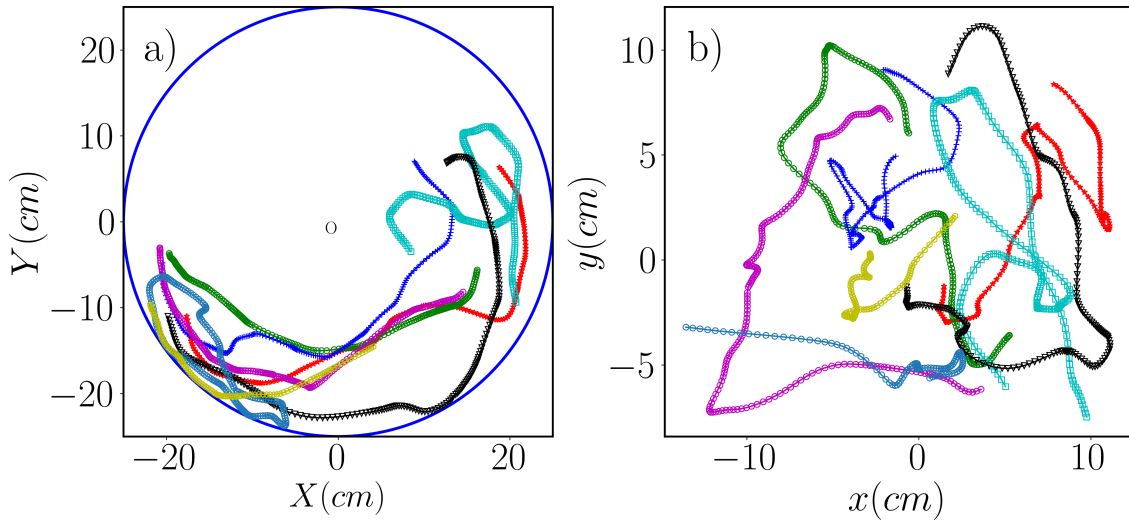


Figura 3.6: Trajetórias obtidas a partir da movimentação de 8 peixes Zebra no cardume, considerando dois referenciais distintos: (a) referencial fixo no aquário identificadas por $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ e (b) referencial centrado no centro de massa do cardume identificadas por $\mathbf{x} = \mathbf{X} - \mathbf{X}_{cm}$ e $\mathbf{y} = \mathbf{Y} - \mathbf{Y}_{cm}$. Adaptado de [6].

A figura 3.6 (a) apresenta as trajetórias obtidas a partir do deslocamento de 8 peixes-zebra pertencentes a um cardume, considerando um referencial fixo no tanque. Nesse sistema, as coordenadas são descritas por $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, com o vetor posição denotado por $\mathbf{R}_i$. Em contraste, a figura 3.6 (b) ilustra o mesmo sistema no mesmo intervalo de tempo,

porém adotando um referencial no centro de massa do cardume, com coordenadas $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ e vetor posição $\mathbf{r}_i(t)$.

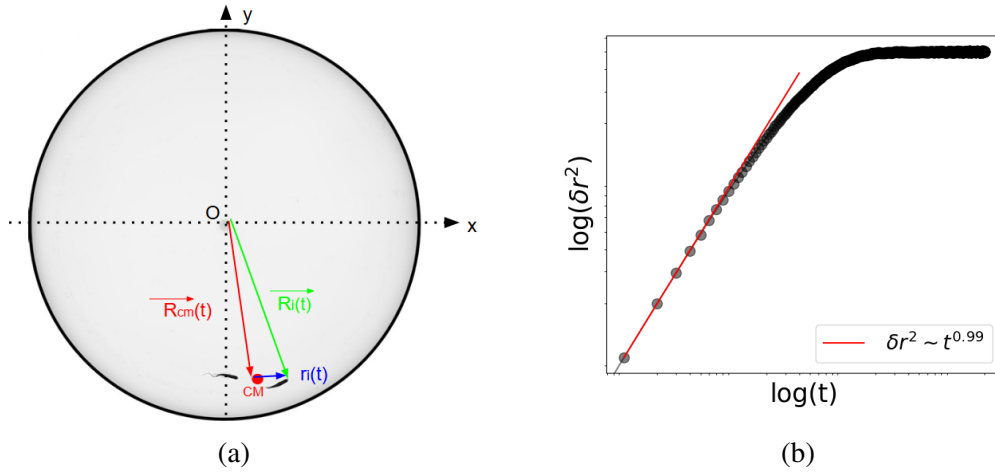


Figura 3.7: (a) Vetores indicando a posição do centro de massa para $N = 2$ peixes e a posição de um dos peixes [29]. (b) Deslocamento quadrático médio de 2000 caminhantes aleatórios confinados em um potencial harmônico com constante $k = 0.01$, após 30.000 passos, para $\gamma \approx 1$.

A partir da expressão (3.1), pode-se descrever, no limite assintótico $t \rightarrow \infty$, um comportamento de lei de potência da forma [22, 6, 20, 21]

$$\delta r^2(t) \sim Dt^\gamma, \quad 0 < \gamma < 2. \quad (3.4)$$

Esse comportamento indica diferentes regimes difusivos, conforme discutido anteriormente na seção 2.4. Para $\gamma = 1$, o sistema apresenta difusão normal, típica de processos brownianos. Quando $\gamma > 1$, ocorre superdifusão, geralmente associada a voos de Lévy ou interações coletivas que promovem deslocamentos mais longos. Por outro lado, para $0 < \gamma < 1$, o sistema exibe subdifusão, caracterizada por restrições no movimento, como aprisionamento em potenciais ou barreiras ambientais.

A transição entre esses regimes difusivos está diretamente relacionada às condições de contorno do sistema. Em meios não confinados, onde as partículas podem se movimentar livremente, o MSD segue uma lei de potência temporal $\delta r^2 \propto t$, indicativo de difusão normal, conforme evidenciado na figura 3.7 (b). Em contraste, sistemas com confinamento espacial, como peixes em um aquário, impõem restrições à dinâmica, levando o MSD a um regime estacionário ($\delta r^2 \approx \text{constante}$) após um tempo crítico, formando um platô característico, como mostra a figura 3.7(b).

Esse comportamento reflete a saturação das escalas de comprimento exploráveis pelas partículas, fenômeno típico de sistemas com geometria limitada. Esse efeito indica que, após certo tempo os indivíduos já exploraram todo o espaço disponível e novos deslocamentos não aumentam significativamente a difusão. Assim, para tempos curtos, teremos informações sobre o regime de difusão em que o sistema se encontra. Já para tempos longos, os caminhantes atingem o equilíbrio dinâmico e o MSD se estabiliza.

3.4 Movimento intermitente: pausa e movimento

O movimento intermitente é uma estratégia de busca que combina regimes de movimento com deslocamento balístico (durante as quais o buscador não detecta alvos) e pausas

(nas quais o buscador explora o ambiente e pode detectar alvos). O comportamento intermitente observado em animais durante o forrageio pode ser modelado estatisticamente através de distribuições de velocidade, as quais caracterizam os diferentes regimes de movimento e pausa [28, 39]. Essa abordagem permite uma descrição quantitativa dos períodos alternados de atividade e repouso, que são cruciais para otimizar a busca por alimentos enquanto minimizam o consumo energético.

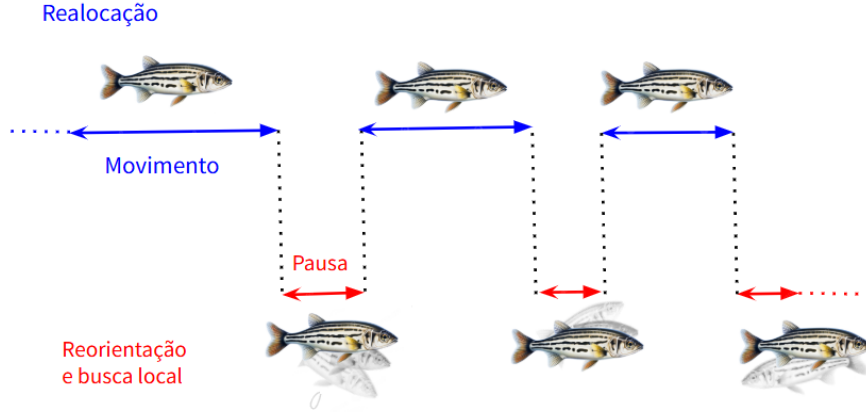


Figura 3.8: Movimento do peixe em 1D para demonstrar o movimento e as pausas na trajetória. Adaptado de [39].

Seja v a velocidade do animal durante o forrageio, e v_L um valor de limiar, (*threshold*), que divide os dois estados de atividade. Assim, podemos definir o movimento como

$$v_j = \begin{cases} \text{Pausa,} & \text{se } v < v_L \\ \text{Movimento,} & \text{se } v \geq v_L \end{cases} \quad (3.5)$$

Se o valor de v estiver abaixo do limiar, o animal está, essencialmente, em repouso ou em movimento muito lento, sendo considerado como estando no regime de pausa, [28]. Quando a velocidade atinge ou ultrapassa v_L , o animal entra no regime de movimento, buscando ativamente por recursos, como ilustra a figura 3.8.

A escolha do valor do limiar v_L pode ser realizada a partir da análise da distribuição das velocidades, especialmente observando aquelas próximas de zero [28]. No entanto, essa escolha pode depender das características do sistema em estudo e do tempo de experimentação adotado. Portanto, a definição adequada do valor é uma etapa crítica na análise dos padrões de movimento intermitente. Embora, em alguns casos, a distribuição de velocidades apresente uma separação clara, em outros, essa distinção pode não ser evidente. Nessas situações, a escolha do limiar torna-se menos intuitiva e requer critérios estatísticos robustos.

3.4.1 Seleção automática de limiares em velocidades via método de Otsu adaptado

Para determinar automaticamente o limiar v_L entre pausas e movimentos, adaptamos o método de Otsu, originalmente desenvolvido para segmentação de imagens, como mostra a figura 3.9, à análise estatística das distribuições de velocidade. Enquanto seu uso clássico visa encontrar um limiar ótimo que separe regiões com diferentes intensidades em imagens

[40, 41], aqui o método é empregado para distinguir dois regimes dinâmicos característicos do movimento intermitente, ou seja, pausa e movimento ativo.

