



Universidade Federal Rural de Pernambuco  
Departamento de Física

Pós-Graduação em Física Aplicada

**Cavidades Balísticas Caóticas com  
Contato Não Ideal: Resultados Exatos  
Via Funções Hipergeométricas de  
Argumento Matricial**

Francisco Ariaildo da Costa Sá

Dissertação de Mestrado

Recife  
20 de Janeiro de 2015

Universidade Federal Rural de Pernambuco  
Departamento de Física

Francisco Ariaildo da Costa Sá

**Cavidades Balísticas Caóticas com Contato Não Ideal:  
Resultados Exatos Via Funções Hipergeométricas de  
Argumento Matricial**

*Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada do Departamento de Física da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física.*

Orientador: *Prof. Dr. Ailton Fernandes Macêdo Junior*

Recife  
20 de Janeiro de 2015

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada do Departamento de Física da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física.

---

*Prof. Dr. Ailton Fernandes Macêdo Junior*  
Orientador

**Cavidades Balísticas Caóticas com Contato Não Ideal:  
Resultados Exatos Via Funções Hipergeométricas de  
Argumento Matricial**

por  
Francisco Arialdo da Costa Sá

Universidade Federal Rural de Pernambuco  
Departamento de Física

Recife  
20 de Janeiro de 2015

*Ao meu pai Cipriano, minha Mãe Maria Eduvirgens, minha  
noiva Izabelly (Bell) e meus irmãos Fabiano e Clebiano.*

---

## Agradecimentos

---

- Agradeço primeiramente a Deus que me conduziu até aqui onde estou hoje e tudo o que sou;
- A minha família, por todo apoio, paciência, compreensão, incentivo e amor;
- A minha noiva Izabelly o amor de minha vida, um presente enviado por Deus para ser minha companheira tanto acadêmica quanto pessoal por toda vida, me incentivando, apoiando, aconselhando, animando, trocando ideias e dividindo sonhos de projetos futuros. Também aos meus futuros sogro, sogra e cunhadas, pelo apoio e carinho que recebi depois que os conheci;
- A meu orientador Ailton pela atenção, paciência e ensinamentos. Um modelo de professor que seguirei na minha vida profissional;
- Aos meus amigos que encontrei e passei boa parte desses dois anos, praticamente minha família: Zé (o barbixa), Daniel (o Esquesito), Alexandre (o Xandão), Maelyson (o Estranho), Athenogenes (Netão), Augusto, Danilo, Augusto (o Gordinho), Thiago, Elder, Aguinaldo, Cabelinho, Ivelton, Marília, Jorge (cabeça de Galo), Tiago (o Japa), e todos outros que não citei mas estão guardados no lado esquerdo do peito;
- Aos professores que estiveram presente durante o mestrado: Adalto, Pedro Hugo, Raúl, Anderson, Luciano, Artur, Viviane e Ernande;
- A CAPES e a UFRPE.

*“Continue sedento, continue ingênuo.”*

—STEVE JOBS

Neste trabalho, estudamos uma cavidade caótica balística com dois terminais acoplada a reservatórios de elétrons por guias ideais. Os guias suportam  $N_1$  e  $N_2$  canais abertos e se conectam com a cavidade através de um contato ideal e de uma barreira com transparência  $\Gamma$ . Na ausência de interação elétron-elétron, propriedades de transporte deste sistema, tais como condutância e potência do ruído de disparo, são estudadas a partir do formalismo de espalhamento de Landauer-Büttiker. No regime universal, propriedades estatísticas dos observáveis podem ser acessadas através da teoria de matrizes aleatórias (TMA), que permite o cálculo de médias de observáveis a partir de um ensemble de matrizes de espalhamento (matrizes  $\mathcal{S}$ ). Tal ensemble pode ser obtido a partir de um princípio de máxima entropia juntamente com algumas hipóteses adicionais como analiticidade, unitariedade e algumas simetrias que são preservadas na presença de dinâmica caótica. A distribuição resultante é conhecida como núcleo de Poisson e dada por  $P(\mathcal{S}) \propto |\det(1 - \bar{\mathcal{S}}\mathcal{S})|^{-(\beta N_T + 2 - \beta)}$  onde  $\beta = \{1, 2, 4\}$  é um parâmetro que indica as classes de simetria,  $N_T = N_1 + N_2$  é o número total de canais abertos e  $\bar{\mathcal{S}}$  é uma matriz sub-unitária que contém parâmetros do acoplamento. Usando a matriz  $\mathcal{S}$  e tal distribuição, pode-se, em princípio, obter qualquer observável. No entanto, este é um problema não trivial e resultados exatos para barreiras de transparências arbitrárias estiveram restritos por muito tempo ao limite quântico extremo  $N_1 = N_2 = 1$  e ao limite semiclássico  $N_1, N_2 \gg 1$ . Num trabalho recente [41], Vidal e Kanzieper conseguiram resultados exatos para este problema no caso  $\beta = 2$  a partir de uma identidade baseada na integral de Ingham-Siegel e uma representação integral da função hipergeométrica de argumento matricial. Neste trabalho mostramos como generalizar esse resultado para as demais classes de simetria. Em particular, obtivemos resultados exatos para média e variância da condutância e potência do ruído de disparo, bem como expressões analíticas para suas respectivas distribuições. Tais resultados foram confirmados através de simulações numéricas baseadas na formulação hamiltoniana na TMA.

**Palavras-chave:** Barreira de Tunelamento, Núcleo de Poisson, TMA, Função Hipergeométrica de Argumento Matricial, Condutância, Potência do Ruído de Disparo, Média, Variância.

---

## Abstract

---

In this work, we study a chaotic ballistic cavity with two terminals coupled to reservoirs of electrons by ideal leads. The support leads  $N_1$  and  $N_2$  open channels and connect with the cavity through an ideal contact and a barrier with transparency  $\Gamma$ . The absence of electron-electron interaction, transport properties of this system, such as conductance and power of the shot noise, are studied from the scattering formalism of Landauer-Büttiker. In the universal regime, statistical properties of the observable can be accessed through the theory of random matrices of random matrices theory (RMT), which permits calculation of averages observable from an ensemble of scattering matrices (matrices  $\mathcal{S}$ ). Such an ensemble may be obtained from a maximum entropy principle along with some additional assumptions as analyticity, unitarity and some symmetries are preserved in the presence of chaotic dynamics. The resulting distribution is known as Poisson Kernel and given by  $P(\mathcal{S}) \propto |\det(1 - \bar{\mathcal{S}}\mathcal{S})|^{-(\beta N_T + 2 - \beta)}$  where  $\beta = \{1, 2, 4\}$  is a parameter which indicates the symmetry classes,  $N_T = N_1 + N_2$  is the total number of open channels and  $\bar{\mathcal{S}}$  is a sub-unitary matrix containing coupling parameters. Using the matrix  $\mathcal{S}$  and such distribution, can be, in principle, give any observable. However, this is a non trivial problem and accurate results for arbitrary transparency barriers were restricted for a long time in the extreme quantum limit limit  $N_1 = N_2 = 1$  and the semiclassical limit  $N_1, N_2 \gg 1$ . A recent paper [41], Vidal and Kanzieper managed exact results for this problem in the case  $\beta = 2$  from an identity based integral Ingham-Siegel and an integral representation of the hypergeometric function of matrix argument. Here we show how to generalize this result to the other symmetry classes. In particular, we obtained exact results for mean and variance of conductance and power of the shot noise, and analytical expressions for their respective distributions. These results were confirmed by numerical simulations based on the Hamiltonian formulation in RMT.

**Keywords:** Barrier Tunneling, Poisson Kernel, RMT, Hypergeometric Function Matrix argument, conductance, Shot Noise Power, Average, Variance.



<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Física Mesoscópica	1
1.1.1	Gás de elétrons Bidimensional	2
1.1.2	Ponto de Contato Quântico	2
1.2	Formalismo de Landauer-Büttiker	5
1.2.1	Definição da Matriz de Espalhamento	6
1.2.2	Condutância	8
1.2.3	Potência do Ruído de Disparo	10
1.3	Teoria de Levitov-Lesovik	10
1.3.1	Elementos de Teoria de Probabilidade	11
1.3.2	Cumulantes da Estatística de Contagem de Carga	12
1.4	Uma Breve História da Cavidade com Contato Não Ideal	14
1.5	Estrutura da Dissertação	15
<b>2</b>	<b>Abordagem Hamiltoniana</b>	<b>17</b>
2.1	Ensembles Gaussianos	18
2.1.1	Ensemble Gaussiano Ortogonal	18
2.1.2	Ensemble Gaussiano Unitário	20
2.1.3	Ensemble Gaussiano Simplético	20
2.2	Fórmula de Mahaux-Weidenmüller	21
2.2.1	Descrição Geral do Modelo	21
2.2.2	Matriz de Espalhamento $\mathcal{S}$	22
2.3	Comparação com Resultados Analíticos	27
<b>3</b>	<b>Abordagem Via Matriz de Espalhamento</b>	<b>31</b>
3.1	Ensembles Circulares	31
3.2	Núcleo de Poisson	33

<b>4</b>	<b>Resultados Exatos Via Função Hipergeometrica de Argumento Matricial: Condutância, Ruído de Disparo, Assimetria</b>	<b>37</b>
4.1	Condutância	41
4.1.1	Distribuição	41
4.1.2	Média	43
4.1.3	Variância	46
4.2	Potência do Ruído de Disparo	49
4.2.1	Distribuição	49
4.2.2	Média	53
4.2.3	Variância	56
4.3	Assimetria	59
4.3.1	Distribuição	59
4.4	Outros Resultados Exatos	61
4.4.1	Caso Particular $\hat{\gamma}_2 = 0$	63
4.4.1.1	Condutância	63
4.4.1.2	Potência do Ruído de Disparo	66
4.4.2	Caso Particular $\hat{\gamma}_1 = \hat{\gamma}_2$	67
4.4.2.1	Condutância	68
4.4.2.2	Potência do Ruído de Disparo	69
<b>5</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>74</b>
<b>A</b>	<b>Integral de Ingham-Siegel</b>	<b>76</b>
A.1	Integral de Fresnel	78
<b>B</b>	<b>Outros Resultados Via Função Hipergeometrica de Argumento Matricial</b>	<b>80</b>
B.1	Média da Assimetria	80
B.2	Variância da Assimetria	82
B.3	Curtose	85
B.3.1	Distribuição	85
B.3.2	Média	87
B.3.3	Variância	88