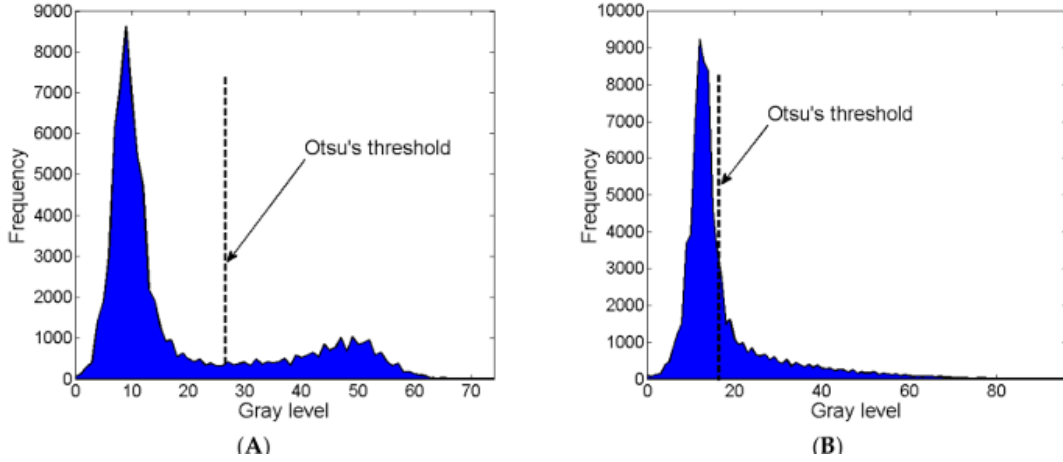


Figura 3.9: Local de amostragem na seleção do limiar de Otsu para (A) histograma com vale e (B) histograma com único pico. Retirado de [40].

A ideia central consiste em particionar o histograma das velocidades em duas classes bem definidas: C_0 (pausa) e C_1 (movimento) [42]. Para isso, consideramos o histograma do módulo da velocidade v de um peixe ao longo do tempo, com $v \in (0, v_M)$. Nesse histograma, denotamos por n_j o número de ocorrências em que a velocidade do peixe assume o valor v_j .

Com o objetivo de realizar uma análise probabilística, o histograma é normalizado e interpretado como uma distribuição de probabilidade discreta [41]. Assim, a cada valor v_j é associada uma probabilidade p_j , calculada com base na frequência relativa desse valor dentro do conjunto total de medições. Nesse contexto, $N = n_1 + n_2 + \dots + n_M$ representa o número total de medições, onde n_j corresponde à frequência absoluta de cada bin. Dessa forma, as classes $C_0 = [v_0, \dots, v_L]$ e $C_1 = [v_{L+1}, \dots, v_M]$, definidas em função do limiar v_L , são caracterizadas por uma fração de ocorrência (probabilidade) e um valor médio de velocidade. Isso permite uma descrição estatística mais rigorosa dos dois estados de movimento identificados. O histograma da velocidade, após a normalização, é então considerado uma distribuição de probabilidade:

$$p_j = \frac{n_j}{N}, \quad p_j > 0, \quad \sum_{j=0}^M p_j = 1. \quad (3.6)$$

Dado um conjunto de velocidades v_j associadas a probabilidades normalizadas p_j , representando a distribuição discreta de probabilidades do sistema, podemos definir as probabilidades cumulativas em torno do limiar v_L como:

$$w_0 = P(C_0) = \sum_{j=0}^L p_j = w(v_L), \quad (3.7)$$

e

$$w_1 = P(C_1) = \sum_{j=L+1}^M p_j = 1 - w(v_L), \quad (3.8)$$

onde w_0 é a probabilidade cumulativa até o estado v_L . Essa quantidade representa a fração estatística da classe C_0 , com velocidades v_j menores ou iguais a v_L , e w_1 a probabilidade

cumulativa complementar, representando a fração da classe C_1 com velocidades superiores a v_L .

As velocidades médias de cada classe são dadas, por:

$$\bar{v}_0 = \frac{\sum_{j=0}^L v_j p_j}{w_0} = \frac{\bar{v}(L)}{w(v_L)} \quad (3.9)$$

e

$$\bar{v}_1 = \frac{\sum_{j=L+1}^M v_j p_j}{w_1} = \frac{(\bar{v}_T - \bar{v}(L))}{(1 - w(v_L))}, \quad (3.10)$$

onde

$$\bar{v}(L) = \sum_{j=0}^L v_j p_j \quad (3.11)$$

é o momento cumulativo de primeira ordem do histograma até o limiar v_L , respectivamente, e

$$\bar{v}_T = \sum_{j=0}^M v_j p_j \quad (3.12)$$

é a velocidade média total do peixe. Podemos facilmente verificar se a seguinte relação de consistência, para qualquer escolha de L , a média ponderada é mantida:

$$w_0 \bar{v}_0 + w_1 \bar{v}_1 = \bar{v}_T. \quad (3.13)$$

As variâncias das classes são dadas por

$$\sigma_0^2 = \sum_{j=0}^L (v_j - \bar{v}_0)^2 Pr(j|C_0) = \sum_{j=0}^L (v_j - \bar{v}_0)^2 \frac{p_j}{w_0} \quad (3.14)$$

e

$$\sigma_1^2 = \sum_{j=L+1}^M (v_j - \bar{v}_1)^2 Pr(j|C_1) = \sum_{j=L+1}^M (v_j - \bar{v}_1)^2 \frac{p_j}{w_1}. \quad (3.15)$$

Essas expressões requerem os momentos cumulativos de segunda ordem. Para avaliar o limiar, introduzimos as seguintes medidas de separabilidade de classes, usadas na análise discriminante [43]:

A variância intra-classes é

$$\sigma_W^2 = w_0 \sigma_0^2 + w_1 \sigma_1^2. \quad (3.16)$$

A variância entre classes é

$$\begin{aligned} \sigma_B^2 &= w_0 (\bar{v}_0 - \bar{v}_T)^2 + w_1 (\bar{v}_1 - \bar{v}_T)^2 \\ &= w_0 w_1 (\bar{v}_1 - \bar{v}_0)^2. \end{aligned} \quad (3.17)$$

A variância total é

$$\sigma_T^2 = \sum_{j=0}^M (v_j - \bar{v}_T)^2 p_j, \quad (3.18)$$

onde

$$\sigma_T^2 = \sigma_W^2 + \sigma_B^2. \quad (3.19)$$

O método de Otsu [44], determina o limiar ótimo v_L maximizando a variância entre classes (σ_B^2), ou, de modo equivalente, minimizando a variância intra-classes (σ_W^2), pois a variância total permanece constante para qualquer particionamento

$$L^* = v_L = \arg \left\{ \max_{0 \leq t^* \leq M} \{ \sigma_B^2 \} \right\}. \quad (3.20)$$

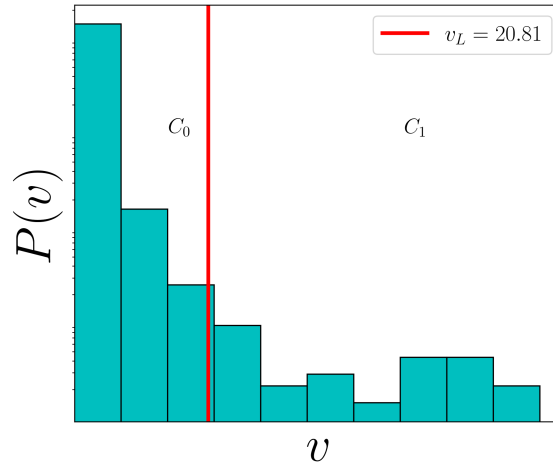


Figura 3.10: Distribuição de velocidade de um caminhante em uma caminhada aleatória com 10.000 passos. A linha vermelha representa o limiar ótimo v_L , que maximiza a variância entre classes.

Este método, embora concebido originalmente para segmentação binária no contexto da análise de imagens [41, 44], insere-se no domínio mais amplo dos métodos estatísticos de otimização de limiares. Por sua natureza essencialmente estatística sua aplicação à distribuição de velocidades, como ilustrado na figura 3.10, é não apenas válida, mas conceitualmente correto dentro do contexto da análise de distribuições unidimensionais.

3.4.2 Comprimento de passo e identificação de pausas na trajetória

O comprimento de passo, que é a distância entre duas pausas consecutivas no movimento de um indivíduo, é uma medida essencial para entender padrões de movimentação intermitente. Em modelos clássicos, como as caminhadas aleatórias ou os modelos de busca por alimento, é comum assumir que esses passos são escolhidos de forma independente, sempre seguindo a mesma regra de probabilidade $P(\ell)$. Isso quer dizer que cada deslocamento acontece sem depender do anterior e segue a mesma lógica estatística, o que permite aplicar ferramentas da física para estudar como os indivíduos se movimentam, se espalham ou procuram algo no ambiente.

Na prática, os valores de ℓ são obtidos analisando a trajetória e usando um limite de velocidade para separar os momentos de pausa dos momentos de movimento. Com isso, é possível montar a distribuição dos comprimentos de passo observados. Em muitos casos da natureza, essa distribuição segue uma lei de potência, do tipo $P(\ell) \propto \ell^{-\mu}$, o que significa que passos curtos são mais frequentes, mas passos longos também acontecem com certa regularidade. Esse comportamento está relacionado a estratégias eficientes de busca em ambientes complexos e à presença de movimentos característicos dos voos de Lévy [15].

Para identificar os pontos de pausa na trajetória, considera-se que o deslocamento do peixe em um instante t é dado por $\mathbf{r}_i(t)$ [6]. Assim definimos um limiar de deslocamento d_L , que depende do intervalo Δt e do limiar de velocidade v_L :

$$d_L = v_L \delta_0, \quad (3.21)$$

onde v_L é a velocidade limiar considerada ótima para segmentar a distribuição de probabilidade do módulo da velocidade e $\delta_0 = 1/30$ é o intervalo de tempo do experimento. Se a distância percorrida entre dois instantes sucessivos, dada por $|\mathbf{r}_i(t + \Delta t) - \mathbf{r}_i(t)|$, for maior que d_L , considera-se que o indivíduo está em movimento. Caso contrário, o ponto $\mathbf{r}_i(t)$ é classificado como um ponto de pausa, indicando que o indivíduo permaneceu praticamente imóvel durante esse intervalo, como ilustra a figura 3.11.