---

## Lista de Figuras

---

- 1.1 Escalas macroscópicas, mesoscópicas e microscópicas. Onde  $\lambda_F$  é o comprimento de onda no nível de Fermi e  $l$  comprimento de espalhamento. Retirada da Ref. [2]. 1
- 1.2 Na junção entre o AlGaAs e o GaAs, podemos ver o perfil das bandas de condução (linha superior), e valência (linha inferior) e suas respectivas energias,  $E_C$  e  $E_V$  além da energia de Fermi,  $E_F$ , (a) antes e (b) depois da transferência de carga, onde observamos a formação do gás de elétrons bidimensional 2DEG. Retirada da Ref. [4] 2
- 1.3 Trajetória do elétron no regime balístico. Retirada da Ref. [3]. 3
- 1.4 Condutância em função da voltagem de gate em um contato quântico a 0,6K(GaAs/AlGaAs). Quantização da condutância em um condutor balístico. Retirada da Ref. [9]. 4
- 1.5 Visão esquemática de uma cavidade caótica com as barreiras de tunelamento. 6
- 1.6 Espalhamento de modos propagantes em um guia semi-infinito acoplado na região de interação. 7
- 1.7 Os gráficos exibem a distribuição estatística experimental da contagem de  $n$  elétrons entrando em um ponto quântico durante um um intervalo de tempo de observação  $\Delta T_0$ . Os dois painéis, (a) e (b), diferem por valores de tensão nos "gates"(portões de entrada e saída de elétrons). O  $\Delta T_0$  é escolhido de maneira que os dois painéis exibam a mesma média  $\langle n \rangle = 3$ . As curvas vermelhas são as esperadas pela estatística de contagem de Levitov-Lesovik. A figura foi adaptada da referência [26]. 12
- 2.1 Densidade de autovalores para um Hamiltoniano pertencente ao **EGO** com  $M = 7000$ , confirmando a lei do semicírculo de Wigner (curva preta). 19
- 2.2 Simulação da condutância para  $\beta = 1$  com  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma = 2/3$ . 27
- 2.3 Distribuição da condutância para  $\beta = \{1, 2, 4\}$  com  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 2/3$ . Foram feitas  $10^6$  realizações com hamiltoniano de dimensão 200. 28

2.4	Média da condutância para $\beta = \{1, 2, 4\}$ com $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$ arbitrário. Foram feitas $10^5$ realizações com hamiltoniano de dimensão 40.	29
2.5	Variância da condutância para $\beta = \{1, 2, 4\}$ com $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$ arbitrário. Foram feitas $10^5$ realizações com hamiltoniano de dimensão 40.	30
3.1	Diagrama esquemático de um guia com barreira de tunelamento acoplado a uma cavidade caótica, indicando a notação para as diversas ondas entrando e saindo.	33
3.2	Visão esquemática de uma cavidade (a) como um guia (b) com dois guias	36
4.1	Ilustração de uma cavidade com acoplamento não ideal no guia 1 e com contato ideal no guia 2.	37
4.2	Distribuição da condutância para $\Gamma = 0.2, \Gamma = 0.4, \Gamma = 0.6, \Gamma = 0.8$ e $\Gamma = 1$ respectivamente com $\beta = 1$ . Sendo feito $10^6$ realizações e hamiltoniano de dimensão 200.	41
4.3	Distribuição da condutância para $\Gamma = 0.15, \Gamma = 0.35, \Gamma = 0.55, \Gamma = 0.75$ e $\Gamma = 0.95$ respectivamente com $\beta = 2$ . Sendo feito $10^6$ realizações e hamiltoniano de dimensão 200.	42
4.4	Distribuição da condutância para $\Gamma = 0.2, \Gamma = 0.4, \Gamma = 0.6, \Gamma = 0.8$ e $\Gamma = 1$ respectivamente com $\beta = 4$ . Sendo feito $10^6$ realizações e hamiltoniano de dimensão 200.	43
4.5	Média da Condutância para $N_2 = 2$ e $\beta = 1$ , com $10^5$ realizações e hamiltoniano de dimensão 30.	44
4.6	Média da Condutância para $N_2 = 2$ e $\beta = 2$ , com $10^5$ realizações e hamiltoniano de dimensão 30.	45
4.7	Média da Condutância para $N_2 = 2$ e $\beta = 4$ , com $10^5$ realizações e hamiltoniano de dimensão 30.	46
4.8	Variância da Condutância para $N_2 = 2$ e $\beta = 1$ , com $10^5$ realizações e hamiltoniano de dimensão 30.	47
4.9	Variância da Condutância para $N_2 = 1$ e $\beta = 2$ , com $10^5$ realizações e hamiltoniano de dimensão 30.	48
4.10	Variância da Condutância para $N_2 = 1$ e $\beta = 4$ , com $10^5$ realizações e hamiltoniano de dimensão 30.	49
4.11	Distribuição da potência do ruído de disparo para $N_2 = 4$ e $\beta = 1$ , com $10^6$ realizações e hamiltoniano de dimensão 200.	51
4.12	Distribuição da potência do ruído de disparo para $N_2 = 3$ e $\beta = 2$ , com $10^6$ realizações e hamiltoniano de dimensão 200.	52
4.13	Distribuição da potência do ruído de disparo para $N_2 = 1$ e $\beta = 4$ , com $10^6$ realizações e hamiltoniano de dimensão 200.	53
4.14	Média da potência do ruído de disparo para $N_2 = 2$ e $\beta = 1$ , com $10^5$ realizações e hamiltoniano de dimensão 30.	54
4.15	Média da potência do ruído de disparo para $N_2 = 2$ e $\beta = 2$ , com $10^5$ realizações e hamiltoniano de dimensão 30.	55

4.16	Média da potência do ruído de disparo para $N_2 = 2$ e $\beta = 4$ , com $10^5$ realizações e hamiltoniano de dimensão 30.	56
4.17	Variância da potência do ruído de disparo para $N_2 = 4$ e $\beta = 1$ , com $10^5$ realizações e hamiltoniano de dimensão 30.	57
4.18	Variância da potência do ruído de disparo para $N_2 = 1$ e $\beta = 2$ , com $10^5$ realizações e hamiltoniano de dimensão 30.	58
4.19	Variância da potência do ruído de disparo para $N_2 = 1$ e $\beta = 4$ , com $10^5$ realizações e hamiltoniano de dimensão 30.	59
4.20	Distribuição da assimetria para $N_2 = 2$ e $\beta = 1$ , com $10^6$ realizações e hamiltoniano de dimensão 200.	60
4.21	Distribuição da assimetria para $N_2 = 2$ e $\beta = 2$ , com $10^6$ realizações e hamiltoniano de dimensão 200.	60
4.22	Distribuição da assimetria para $N_2 = 3$ e $\beta = 4$ , com $10^6$ realizações e hamiltoniano de dimensão 200.	61
4.23	Distribuição da condutância para $N_1 = N_2 = 1$ com $\beta = 2$ e $\Gamma$ arbitrária ( $\Gamma_2 = 1$ ).	64
4.24	Média da condutância para $N_1 = N_2 = 1$ com $\beta = 2$ e $\Gamma$ arbitrária ( $\Gamma_2 = 1$ ).	65
4.25	Variância da condutância para $N_1 = N_2 = 1$ com $\beta = 2$ e $\Gamma$ arbitrária ( $\Gamma_2 = 1$ ).	66
4.26	Distribuição da potência do ruído de disparo para $N_1 = N_2 = 1$ com $\beta = 2$ e $\Gamma$ arbitrário ( $\Gamma_2 = 1$ ).	67
4.27	Distribuição da condutância para $N_1 = N_2 = 1$ com $\beta = 2$ e $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$ arbitrário.	68
4.28	Distribuição da condutância na escala logarítmica para $N_1 = N_2 = 1$ com $\beta = 2$ e $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$ arbitrário.	69
4.29	Distribuição da potência do ruído de disparo para $N_1 = N_2 = 1$ com $\beta = 2$ e $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$ arbitrário. $10^5$ realizações e hamiltoniano de dimensão 60.	70
4.30	Média da potência do ruído de disparo para $N_1 = N_2 = 1$ com $\beta = 2$ e $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$ arbitrária.	71
4.31	Variância da potência do ruído de disparo para $N_1 = N_2 = 1$ com $\beta = 2$ e $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$ arbitrária.	72
4.32	Distribuição da potência do ruído de disparo para $N_1 = N_2 = 1$ com $\beta = 1$ , $\Gamma_2 = 1$ e $\Gamma_1 = \Gamma$ arbitrária.	73
B.1	Média da assimetria para $N_2 = 4$ , $\beta = 1$ e $\Gamma$ arbitrária. Sendo $10^5$ realizações e hamiltoniano de dimensão 30.	81
B.2	Média da assimetria para $N_2 = 1$ , $\beta = 2$ e $\Gamma$ arbitrária. Sendo $10^5$ realizações e hamiltoniano de dimensão 30.	81
B.3	Média da assimetria para $N_2 = 1$ , $\beta = 4$ e $\Gamma$ arbitrária. Sendo $10^5$ realizações e hamiltoniano de dimensão 30.	82
B.4	Variância da assimetria para $N_2 = 2$ , $\beta = 1$ e $\Gamma$ arbitrária. Sendo $10^5$ realizações e hamiltoniano de dimensão 30.	83
B.5	Variância da assimetria para $N_2 = 3$ , $\beta = 2$ e $\Gamma$ arbitrária. Sendo $10^5$ realizações e hamiltoniano de dimensão 30.	84
B.6	Variância da assimetria para $N_2 = 1$ , $\beta = 4$ e $\Gamma$ arbitrária. Sendo $10^5$ realizações e hamiltoniano de dimensão 30.	85

- B.7 Distribuição da curtose  $N_2 = 2$ ,  $\beta = 1$  e  $\Gamma$  arbitrária. Sendo  $10^5$  realizações e hamiltoniano de dimensão 200. 86
- B.8 Distribuição da curtose  $N_2 = 5$ ,  $\beta = 2$  e  $\Gamma$  arbitrária. Sendo  $10^5$  realizações e hamiltoniano de dimensão 200. 86
- B.9 Distribuição da curtose  $N_2 = 1$ ,  $\beta = 4$  e  $\Gamma$  arbitrária. Sendo  $10^5$  realizações e hamiltoniano de dimensão 200. 87
- B.10 Média da curtose  $N_2 = 2$  e  $\Gamma$  arbitrária. Sendo  $10^5$  realizações e hamiltoniano de dimensão 30. 88
- B.11 Variância da curtose  $N_2 = 2$  e  $\Gamma$  arbitrária. Sendo  $10^5$  realizações e hamiltoniano de dimensão 30. 89