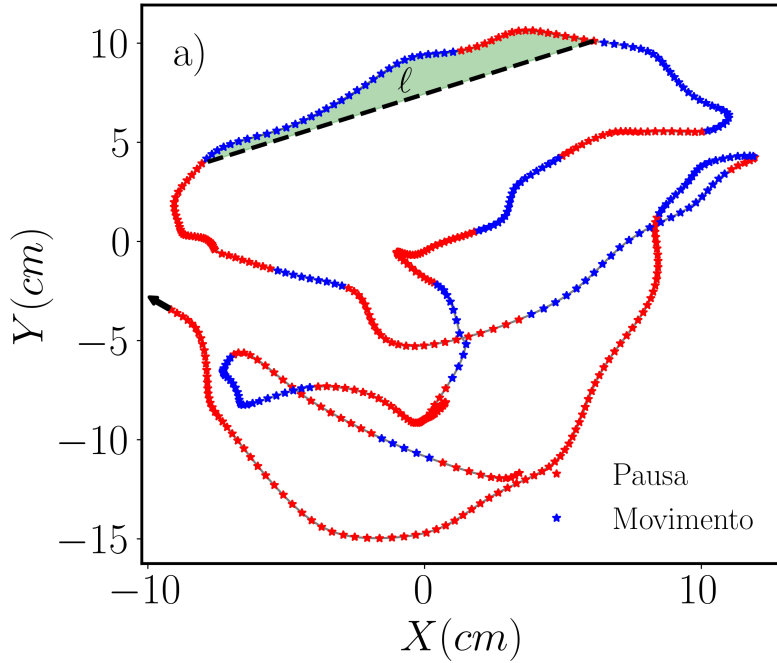


Figura 3.11: Trajetória bidimensional de um único peixe dentro de um cardume contendo 10 indivíduos ao longo do tempo. O comprimento de passo, representado por ℓ , é definido como a distância entre dois pontos de pausa sucessivos. Para sua determinação, o algoritmo integra os segmentos da trajetória compreendidos entre os momentos classificados como pausa, conforme exemplificado, na qual ℓ é destacado por uma linha tracejada conectando dois eventos consecutivos de pausa. A seta preta indica os sentido da passagem do tempo.

A partir da figura 3.11, é possível observar a alternância entre grupos de pontos que representam períodos de movimento e grupos de pontos associados a períodos de pausa. O comprimento do passo (ℓ) é definido como a distância entre o primeiro ponto do grupo de pausa e o último ponto do grupo de movimento subsequente.

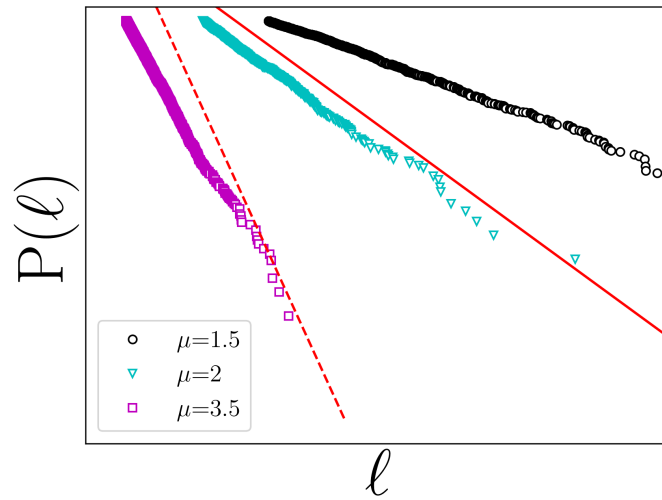


Figura 3.12: Simulação da distribuição acumulada do comprimento do passo de uma caminhada aleatória com 10.000 passos, ilustrando que os valores seguem uma lei de potência. Os resultados são mostrados para diferentes valores do parâmetro μ : $\mu = 1.5$ e $\mu = 2$, que correspondem ao regime de voos de Lévy, e $\mu = 3.5$, associado ao movimento browniano. O ajuste da curva vermelha é apresentado para $\mu = 1$ (linha contínua) e $\mu = 3$ (linha tracejada), evidenciando o comportamento assintótico esperado para esses regimes.

A distribuição do comprimento do passo pode apresentar comportamentos distintos, variando desde processos difusivos convencionais, caracterizados por distribuições exponenciais, até dinâmicas anômalas, nas quais emergem caudas pesadas que podem ser ajustadas por uma lei de potência, como ilustrado na figura 3.12.

CAPÍTULO 4

Resultados e Análises

Neste capítulo, apresentamos as análises dos dados experimentais coletados pelo LaS-CoU para diferentes grupos de *Danio rerio* [29]. As trajetórias dos indivíduos foram registradas inicialmente em relação ao referencial fixo no centro do aquário. No entanto, caracterizamos a dinâmica coletiva, considerando o referencial no centro de massa do cardume, conforme ilustrado na figura 3.7 (a). Essa mudança de referencial proporciona uma melhor compreensão das interações internas e de como os peixes se movimentam em resposta ao ruído presente no sistema.

A fim de investigar os processos de difusão no interior do grupo, realizamos a análise do deslocamento quadrático médio (MSD), com o objetivo de caracterizar a natureza dos regimes difusivos presentes nas trajetórias coletivas. Além disso, conduzimos uma análise detalhada dos comprimentos de passo, por meio de técnicas que permitem identificar o movimento intermitente e obter a distribuição de probabilidade dos comprimentos de passo. Essa análise permite estabelecer uma relação entre o comportamento superdifusivo observado e os expoentes de lei de potência, com foco em como essas características variam com a densidade do cardume, revelando adaptações coletivas a medida que o número de peixes aumenta.

Para garantir a precisão e a validade dos resultados, comparamos nossas análises com estudos relevantes na literatura [6, 5], estabelecendo uma relação entre os padrões de movimentação observados e os resultados previamente reportados. Todas as análises foram realizadas com base no módulo das posições, considerando as variações do centro de massa ao longo do tempo. Na seção 4.1, caracterizamos os regimes de difusão a partir dos expoentes obtidos nas curvas de deslocamento quadrático médio. Em seguida, na seção 4.2, determinamos o limiar ótimo para a segmentação dos estados de pausa e movimento em cada cardume analisado. Na seção 4.3, apresentamos os valores do expoente μ , que validam os resultados obtidos na seção 4.1, reforçando a consistência metodológica. Por fim, na seção 4.4, investigamos a presença de correlação de longo alcance na distribuição do ruído existente nos passos, por meio da análise da distribuição q -Gaussiana.

4.1 Regimes difusivos a partir do deslocamento quadrático médio

A análise do deslocamento quadrático médio $\langle r^2(t) \rangle$ quantifica a taxa de dispersão dos indivíduos ao longo do tempo, sendo fundamental para identificar a natureza da difusão. Dependendo do valor do expoente γ representado pela função 3.4, pode-se classificar o regime como normal ($\gamma = 1$), superdifusivo ($\gamma > 1$) ou subdifusivo ($\gamma < 1$) [45].

Os resultados indicam que, $N < 15$, observa-se um regime superdifusivo com expoentes γ próximos de 2. Tal comportamento sugere a ocorrência de grandes deslocamentos ocasionais, típicos de processos modelados por voos de Lévy. Com o aumento do número de peixes, observa-se uma redução contínua dos valores de γ , convergindo em direção a $\gamma \rightarrow 1$ em grupos maiores, o que indica uma convergência para a difusão normal de tipo browniano.

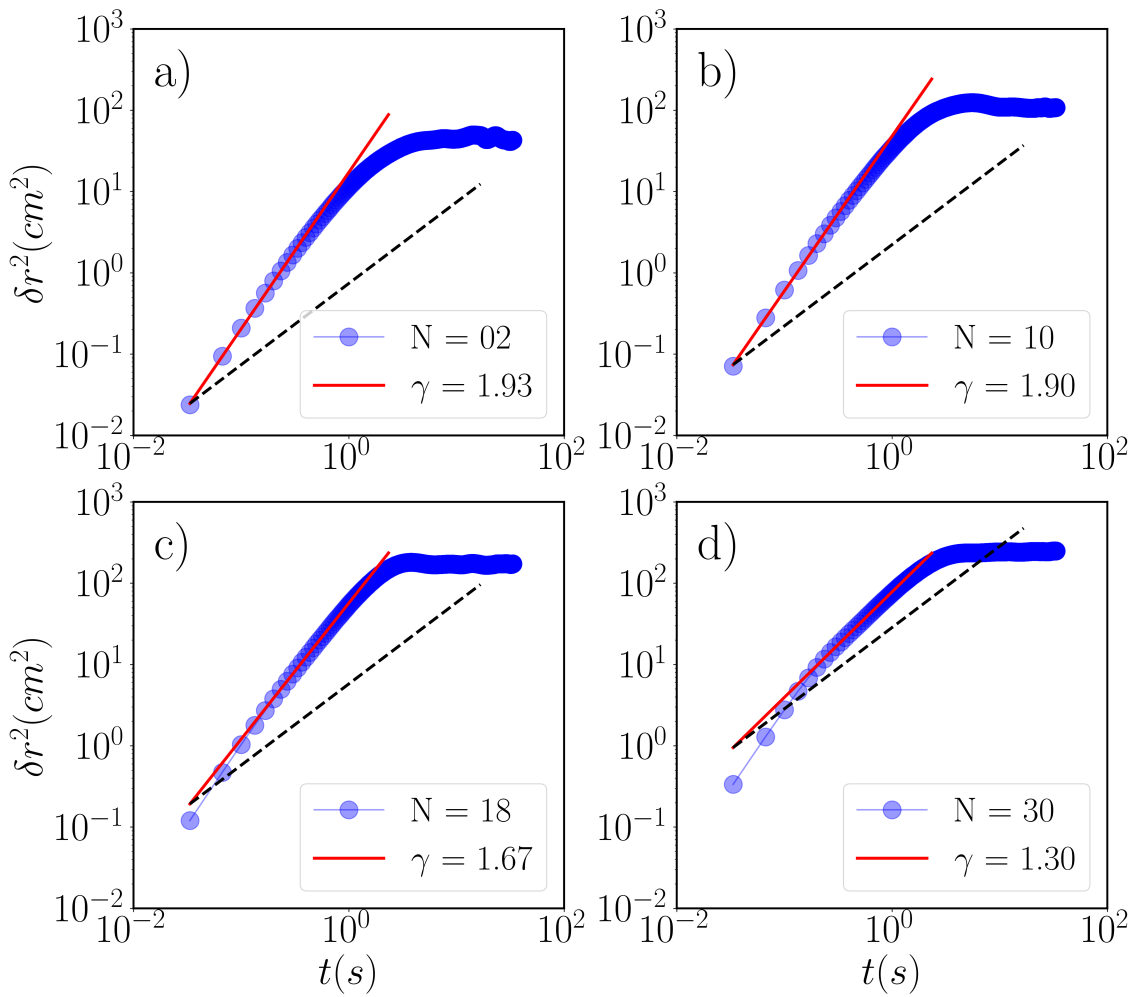


Figura 4.1: Deslocamento quadrático médio em função do tempo para cardumes com diferentes tamanhos populacionais. Valores referentes a 1 realização experimental. A linha tracejada é um ajuste teórico para $\gamma = 1$.

A tendência observada nas curvas da figura 4.1 é reforçada quantitativamente pela figura 4.2, que mostra a variação do expoente médio $\bar{\gamma}$ (painel a) e da constante de difusão média $\bar{D}$ (painel b) em função do número de peixes. Os valores foram obtidos a partir dos ajustes da função 3.4, com critérios de melhor ajuste pelo R^2 e o χ^2 , para cada grupo. Nota-se que o expoente médio decresce com o aumento da densidade, refletindo um tendência

de um regime superdifusivo para difusão normal. Por sua vez, a constante $\bar{D}$ também apresenta variação, mas seu comportamento está diretamente associado à mudança no valor de $\bar{\gamma}$, e não necessariamente a um aumento absoluto na difusão. Isso indica que D não deve ser interpretado como uma constante universal com unidade fixa, mas sim como um coeficiente generalizado de difusão anômala, cuja dimensão física $[D] = L^2/T^\gamma$ varia de acordo com o regime dinâmico descrito por γ .

A figura 4.2 (a) apresenta a variação do expoente γ em função da densidade no tanque. A densidade de indivíduos, definida como $\rho = N/A$, sendo $A = \pi(25\text{ cm})^2$ a área do tanque. Essa abordagem permite a comparação direta com estudos anteriores [27, 7] e possibilita generalizar os resultados para sistemas com diferentes tamanhos de tanque e de cardumes. Para densidades inferiores ao ponto crítico $\rho_c \approx 75\text{ m}^{-2}$, observa-se um regime superdifusivo, caracterizado por expoentes γ próximos de 2. Esse comportamento está associado à presença de correlações de longo alcance entre os indivíduos, associadas a uma dinâmica multifractal. À medida que a densidade ultrapassa esse limiar ($\rho > \rho_c$), o valor de γ diminui progressivamente com o aumento de ρ , embora permaneça acima de 1, indicando que o regime superdifusivo persiste.

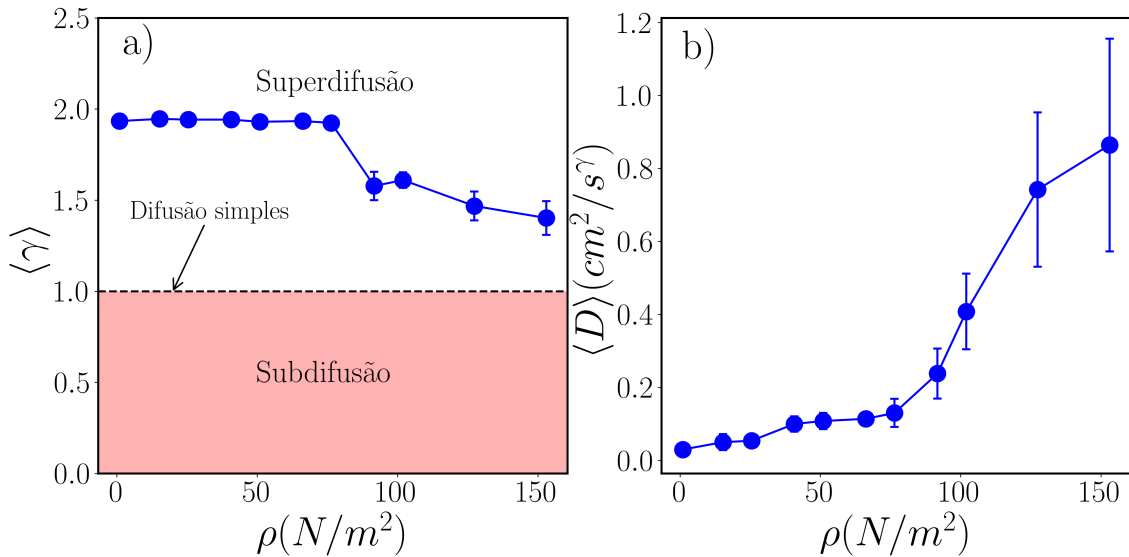


Figura 4.2: a) Variação do expoente médio $\bar{\gamma}$ em função da densidade ρ , indicando uma transição gradual no regime de difusão. A linha tracejada representa os valores de $\gamma = 1$ e na região sombreada com a cor vermelha representa $\gamma < 1$ (subdifusão). b) Comportamento da constante de difusão média $\bar{D}$. As barras de erro representam o desvio padrão das médias de 5 realizações experimentais.

O declínio da curva $\bar{\gamma} \times \rho$ pode ser interpretado como um enfraquecimento na correlação de longo alcance entre os indivíduos do cardume, especialmente em densidades superiores ao limiar ρ_c . Esse enfraquecimento está associado à fragmentação do grupo em diferentes domínios espaciais — regiões nas quais os peixes mantêm interações fortes localmente, mas reduzem sua influência sobre indivíduos mais distantes. Quando o cardume está coeso, todos os indivíduos permanecem conectados, direta ou indiretamente, por meio de interações locais como alinhamento, coesão e repulsão, o que gera uma forte correlação: o movimento de um peixe pode influenciar os demais, mesmo a longas distâncias, por meio de suas interações ao longo do tempo. No entanto, à medida que o grupo se fragmenta nesses domínios, essa rede contínua de influências se rompe. As interações entre indivíduos de domínios distintos tornam-se mais fracas, dificultando a propagação de informações comportamentais ao longo do grupo. Como consequência, a correlação

entre indivíduos distantes enfraquece [7].

Os valores de $\bar{\gamma}$ também estão destacados na tabela 4.1, onde se observa claramente que os expoentes γ mantêm-se acima de 1 para todos os tamanhos de grupo analisados, o que confirma a persistência do regime superdifusivo. A transição entre diferentes regimes de difusão, evidenciada pela redução gradual de γ , ocorre de forma progressiva à medida que o número de indivíduos aumenta.

N	ρ	$\langle\gamma\rangle$	$\langle D\rangle$
2	1.02	1.93 ± 0.01	0.03 ± 0.01
3	15.3	1.95 ± 0.01	0.05 ± 0.02
5	25.5	1.94 ± 0.02	0.05 ± 0.01
8	40.76	1.94 ± 0.01	0.1 ± 0.02
10	51	1.93 ± 0.02	0.11 ± 0.02
13	66.24	1.93 ± 0.01	0.1 ± 0.01
15	76.4	1.92 ± 0.02	0.13 ± 0.04
18	91.72	1.58 ± 0.08	0.24 ± 0.07
20	102	1.61 ± 0.04	0.41 ± 0.01
25	127.4	1.46 ± 0.08	0.74 ± 0.21
30	153	1.40 ± 0.1	0.86 ± 0.3

Tabela 4.1: Médias dos expoentes de difusão anômala $\langle\gamma\rangle$ e das constantes de difusão $\langle D\rangle$ para diferentes escalas populacionais de peixes. Os erros indicam o desvio padrão das médias de 5 realizações experimentais.

O comportamento observado na transição dos expoentes da figura 4.2 sugere, também, uma reorganização das interações internas dentro do cardume, especialmente em densidades mais elevadas. Os resultados obtidos são coerentes com estudos anteriores [29], nos quais foram identificadas mudanças estruturais no comportamento coletivo de peixes sob diferentes condições de densidade. Esses resultados alinham-se com a mudança de regime entre comportamentos de cardume (*schooling*), no qual os peixes se deslocam de forma coordenada e polarizada, mantendo alinhamento direcional, e agrupamentos menos organizados, nos quais os indivíduos permanecem próximos por razões sociais, mas sem uma direção comum de movimento (*shoaling*) [46, 47].

4.2 Segmentação dos estados de pausa e movimento com o método de Otsu

Para aprofundar a análise da intermitência no movimento, foi implementado um critério estatístico de segmentação baseado na distribuição de velocidades. O método de Otsu, originalmente desenvolvido para segmentação de imagens, foi adaptado para definir um limiar ótimo de velocidade v_L , que separa, de forma objetiva, os estados de pausa e movimento, maximizando a variância interclasses.

Considerando que os indivíduos de um mesmo cardume exibem distribuições de velocidade similares ao longo do tempo, reflexo do comportamento coletivo, o limiar de velocidade estimado a partir de um único peixe pode ser considerado representativo da dinâmica do grupo. Consequentemente, o limiar de deslocamento derivado dessa medida é adotado como um parâmetro válido para caracterizar os estados de movimento e pausa do cardume como um todo.

A figura 4.3 (a) ilustra a segmentação dos estados de pausa e movimento por meio do método de Otsu. Como o objetivo é determinar o comprimento do passo, adotamos como referência o limiar de deslocamento obtido pela equação 3.21. Em contraste, as figuras 4.3 (b) e 4.3 (c) apresentam segmentações baseadas em limiares de deslocamento fixos, definidos arbitrariamente como $d_L = 0,5$ cm e $d_L = 0,3$ cm, respectivamente, apenas para fins comparativos. Assim, observa-se que, mesmo considerando diferentes métodos de definição de limiar, como o de Otsu, os episódios de pausa tendem a ser mais frequentes e duradouros em comparação aos episódios de movimento.

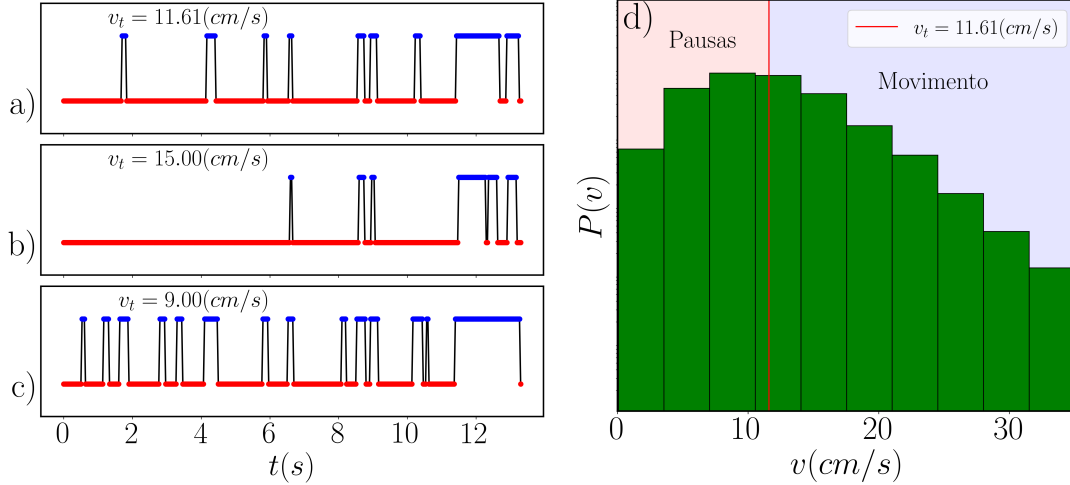


Figura 4.3: Os painéis (a), (b) e (c) mostram exemplos de cluster de pausa e movimento para diferentes escolhas de limiares, com os segmentos coloridos indicando pausas (vermelho) e movimentos (azul). No painel (d), é apresentada a distribuição de velocidades $P(v)$ para 1 peixe dentro do cardume com 10 peixes. A linha vertical marca o limiar de velocidade v_L

Esse comportamento é consistente com as restrições físicas impostas pelo ambiente experimental: o confinamento do cardume em um aquário de dimensões finitas impõe um limite superior ao deslocamento espacial dos indivíduos. Em outras palavras, a impossibilidade de realizar movimentos amplos, devido ao diâmetro limitado do aquário, favorece dinâmicas dominadas por curtas explorações intercaladas por períodos mais longos de imobilidade.