---

## Lista de Tabelas

---

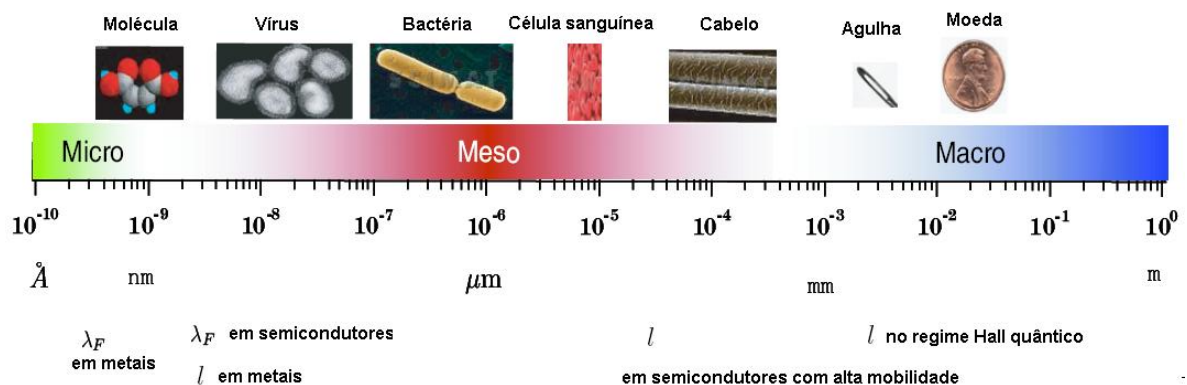
- 2.1 Resumo dos três ensembles de Wigner-Dyson. A matriz hamiltoniana  $\mathcal{H}$  (e sua matriz de autovetores  $\mathcal{U}$ ) são classificadas por um índice de  $\beta = \{1, 2, 4\}$ , dependendo da presença ou ausência de simetria de reversão temporal (SRT) e simetria de rotação de spin semi-inteiro (SRS). 18
- 3.1 Classificação de Dyson dos ensembles circulares. 32

# CAPÍTULO 1

## Introdução

### 1.1 Física Mesoscópica

O termo sistema mesoscópico foi cunhado em 1976 por N. G. van Kampen no contexto da física estatística (Meso significa meio, em grego  $\mu\epsilon\sigma\omicron\zeta$ ) [1] em um artigo que, depois de sua introdução, tem sido gradativamente reconhecido que o sistema mesoscópico deve significar um mundo físico que é estudado entre a física clássica e a quântica. Então a física mesoscópica se ocupa com o estudo das propriedades dos materiais na escala de tamanho entre o mundo Microscópico e o Macroscópico. O que se entende por microscópico é a escala de tamanho de ordem de poucos diâmetros atômicos ou do comprimento de onda de de Broglie (átomos e moléculas), estes da ordem de poucas dezenas de Angstroms ( $10^{-10}$  m). O macroscópico indicando comprimentos na escala cotidiana ou grande número de partículas (número de Avogrado  $\approx 10^{23}$  partículas) que constituem o sistema ver figura (1.1) [2].

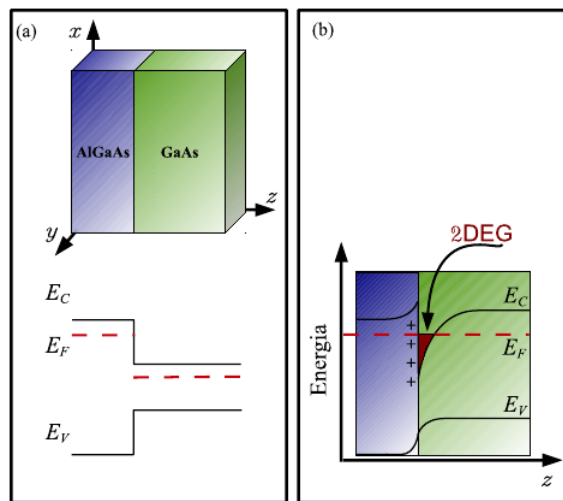


**Figura 1.1** Escalas macroscópicas, mesoscópicas e microscópicas. Onde  $\lambda_F$  é o comprimento de onda no nível de Fermi e  $l$  comprimento de espalhamento. Retirada da Ref. [2].



### 1.1.1 Gás de elétrons Bidimensional

Nanoestruturas semicondutoras tornaram-se os sistemas modelo para investigação de condução elétrica na escala mesoscópica. Esta evolução foi possível pela disponibilidade de materiais semicondutores de impureza e perfeição cristalina [3]. Tais materiais podem ser estruturados para conter uma fina camada de elétrons altamente móveis. Perpendicular à camada de movimento que é quantificada de modo que os elétrons são restritos a mover-se em um plano. Os experimentos com condutores mesoscópicos são em grande parte baseados na heteroestrutura de GaAs/AlGaAs (arseneto de gálio e arseneto dopado com alumínio) na qual uma fina camada de condução é formada na interface desses heterocompostos semicondutores. Os elétrons são confinados na interface entre o GaAs e AlGaAs, onde se movem como partículas livres e dependendo da dimensão, sem sofrer choques e sem perder a coerência de fase. Essa estrutura é conhecida como gás de elétrons bidimensional 2DEG [4].