N	2	3	5	8	10	13	15	18	20	25	30
ρ	1.02	15.3	25.5	40.76	51	66.24	76.4	91.72	102	127.4	153
1	0.356	0.313	0.286	0.300	0.427	0.405	0.328	0.303	0.509	1.92	1.73
2	0.324	0.516	0.359	0.316	0.358	0.416	0.449	0.480	0.394	1.26	1.49
3	0.324	0.300	0.300	0.467	0.365	0.371	0.544	0.367	0.357	1.14	1.49
4	0.407	0.300	0.300	0.482	0.367	0.571	0.335	0.334	0.519	0.364	2.08
5	0.384	0.300	0.300	0.446	0.385	0.339	0.388	0.360	0.406	2.08	1.52

Tabela 4.2: Valores de limiar d_L (cm), obtidos para diferentes tamanhos de cardume, considerando cinco realizações independentes para cada quantidade de peixes.

Observou-se que, à medida que o número de peixes no cardume aumenta, como mostra a tabela 4.2, os episódios de pausa tornam-se mais frequentes e prolongados, enquanto os movimentos ativos diminuem. Essa mudança no padrão de comportamento coletivo está associada ao aumento da densidade no ambiente experimental, que pode restringir os

deslocamentos individuais e favorecer estados de inatividade, possivelmente como uma estratégia de organização ou autopreservação do grupo.

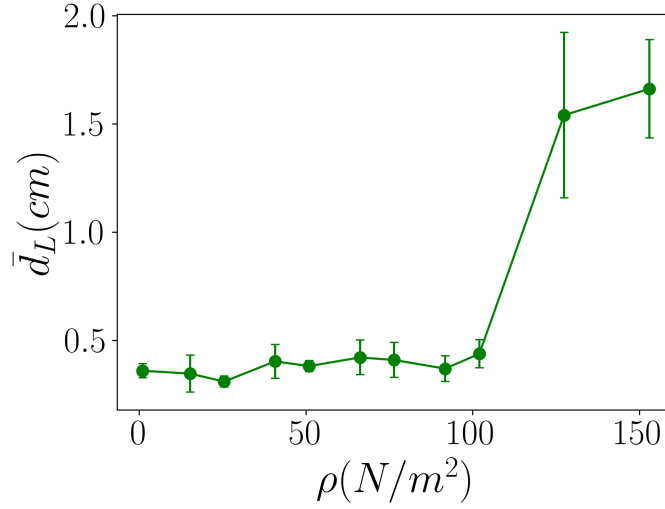


Figura 4.4: Variação do valor médio do limiar d_L (em cm) em função do número de peixes N no cardume. Cada ponto representa a média de cinco realizações independentes, e as barras de erro indicam o desvio padrão.

O aumento do limiar d_L , observado na figura 4.4 reflete essa dinâmica: com menor predominância de movimentos e maior ocorrência de pausas, o que eleva o valor necessário para separar os dois regimes.

4.3 Distribuição de comprimentos de passos e o expoente μ

A análise da distribuição dos comprimentos de passo, $P(\ell)$, oferece uma abordagem estatística complementar à avaliação do deslocamento quadrático médio (MSD). Essa distribuição permite investigar a frequência dos comprimentos de passo relativos aos deslocamentos em relação ao centro de massa, realizados pelos peixes ao longo do tempo, fornecendo informações relevantes e detalhadas sobre os regimes de reorganização interna dos cardumes.

Quando $P(\ell)$ apresenta um decaimento em lei de potência, do tipo $P(\ell) \sim \ell^{-\mu}$, o expoente μ torna-se um parâmetro fundamental para a caracterização do movimento. Valores de μ na faixa $1 < \mu \leq 3$ são indicativos de voos de Lévy, refletindo uma dinâmica superdifusiva. Por outro lado, quando $\mu > 3$, o movimento tende a se comportar como uma partícula browniana, com difusão normal.

Os valores de ℓ utilizados nos ajustes seguem uma distribuição de lei de potência truncada, iniciando a partir de um valor mínimo $\ell_{\min}$, que define o limiar acima do qual a cauda da distribuição passa a ser analisada. Para determinar esse ponto de corte, foi empregada a estatística de Kolmogorov-Smirnov (KS) [48], que mede a maior discrepância absoluta entre a distribuição acumulada dos dados experimentais e o ajuste teórico. O valor de $\ell_{\min}$ é, portanto, escolhido como aquele que minimiza a estatística KS, garantindo que o melhor ajuste do comportamento da cauda da distribuição observada. A figura 4.5 exhibe as distribuições de probabilidade dos comprimentos de passo $|\ell|$, considerando apenas os valores acima de um limiar $\ell_{\min}$, caracterizada pelo expoente μ , para cinco cardumes de peixes.

Em todos os casos, o movimento dos peixes não segue uma distribuição puramente exponencial nem uma lei de potência pura. Em vez disso, o que ocorre é um voo de Lévy truncado, com um limite máximo imposto pelo ambiente. Assim o melhor ajuste para a curva da distribuição é [49]:

$$P(\ell) \sim \ell^{-\mu} e^{-\lambda \ell}. \quad (4.1)$$

Devido a limitação imposta pelo tamanho do aquário, os peixes não conseguem nadar indefinidamente para longe. Esse limite é representado pelo fator exponencial (λ), que reduz a ocorrência de deslocamentos muito grandes. Ou seja, mesmo que um peixe pudesse fazer um trajeto longo, ele acaba sendo restringido pelas bordas do aquário

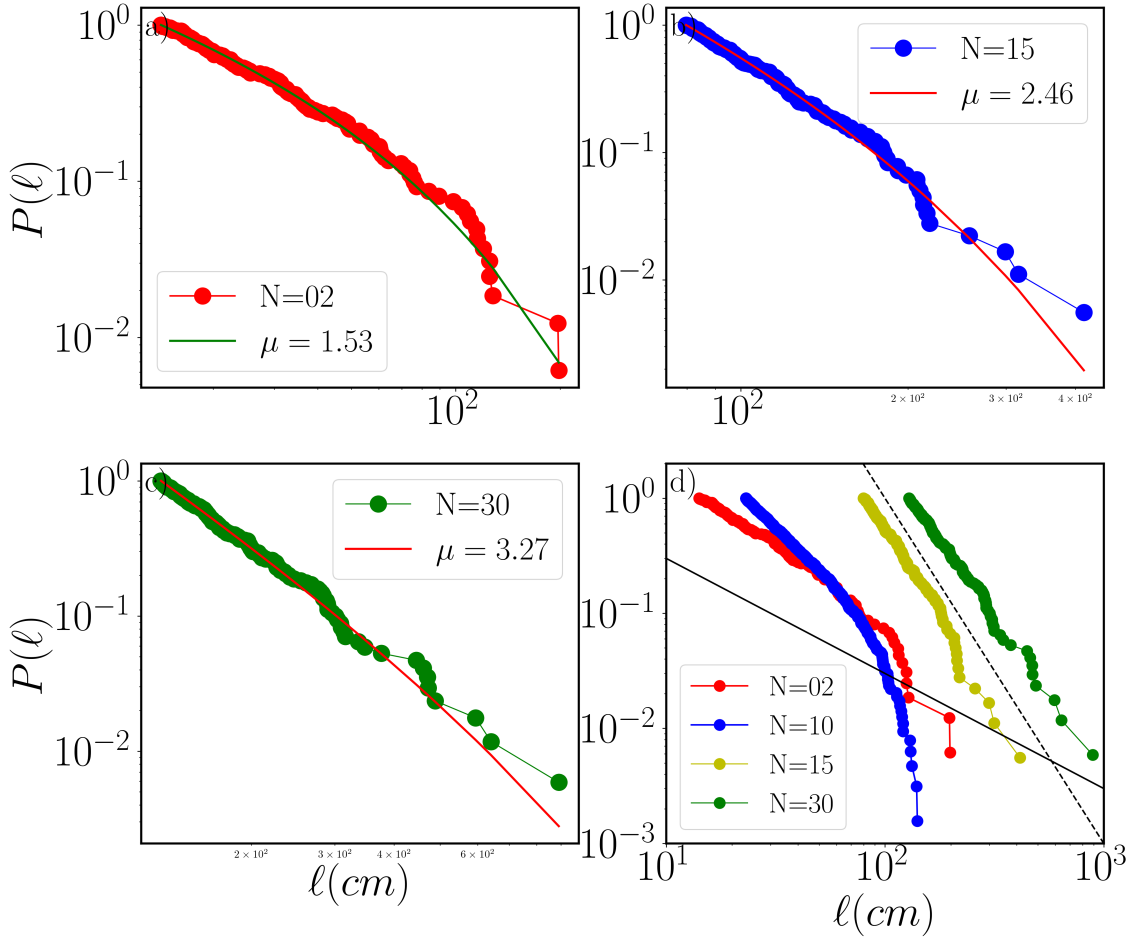


Figura 4.5: Distribuições de probabilidade dos módulos dos deslocamentos $|\ell| \geq \ell_{min}$ para diferentes números de peixes N . Os gráficos (a)-(c) mostram os ajustes de lei de potência truncada para $N = 2, 15$ e 30 , respectivamente, indicando o valor estimado do expoente μ em cada caso. Em (d), as distribuições colapsadas evidenciam o aumento sistemático do expoente μ com N . As linhas guias em (d) representam leis de potência com diferentes expoentes para comparação teórica para $\mu = 1$ (linha contínua) e $\mu = 3$ (linha pontilhada).

No entanto, neste trabalho, focamos na análise do expoente μ ao caracterizar a natureza estatística dos deslocamentos e indicar possíveis desvios em relação ao regime browniano. Na figura 4.6, apresentamos os expoentes μ obtidos para todos os grupos de peixes.

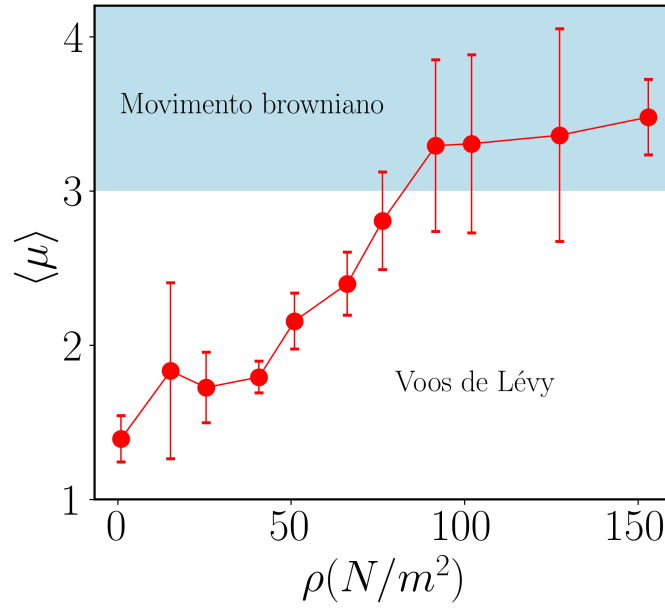


Figura 4.6: Evolução do expoente de cauda $\langle \mu \rangle$ da distribuição de passos em função da densidade ρ . A região sombreada representa a faixa limite ao movimento browniano. As barras de erro indicam o erro em torno de $\langle \mu \rangle$.

À medida que o número de peixes aumenta, há uma transição notável no perfil estatístico de μ , cujo valores estão sintetizados na tabela 4.3. Para $\rho < \rho_c$, o expoente μ varia entre 1 e 3, mostrando que, dentro do cardume, a trajetória dos peixes é descrita como voo de Lévy. Já para $\rho > \rho_c$, encontramos o valor de $\mu > 3$, indicando que, para altas densidades, o movimento dos peixes assemelha-se àquele executado pelos caminhantes brownianos. Esse resultado reforça a análise anterior do MSD, mostrando que há uma transição entre os regimes de difusão e tipo de movimento conforme a densidade aumenta. Tal transição reflete uma reorganização coletiva: com maior densidade, os peixes passam a restringir seus movimentos, adotando trajetórias mais curtas e regulares.

N	ρ	$\langle \mu \rangle$
2	1.02	1.39 ± 0.15
3	15.3	1.83 ± 0.57
5	25.5	1.72 ± 0.23
8	40.76	1.79 ± 0.10
10	51	2.15 ± 0.18
13	66.24	2.39 ± 0.20
15	76.4	2.80 ± 0.31
18	91.72	3.29 ± 0.56
20	102	3.30 ± 0.58
25	127.4	3.36 ± 0.69
30	153	3.47 ± 0.24

Tabela 4.3: Valores médios dos expoentes μ das distribuições de passos, em função do número de peixes N .

Aqui, também, considera-se a possibilidade de que os cardumes se fragmentem em domínios, especialmente em condições de alta densidade [7]. Essa fragmentação do cardume leva a uma dinâmica mista: dentro de cada domínio, os peixes mantêm padrões compatíveis com voos de Lévy, devido a correlação forte intra-domínio, enquanto os deslocamentos inter-domínios ocorrem de forma mais aleatório, tendendo ao browniano, devido a

correlação mais fraca. Essa mudança no padrão de movimento contribui para a flutuação observada nas métricas de erro.

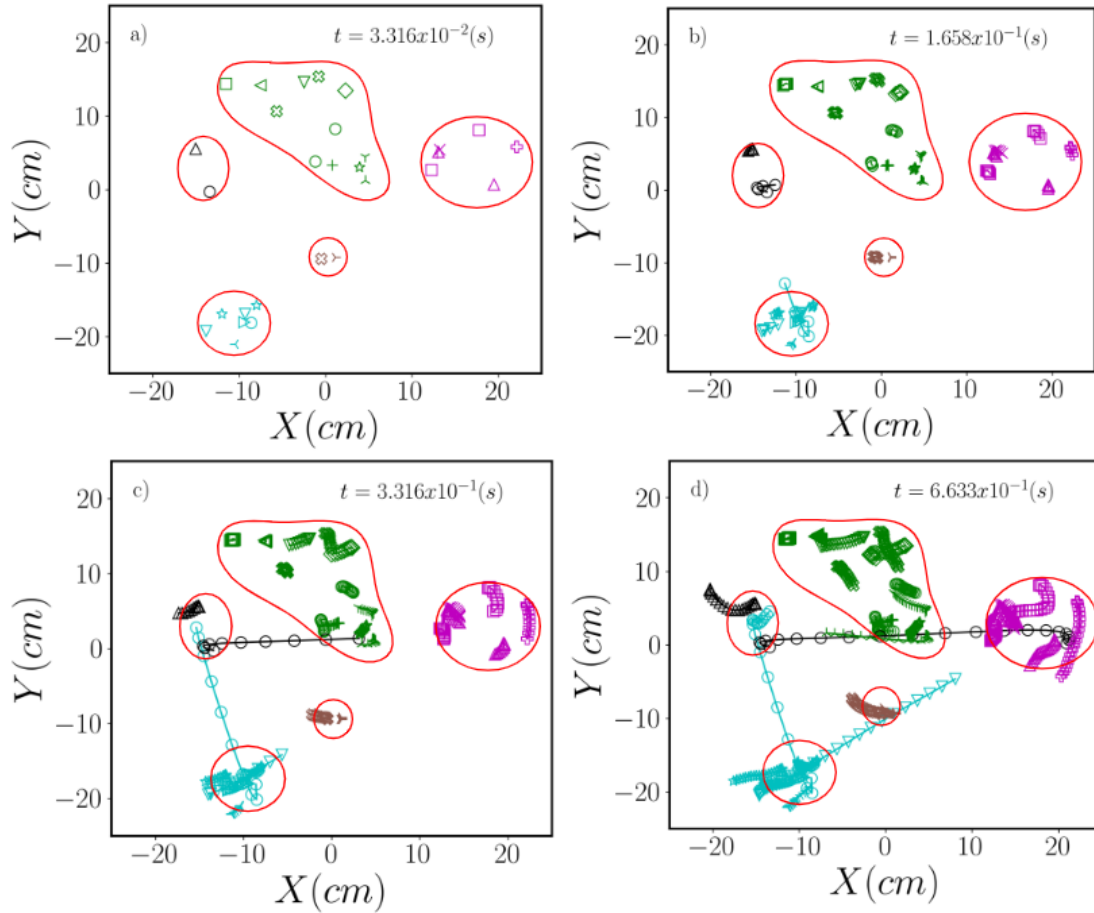


Figura 4.7: Evolução da configuração espacial com relação ao centro de massa, de 30 peixes ao longo do tempo. a) $t = 3.316 \times 10^{-2} s$, b) $t = 1.658 \times 10^{-1} s$, c) $t = 3.316 \times 10^{-1} s$ e d) $t = 6.633 \times 10^{-1} s$. Os domínios delimitados pelas curvas vermelhas evidenciam a fragmentação do cardume em subgrupos, especialmente em condições de alta densidade. Observa-se também o trânsito de indivíduos entre diferentes domínios ao longo do tempo.

A literatura existente sobre voos de Lévy aponta que a eficiência no forrageamento é otimizada, especialmente em cenários onde os recursos são escassos [15]. No presente estudo, no entanto, o aquário experimental não oferece alvos definidos a serem localizados; os únicos elementos em movimento são os próprios peixes. Como o objetivo é investigar os padrões internos de movimentação do cardume, adotamos o centro de massa como referencial [6]. Dessa forma, ainda que o contexto seja distinto daquele previsto pela hipótese clássica de forrageamento, recorreremos qualitativamente aos conceitos associados aos voos de Lévy para interpretar os deslocamentos observados nos cardumes de peixe Zebra.

Diante da ausência de recursos no ambiente, surge uma questão natural: o que, então, os peixes estariam, buscando? Acredita-se que esses organismos tenham evoluído para adotar esse padrão de movimentação como uma estratégia adaptativa [50, 51]. Assim, mesmo na ausência de alvos externos ao cardume, seus deslocamentos internos parecem seguir uma lógica funcional.

Apesar dos avanços no entendimento das dinâmicas sociais em outras espécies, como aves [52], a investigação da distribuição de influência entre indivíduos ainda é incipiente em estudos com cardumes de peixes. No entanto, observações recentes sugerem que essas estruturas coletivas podem apresentar padrões organizacionais complexos, com indícios

de hierarquia interna [27]. Esse tipo de estrutura também é observado quando $\rho > \rho_c$, mesmo nos casos em que o cardume se fragmenta em domínios. Dentro de cada domínio, podem surgir indivíduos que exercem um papel mais influente, embora essa influência tenda a alternar entre os membros ao longo do tempo. Além disso, os peixes frequentemente transitam entre diferentes domínios, o que favorece a interação social e o transporte de informação, como mostra a figura 4.7. Esse comportamento contribui para reforçar a distinção entre diferentes modos de organização coletiva, como *shoaling* e *schooling* [7, 29].

Dessa forma, ocorrência de voos de Lévy nesse referencial, especialmente durante processos de reorganização espacial, pode, portanto, representar uma estratégia eficiente para a busca de novos papéis funcionais dos peixe dentro do cardume. Essa reorganização espacial estratégica pode representar uma possível tática adaptativa, favorecendo a sobrevivência do grupo durante o forrageamento.

4.4 Distribuição q -Gaussiana do ruído associado ao comprimento do passo

Nesta seção, analisamos as distribuições do ruído associado ao comprimento do passo δr com o objetivo de identificar padrões de correlação na dinâmica coletiva dos cardumes. Para isso, utilizamos a função q -Gaussiana, uma generalização da distribuição normal [53], que permite descrever distribuições com caudas pesadas para $q > 1$, recuperando a gaussiana no limite $q \rightarrow 1$ [54, 55]. Essa abordagem é particularmente útil para modelar flutuações amplificadas e correlações de longo alcance, características recorrentes em sistemas biológicos com interação entre indivíduos.

O valor de q reflete o comportamento da cauda, verifica-se cauda curta ou cauda longa quando comparadas a gaussiana. Quando $q \rightarrow 1$, a distribuição retorna a difusão normal e a respectiva forma gaussiana.

Já para $q > 1$ o comportamento assintótico de lei de potência surge, evidenciando uma cauda pesada [20]. Na figura 4.8, esse comportamento é evidenciado tanto no painel (a), que mostra o alargamento das caudas das distribuições com o aumento do número de indivíduos, quanto no painel (b), onde se observa a variação do parâmetro q em função da densidade do cardume. A função de densidade de probabilidade da distribuição q -Gaussiana de Tsallis é dada por [53]:

$$P_q(\delta r) = \frac{\beta_0}{C_q} \left[1 - (1 - q)\beta(\delta r - \langle \delta r \rangle)^2 \right]^{\frac{1}{1-q}}, \quad 1 < q < 3$$

onde A é o fator de normalização, $\langle \delta r \rangle$ o valor médio, β está associada à largura da distribuição e q é o parâmetro entropico que regula o decaimento das caudas.