**Figura 1.2** Na junção entre o AlGaAs e o GaAs, podemos ver o perfil das bandas de condução (linha superior), e valência (linha inferior) e suas respectivas energias,  $E_C$  e  $E_V$  além da energia de Fermi,  $E_F$ , (a) antes e (b) depois da transferência de carga, onde observamos a formação do gás de elétrons bidimensional 2DEG. Retirada da Ref. [4]

A figura 1.2 (a) mostra uma representação do 2DEG. Nessa heteroestrutura, o nível de Fermi localiza-se dentro do gap de energia, porém esse gap é maior no AlGaAs que no GaAs. Assim, o nível de Fermi do AlGaAs se encontra acima do nível de Fermi da GaAs, fazendo com que os elétrons saltem do AlGaAs, deixando-o carregado positivamente. Isso faz com que surja um potencial eletrostático que curva as bandas de energia. Após atingir o equilíbrio, a energia de Fermi fica constante em toda a heteroestrutura, e na junção aparece um poço de potencial que confina os elétrons e forma o 2DEG, conforme ilustrado na figura 1.2 (b).

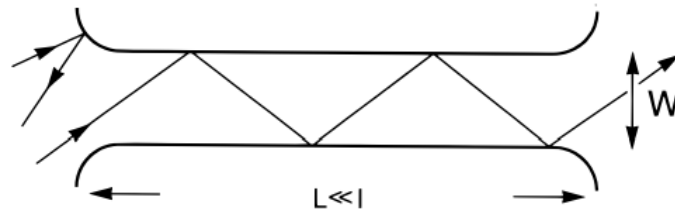
### 1.1.2 Ponto de Contato Quântico

Numa experiência, mede-se a condutância em vez da condutividade. A condutividade  $\sigma$  está relacionada com a densidade de corrente local e com o campo elétrico,  $j = \sigma \vec{E}$ , enquanto

que a condutância  $G$  relaciona a corrente total e a diferença de potencial,  $I = GV$  [3]. Para um grande condutor homogêneo, a diferença entre os dois não é essencial, uma vez que a lei de Ohm's nos diz que

$$G = \left(\frac{W}{L}\right)\sigma \quad (1.1)$$

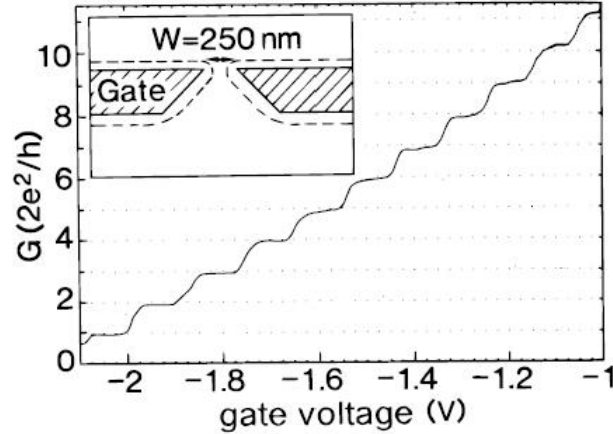
para um contato de largura  $W$  e comprimento  $L$  ilustrado na figura (1.3). (Note que  $G$  e  $\sigma$  tem as mesmas unidades em duas dimensões.) Se para o momento em que desconsiderar os efeitos da coerência de fase, a escala simples Eq. (1.1) é válida desde que ambos  $W$  e  $L$  são muito maiores do que o caminho livre médio.



**Figura 1.3** Trajetória do elétron no regime balístico. Retirada da Ref. [3].

Na escala mesoscópica, surgem novos e característicos fenômenos, que apresentam poucas partículas para aplicar os métodos da Mecânica Estatística e muitas partículas na perspectiva de uma possível descrição completamente baseada na Mecânica Quântica. Um dos mais marcantes do ponto de vista de condutores mesoscópicos trata-se do transporte com coerência dos elétrons (comprimento de coerência de fase  $l_\phi$ ) ou caminho livre médio inelástico ( $l_{in}$ ). É bem sabido que um elétron, ao se mover dentro do condutor, sofre diversos tipos de espalhamento (com rede, com impurezas, com outros elétrons, etc.). Quando as dimensões da amostra são reduzidas abaixo do caminho livre médio, o regime de transporte entra no balístico, mostrado na figura (1.3).

Rolf Landauer, no final da década de 1950 [4][5], foi talvez o primeiro a defender que, em condutores reduzidos, ocorria um transporte eletrônico onde a fase da função de onda desses elétrons não era alterada por processos de colisões elásticas, ou seja, durante um evento de colisões elásticas o vetor de onda e a energia do elétron, antes e depois da colisão, eram preservados em magnitude. Com isso, os elétrons podem atravessar todo o condutor sem perda de energia, o que permite ao elétron lembrar o seu estado de entrada ao sair do condutor, e assim pode-se estabelecer uma ligação entre os estados de entrada e os estados de saída dos elétrons. No transporte balístico, o processo de transporte deve ser visto como um processo de transmissão, é fluxo de partículas, os processos de transmissão estão intimamente relacionados ao conceito de propagação de ondas. Daí surge o caráter ondulatório do elétron, que não pode mais ser desprezado no estudo das propriedades de transporte de sistemas mesoscópicos, o contrário do que é feito em teorias clássicas do transporte eletrônico, com a teoria de Drude e a equação de Boltzmann [6][7]. Portanto, tem-se uma clara analogia entre transporte em condutores do estado sólido e propagação



**Figura 1.4** Condutância em função da voltagem de gate em um contato quântico a 0,6K(GaAs/AlGaAs). Quantização da condutância em um condutor balístico. Retirada da Ref. [9].

de ondas eletromagnéticas em guias de onda da Eletrodinâmica, e dessa forma pode-se falar em uma óptica de elétrons em sistemas mesoscópicos [8].