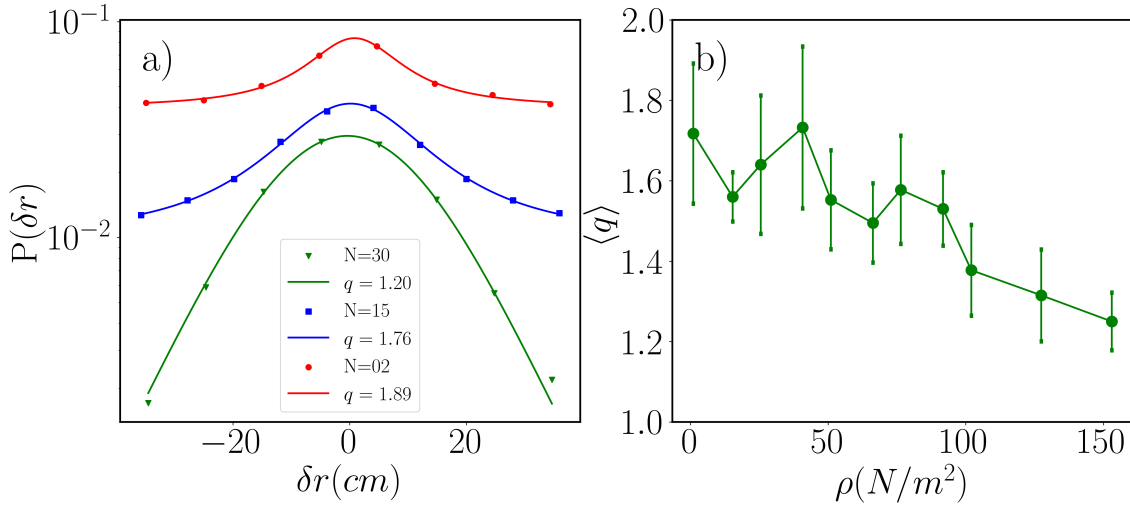


Figura 4.8: a) Distribuições de probabilidade dos deslocamentos para diferentes tamanhos de grupo, ajustadas por distribuições do tipo q -gaussiana. b) Variação do parâmetro médio $\bar{q}$ em função da densidade ρ , evidenciando a transição de um regime não-gaussiano para um comportamento mais próximo do regime gaussiano padrão. As barras de erro representam o desvio padrão nos ajustes de q .

Os ajustes mostraram que as distribuições empíricas não seguem uma gaussiana padrão, especialmente em baixas densidades populacionais. Os valores do parâmetro q , apresentados na tabela 4.4, indicam que para pequenos grupos (por exemplo, $N = 2, 3$), os deslocamentos são melhor descritos por q -Gaussianas com $q > 2,2$, refletindo a ocorrência de caudas pesadas e maior dispersão nos deslocamentos. Isso está em acordo com os resultados das seções anteriores, que identificaram um regime superdifusivo ($\gamma > 1$) e um expoente de lei de potência $\mu < 3$, ambos característicos de movimentos com alta variabilidade e intermitência, como os voos de Lévy.

N	ρ	$\langle q \rangle$
2	1.02	1.72 ± 0.17
3	15.3	1.56 ± 0.06
5	25.5	1.64 ± 0.17
8	40.76	1.73 ± 0.20
10	51	1.55 ± 0.12
13	66.24	1.50 ± 0.1
15	76.4	1.58 ± 0.13
18	91.72	1.53 ± 0.10
20	102	1.38 ± 0.11
25	127.4	1.31 ± 0.11
30	153	1.25 ± 0.08

Tabela 4.4: Valores médios dos expoentes μ das distribuições de passos e dos parâmetros entrópicos $\bar{q}$ obtidos a partir dos ajustes por q -gaussianas, em função do número de partículas N .

À medida que a densidade aumenta, observa-se uma diminuição progressiva no valor de q , que tende a estabilizar em torno de $q \approx 1,6$ para $N = 30$. Essa tendência aponta para uma aproximação do comportamento gaussiano, com distribuições mais concentradas em torno da média e deslocamentos menos dispersos. Tal comportamento é coerente com a

transição observada no deslocamento quadrático médio, onde o expoente γ tende a 1 e também com os valores de μ .

Portanto, esta análise baseada na q -Gaussiana confirma e aprofunda os resultados das análises anteriores: o sistema transita de uma dinâmica anômala, com forte variabilidade estatística e indícios de não extensividade, para um comportamento mais próximo do regime browniano, à medida que o número de indivíduos aumenta.

CAPÍTULO 5

Conclusão

Neste trabalho, utilizamos dados experimentais, coletados pelo *LaSCoU*, de cardumes de (*Danio rerio*) em ambiente controlado, para investigar a posição dos indivíduos com relação ao centro de massa do grupo. A partir de conceitos fundamentais, como o Teorema Central do Limite e sua generalização, que fundamentam os modelos de difusão normal e anômala, incluindo os voos de Lévy, analisamos quantitativamente os padrões de movimento coletivo. Para isso, utilizamos medidas como o deslocamento quadrático médio e a distribuição dos comprimentos de passo, considerando a forma como as variáveis aleatórias envolvidas se distribuem. Essa abordagem nos permitiu identificar uma relação clara entre o tamanho do cardume e o regime difusivo predominante.

Em particular, observamos a emergência de comportamentos compatíveis com difusão anômala e voos de Lévy para $\rho < \rho_c$, enquanto, para $\rho > \rho_c$, um tendência para padrões de difusão normal e movimento browniano. Essa transição foi evidenciada pelo comportamento do deslocamento quadrático médio (MSD) e complementada pela análise dos comprimentos de passo, cuja distribuição segue uma lei de potência com expoente μ . Esses resultados sugerem que a reorganização interna do grupo segue mecanismos estocásticos que favorecem uma redistribuição espacial eficiente dos indivíduos.

Para investigar esse comportamento com mais profundidade, realizamos três análises teóricas, cada uma abordando um aspecto específico da dinâmica do sistema. A primeira análise centrou-se no deslocamento quadrático médio (MSD), permitindo identificar a natureza da difusão ao longo do tempo. Através da variação do expoente γ , observou-se uma clara dependência com a densidade: para pequenos grupos, $\gamma > 1$ indica difusão anômala, enquanto para grupos maiores $\gamma \rightarrow 1$, apontando em direção a um regime browniano.

A segunda análise considerou a distribuição dos comprimentos de passos com relação ao centro de massa, revelando que, sob restrição espacial, os deslocamentos seguem uma lei de potência truncada. Essa distribuição, caracterizada por uma cauda pesada, sugere que o padrão de movimentação é intermitente e compatível com voos de Lévy truncados. O valor do expoente μ , sensível à densidade, indicou uma transição estatística do regime superdifusivo para o difusivo normal com o aumento do número de indivíduos.

Por fim, a terceira análise focou na caracterização das distribuições empíricas de deslocamento por meio de ajustes com a função q -gaussiana, que corresponde à estatística não extensiva de Tsallis. Esse tipo de distribuição surge naturalmente em sistemas com correlações de longo alcance ou memória, e representa uma generalização da distribuição normal. Observamos que, em diferentes condições de densidade, os deslocamentos dos peixes não seguem uma gaussiana padrão, mas sim distribuições com caudas mais pesadas, capturadas por valores de $q > 1$.

Nossa investigação revelou que o reposicionamento espacial dos *zebrafish* apresenta características compatíveis com um padrão de voo de Lévy. Esse comportamento, amplamente descrito na literatura por favorecer buscas mais eficientes em ambientes estocásticos, também se manifesta aqui como um mecanismo relevante para a redistribuição das

posições dos peixes dentro do cardume. Observamos uma alternância entre deslocamentos curtos e eventos de movimentação mais longos, configurando uma distribuição de passos com cauda pesada. Essa dinâmica sugere a existência de um equilíbrio entre exploração global e exploração local, permitindo aos indivíduos acessar novas posições e, potencialmente, novos papéis funcionais no coletivo, sem comprometer a coesão do grupo. Esse padrão de movimentação evidencia uma dinâmica hierárquica no interior do grupo, em que a mobilidade dos indivíduos está fortemente condicionada tanto pelas interações locais quanto pela posição relativa no coletivo. Assim, a redistribuição espacial não ocorre de modo homogêneo, mas segue uma organização flexível, que pode favorecer a adaptação rápida a novas configurações sociais ou ambientais.

Para estudos futuros, aplicaremos esta e outras análises de dados em amostras de peixes-zebra adultos ou larvas, com o intuito de desenvolver trabalhos voltados para diagnósticos pré-clínicos. Essa proposta está fundamentada na cooperação entre o Laboratório de Sistemas Complexos e Universalidades (LaSCoU) e o Laboratório de Ecofisiologia e Comportamento Animal (LECA). Também será considerado o uso de modelos comportamentais para a análise dos efeitos de fármacos e da aplicação de substâncias como o álcool, a fim de investigar alterações no padrão locomotor e na dinâmica coletiva. Além disso, simulações computacionais poderão ser integradas para complementar os dados empíricos e testar hipóteses que não são facilmente reproduzíveis em laboratório.

5.1 Trabalho em redação

SILVA, Andreza M. da; VASCONCELOS, João V. A.; NEGREIROS-NETO, Luis G.; OLIVEIRA, Viviane M. de; SOUZA, Adauto J. F. de; ROMAGUERA, Antonio R. de C.; BARBOSA, Anderson L. R.; LEAL, Francisco C. B. From Lévy Flights to the Brownian Movement in Schools of Zebrafish (*Danio rerio*).

5.2 Participação em eventos

”From Lévy Flights to Brownian Movement in Schools of Zebrafish (*Danio rerio*)”. Poster apresentado no XXXIX Encontro de Física do Norte e Nordeste (EFNNE) 2025.

Bibliografia

- [1] Emanuel Fortes Teixeira. “Modelagem de movimentos coletivos de matéria ativa”. Em: (2018).
- [2] Sriram Ramaswamy. “Active matter”. Em: *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* 2017.5 (2017), p. 054002.
- [3] Frank Schweitzer. *Brownian agents and active particles: collective dynamics in the natural and social sciences*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [4] Tamás Vicsek et al. “Novel type of phase transition in a system of self-driven particles”. Em: *Physical Review Letters* 75.6 (1995), p. 1226.
- [5] A. Cavagna et al. “Diffusion of individual birds in starling flocks”. Em: *Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences* 280.1756 (2013), p. 20122484. doi: 10.1098/rspb.2012.2484.
- [6] Hisashi Murakami et al. “Inherent noise appears as a Lévy walk in fish schools”. Em: *Scientific Reports* 5 (2015), p. 10605. doi: 10.1038/srep10605.
- [7] Antonio R de C Romaguera et al. “Multifractal fluctuations in zebrafish (*Danio rerio*) polarization time series”. Em: *The European Physical Journal E* 47.5 (2024), p. 29.
- [8] Mayara Couto Santos et al. “ZEBRAFISH (*Danio rerio*): NOVO MODELO ANIMAL INTRODUZIDO COM ÊXITO NO CENÁRIO CIENTÍFICO”. Em: (2020).
- [9] Albert Einstein. “On the movement of small particles suspended in a stationary liquid demanded by the molecular-kinetic theory of heat”. Em: *Annalen der Physik* 17 (1905), pp. 549–560.
- [10] Silvio RA Salinas. “Einstein e a teoria do movimento browniano”. Em: *Revista Brasileira de Ensino de Física* 27 (2005), pp. 263–269.
- [11] Diego Bruno da Fonseca. “Voos de Lévy em fitas de grafeno”. Orientador: Prof. Dr. Anderson Luiz da Rocha e Barbosa. Dissertação de Mestrado. Recife, PE, Brazil: Universidade Federal Rural de Pernambuco, abril de 2024.
- [12] Mateus Bruno Barbosa. “Análise de Caminhadas de Lévy em Trajetórias Curvas 2D”. Orientador: Prof. Dr. Madras Viswanathan Gandhi Mohan, Co-orientador: Prof. Dr. João Medeiros. Tese de Doutorado. Natal, RN, Brazil: Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2024.
- [13] J. Klafter e I. M. Sokolov. *First Steps in Random Walks: From Tools to Applications*. Oxford: Oxford University Press, 2011. ISBN: 978-0-19-923486-8.
- [14] Linda E Reichl. *A modern course in statistical physics*. Wiley, 1998.
- [15] Gandhimohan M. Viswanathan et al. *The Physics of Foraging: An Introduction to Random Searches and Biological Encounters*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2011.

- [16] Danish Ali Ahmed et al. “Three-dimensional random walk models of individual animal movement and their application to trap counts modelling”. Em: *Journal of Theoretical Biology* 524 (2021), p. 110728.
- [17] W. Feller. “A Limit Theorem for Random Variables with Infinite Moments”. Em: *American Journal of Mathematics* (1946). DOI: 10.2307/2371837.
- [18] Alexander A. Dubkov, Bernardo Spagnolo e Vladimir V. Uchaikin. “Levy Flight Superdiffusion: An Introduction”. Em: *arXiv: Statistical Mechanics* (2008). DOI: 10.1142/s0218127408021877.
- [19] G. Viswanathan et al. “Lévy flight search patterns of wandering albatrosses”. Em: *Nature* (1996). DOI: 10.1038/381413a0.
- [20] Isabel Tamara Pedron e Renio dos Santos Mendes. “Difusão anômala e equações generalizadas de difusão”. Em: *Revista Brasileira de Ensino de Física* 27 (2005), pp. 251–258.
- [21] Cristian Magno Neiverth e Eduardo Vicentini. “DINÂMICA FRACIONAL E DIFUSÃO ANÔMALA.” Em: ().
- [22] Gladstone de Alencar Alves. “O paradoxo da superdifusão de uma caminhada aleatória com memória exponencial”. Em: (2014).
- [23] Bartłomiej Dybiec et al. “Lévy flights versus Lévy walks in bounded domains.” Em: *Physical Review E* (2017). DOI: 10.1103/physreve.95.052102.
- [24] Bernardo Brandão Niebuhr dos Santos. “Modelos espacialmente explícitos de movimentação animal como subsídio para o delineamento de áreas de conservação da natureza”. Em: (2013).
- [25] Sean D. Lawley. “Extreme statistics of superdiffusive Levy flights and every other Levy subordinate Brownian motion”. Em: *arXiv: Probability* (2021).
- [26] A. Reynolds e C. J. Rhodes. “The Lévy flight paradigm: random search patterns and mechanisms.” Em: *Ecology* (2009). DOI: 10.1890/08-0153.1.
- [27] Francisco C.B. Leal et al. “Avalanche dynamics of zebrafish schools: Unveiling self-organization and phase transitions”. Em: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 651 (2024), p. 130040. ISSN: 0378-4371. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2024.130040>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437124005491>.
- [28] Sepideh Bazazi et al. “Intermittent Motion in Desert Locusts: Behavioural Complexity in Simple Environments”. Em: *PLoS Computational Biology* 8.5 (2012), e1002498. DOI: 10.1371/journal.pcbi.1002498. URL: <https://doi.org/10.1371/journal.pcbi.1002498>.
- [29] Luis Gomes de Negreiros Neto. “Observação experimental de transição de fase schools-shoals em peixe-zebra (*Danio rerio*)”. Orientador: Prof. Dr. Anderson Luiz da Rocha e Barbosa, Co-orientador: Prof. Dr. Antonio Rodrigues de Castro Romaguera. Dissertação de Mestrado. Recife, PE, Brazil: Universidade Federal Rural de Pernambuco, abril de 2024.
- [30] Ana Paula Dammski, Bruno Roberto Müller e Carolina Gaya. “Manual de Criação em Biotério”. Em: (2011).
- [31] Carla Letícia Gediél Rivero-Wendt et al. “Zebrafish: Recomendações de Manutenção em Laboratório”. Em: *Uniciências* 24.2 (2020), pp. 141–145.

- [32] Mateus Tavares Kütter et al. “Boas práticas na criação e manutenção de zebrafish (Danio rerio) em laboratório no Brasil”. Em: *Ciência Animal Brasileira* (2023). doi: 10.1590/1809-6891v24e-74134p.
- [33] Christian Lawrence. “The husbandry of zebrafish (Danio rerio): A review”. Em: *Aquaculture* (2007). doi: 10.1016/j.aquaculture.2007.04.077.
- [34] M. Westerfield. “The zebrafish book : a guide for the laboratory use of zebrafish (Danio rerio)”. Em: (1995).
- [35] Kamyar Khoshnevisan et al. “Serotonin level as a potent diabetes biomarker based on electrochemical sensing: a new approach in a zebra fish model”. Em: *Analytical and Bioanalytical Chemistry* (2021). doi: 10.1007/s00216-020-03122-5.
- [36] Tianzhi Yang et al. “Exosome Delivered Anticancer Drugs Across the Blood-Brain Barrier for Brain Cancer Therapy in Danio Rerio”. Em: *Pharmaceutical Research* (2015). doi: 10.1007/s11095-014-1593-y.
- [37] A. Gharaei et al. “Effects of Tribullus terrestris extract on masculinization, growth indices, sex determination reversal and steroid hormones level in Zebra fish (Danio rerio)”. Em: (2020). doi: 10.22034/iar(20).2020.670992.
- [38] Hak-Jae Kim et al. “Determination of toxic effects of lead acetate on different sizes of zebra fish (Danio rerio) in soft and hard water”. Em: *Journal of King Saud University - Science* (2020). doi: 10.1016/j.jksus.2019.11.032.
- [39] O. Bénichou et al. “Intermittent search strategies”. Em: *arXiv preprint arXiv:1104.0639* (2011). URL: <http://arxiv.org/abs/1104.0639v1>.
- [40] Juan Liao et al. “Segmentation of rice seedlings using the YCrCb color space and an improved Otsu method”. Em: *Agronomy* 8.11 (2018), p. 269.
- [41] Nobuyuki Otsu et al. “A threshold selection method from gray-level histograms”. Em: *Automatica* 11.285-296 (1975), pp. 23–27.
- [42] ALMIR OLIVETTE ARTERO e ANTONIO MARIA GARCIA TOMMASELLI. “Limiarização Automática de Imagens Digitais”. Em: *Boletim de Ciências Geodésicas* 6.1 (2000), pp. 38–48.
- [43] Prasanna K Sahoo, SAKC Soltani e Andrew KC Wong. “A survey of thresholding techniques”. Em: *Computer vision, graphics, and image processing* 41.2 (1988), pp. 233–260.
- [44] N. Otsu. “A threshold selection method from gray level histograms”. Em: *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* (1979). doi: 10.1109/tsmc.1979.4310076.
- [45] M. Bothe, Francesc Sagués e Igor M. Sokolov. “Mean squared displacement in a generalized Lévy walk model.” Em: *Physical Review E* (2019). doi: 10.1103/physreve.100.012117.
- [46] T. J. Pitcher. “Heuristic definitions of fish shoaling behaviour”. Em: *Animal Behaviour* (1983).
- [47] D. Grünbaum e A. Okubo. “Modelling social animal aggregations”. Em: *Frontiers in Mathematical Biology*. Ed. por S. A. Levin. Springer, 1994, pp. 296–325.
- [48] F. Massey. “The Kolmogorov-Smirnov Test for Goodness of Fit”. Em: (1951). doi: 10.2307/2280095.
- [49] Aaron Clauset, Cosma Rohilla Shalizi e Mark Newman. “Power-Law Distributions in Empirical Data”. Em: *Siam Review* (2009). doi: 10.1137/070710111.

- [50] G. M. Viswanathan et al. “Optimizing the success of random searches”. Em: *Nature* 401.6756 (1999), pp. 911–914. doi: 10.1038/44831.
- [51] G. M. Viswanathan, E. Raposo e M. Da Luz. “Lévy flights and superdiffusion in the context of biological encounters and random searches”. Em: *Physics of Life Reviews* 5.3 (2008), pp. 133–150. doi: 10.1016/j.plrev.2008.03.002.
- [52] Máté Nagy et al. “Hierarchical group dynamics in pigeon flocks”. Em: *Nature* 464.7290 (2010), pp. 890–893.
- [53] Viktor Witkovsk’y. “Characteristic Function of the Tsallis q-Gaussian and Its Applications in Measurement and Metrology”. Em: *Metrology* (2023). doi: 10.3390/metrology3020012.
- [54] Leonardo Di G. Sigalotti, Alejandro Ramírez-Rojas e Carlos A. Vargas. “Tsallis q-Statistics in Seismology”. Em: *Entropy* 23.1 (2021), p. 81. doi: 10.3390/e23010081.
- [55] Antonio César do Prado Rosa Junior. “Sistemas complexos não-aditivos: Aplicações em Astrofísica, Química e Engenharias”. Tese de Doutorado. Salvador, Brazil: SENAI CIMATEC, 2023.