Os sistemas mesoscópicos apresentam fenômenos intrínsecos como *quantização da condutância* que é observada a baixas temperaturas, utilizando técnicas de *split – gate* para controlar a largura  $W$  da constricção transversal ao movimento dos elétrons. Um *gate* é um eletrodo carregado que repele os elétrons que passam pela constricção. No experimento do ano 1988 a primeira condição é satisfeita no dispositivo que tem largura  $W_{max} \approx 250nm$  e  $l = 8,6\mu m$  [9]. À medida que a largura  $W$  da constricção é reduzida (potencial de *gate* mais negativo) a condutância vai reduzindo a passos discretos de amplitudes  $\frac{2e^2}{h}$  que é conhecido como *quantum de condutância*, como mostra a figura (1.4).

A expressão clássica para condutância é

$$G = \left( \frac{2e^2}{h} \right) k_F \frac{W}{\pi} \quad (1.2)$$

que pode ser escrita como

$$G = G_0 N \quad (1.3)$$

com  $G_0 = \frac{2e^2}{h} \approx 7,75 \times 10^{-5} \Omega^{-1}$  e  $N$  o número inteiro de canais abertos que está relacionado com a largura  $W$

$$N = \text{int} \left( \frac{k_F W}{\pi} \right), \quad (1.4)$$

onde  $k_F$  é o módulo do vetor de onda de Fermi. Em metais, o valor de  $k_F$  é muito grande, logo  $N \gg 1$ , ou seja, os metais possuem alta condutância. Para semicondutores,  $k_F \approx 30nm$ , permitindo desta forma a observação da quantização da condutância [9].

Como nos sistemas mesoscópicos o elétron se move sem perder a coerência de fase, a interferência nas ondas eletrônicas se manifesta e dá origem a fenômenos ondulatórios, dentre os quais a *localização fraca*. Esse efeito se origina da interferência quântica nas trajetórias retroespalhadas ao ponto de origem das mesmas. Na ausência de um campo magnético externo, a simetria de reversão temporal é mantida. Se a coerência de fase não for destruída, a fase quântica do elétron na trajetória de retorno à origem é a mesma fase da trajetória revertida no tempo, o que gera uma interferência construtiva e aumenta a probabilidade de retorno à origem da trajetória. Isso leva a um aumento na amplitude de retroespalhamento, diminuindo a condutância. Por outro lado, se a simetria de reversão temporal for quebrada por aplicação de um campo magnético externo, as fases das trajetórias diferem, devido ao efeito Aharonov-Bohm, eliminando a interferência construtiva e aproximando a condutância do seu valor clássico. Para sistemas com interação spin-órbita e sem campo magnético externo aplicado, a interferência é destrutiva, diminuindo a probabilidade de retorno e aumentando a condutância. Este efeito é conhecido como *anti-localização fraca*. Nos dois casos, localização e anti-localização, o efeito é anulado pela aplicação de um campo magnético externo. Assim, a magnetoresistência, que é definida pela diferença entre as resistências da amostra com campo e sem campo, é positiva para sistemas com interação spin-órbita e negativa se o sistema não apresentar esta interação [10][11][12].

Quando variamos o campo magnético externo aplicado sobre a amostra, observamos flutuações intensas na condutância. Essas flutuações também aparecem quando variamos outros parâmetros do sistema, tais como energia de Fermi, configuração de impurezas, geometria da amostra dentre outras. Este foi um dos primeiros fenômenos associados com a coerência de fase eletrônica observados em problemas de transporte em condutores mesoscópicos. Os padrões provenientes dessas flutuações são aleatórios, independentes do tempo e diminuem lenta e suavemente ao aumentarmos a temperatura. Eles dependem da distribuição de impurezas e são característicos de cada amostra particular, sendo completamente reprodutíveis ao se repetir o mesmo experimento nas mesmas condições. É importante observar que ao aumentarmos a temperatura de uma amostra e depois voltarmos à temperatura inicial, muda-se a configuração de impurezas e o padrão de flutuações obtido não volta ao padrão original. Porém, a uma temperatura fixa este padrão sempre se mantém. Quantificamos a amplitude das flutuações pela variância da condutância

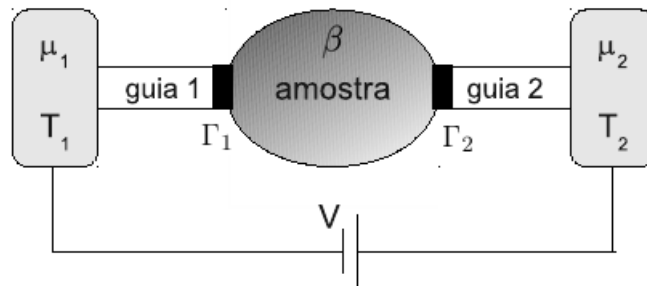
$$\text{Var}(G) \equiv \langle G^2 \rangle - \langle G \rangle^2 \propto \left( \frac{e^2}{h} \right)^2 \quad (1.5)$$

Este comportamento é universal, não dependendo de detalhes microscópicos da amostra e é conhecido por *flutuações universais da condutância* [10][13].

## 1.2 Formalismo de Landauer-Büttiker

O ponto quântico apresentado na seção 1.1.2 é o sistema fundamental para o estudo do transporte na física mesoscópica, sendo um problema de mecânica estatística

de não-equilíbrio. Landauer simplificou significativamente o problema através da substituição conceitual das fontes de elétrons por reservatórios ideais [14][15]. O sistema que encontraremos suas propriedades é um ponto quântico com dois guias acoplados que é esquematizado na figura (1.5). Nas extremidades dos guias estão os reservatórios macroscópicos que fornecem/recebem elétrons. Cada guia é caracterizado pelo número de canais de espalhamento abertos  $N_1$  e  $N_2$ .  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  são as barreiras de tunelamento. As simetrias físicas da dinâmica dos elétrons na cavidade caótica estão rotuladas por  $\beta$ . O acoplamento entre os guias e a cavidade caótica é representado por uma barreira de potencial, onde a probabilidade de tunelamento do elétron pode ser quantificada pela sua barreira.

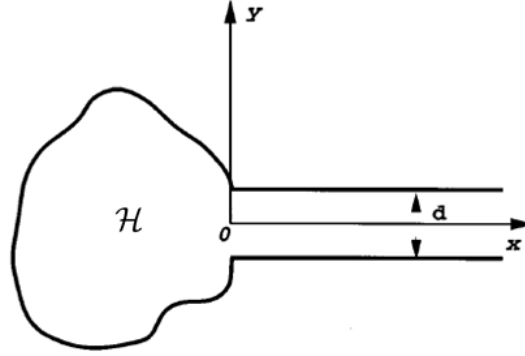


**Figura 1.5** Visão esquemática de uma cavidade caótica com as barreiras de tunelamento.

Por definição, a distribuição de elétrons e o potencial eletroquímico ficam locais, definidos inteiramente nos reservatórios considerados ideais. Os reservatórios são conectados, adiabaticamente, aos guias metálicos ideais. A cavidade bidimensional é de forma irregular, com paredes impenetráveis acoplada a dois guias de onda finitos de largura  $d$ . Os elétrons são espalhados em uma região de interação estacionária no intervalo de tempo, acoplada aos guias. Essa separação em guias e em região de espalhamento é muito conveniente, permitindo a definição de uma base apropriada de canais abertos para o espaço de Hilbert associado. Propriedades de transporte são obtidas mediante a matriz de espalhamento do sistema que será definida na subseção seguinte.

### 1.2.1 Definição da Matriz de Espalhamento

Considerando a cavidade com apenas o guia 2 acoplado (ver figura 1.6), que é o modelo geral utilizado para facilitar a dedução da fórmula de Mahaux-Weidenmüller (que será descrita na seção 2.3).



**Figura 1.6** Espalhamento de modos propagantes em um guia semi-infinito acoplado na região de interação.

Então a propagação de uma partícula quântica dentro do guia é descrito pela equação de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Psi(x, y) = E \Psi(x, y) \quad (1.6)$$

onde  $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ ,  $m$  é a massa da partícula e  $\hbar k$  o seu momento. Sendo que a solução geral dessa equação pode ser representada como um vetor de  $N_2$  componentes  $\Psi = (\Psi_1(x, y), \dots, \Psi_{N_2}(x, y))^T$  com estados quantizados na direção transversal  $y$  de largura  $d$  e são assintoticamente livres na direção  $x$ , ou seja, a equação (1.6) satisfaz a condição de contorno  $\Psi(x, y = \pm d/2) = 0$ . Resolvendo a equação de Schrödinger bidimensional podemos obter canais de espalhamento dentro dos guias. Usando a condição de contorno obtemos uma solução que corresponde a uma parte tipo onda propagante

$$\psi_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar^2 k_N/m}} [A_N \exp(-ik_N x) + B_N \exp(ik_N x)] \quad (1.7)$$

normalizada, e uma parte tipo onda estacionária

$$\phi_N(y) = \sqrt{\frac{2}{d}} \sin\left[\left(\frac{N\pi}{d}\right)\left(y + \frac{d}{2}\right)\right], \quad (1.8)$$

as soluções podem ser escritas como um produto  $\Psi_N(x, y) = \psi_N(x)\phi_N(y)$ , para  $x \geq 0$ ;  $|y| \leq d/2$ ;  $N = 1, 2, \dots, N_2$ , com o número  $N_2$  de canais abertos dado que o sistema tem energia  $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$  e que o vetor de onda  $k_N = \left[ k^2 - \left(\frac{N\pi}{d}\right)^2 \right]^{1/2}$  deve ser real para uma onda propagante, logo  $N_2$  deve ser igual ao maior inteiro menor ou igual a  $\frac{\hbar k d}{\pi}$ , de modo que  $-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\Psi_N = k_N^2 \Psi_N$ .

Na situação em que o guia de ondas está desacoplado da cavidade temos a seguinte condição de contorno

$$\left. \frac{\partial \psi_N}{\partial x} \right|_{x=0} = 0. \quad (1.9)$$

Isto significa que a partícula em cada canal é apenas refletida de volta  $-ik_N A_N + ik_N B_N = 0 \therefore A_N = B_N$ , representando a ausência de fluxo de probabilidade através da interface  $x = 0$ . A matriz  $\mathcal{S}$  correspondente relacionando os vetores amplitudes de entrada  $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots, A_{N_2})^T$  e saída  $\mathbf{B} = (B_1, B_2, \dots, B_{N_2})^T$

$$\mathbf{B} = \mathcal{S}\mathbf{A}, \quad (1.10)$$

com dimensão  $N_2 \times N_2$ . Como  $B_N = \delta_{NN_2} A_{N_2}$ , então fixada a condição de contorno de não-interação, imediatamente, concluímos que a matriz de espalhamento é matriz identidade.

Para nosso problema, que tem dois guias, é conveniente escrever a matriz de espalhamento na forma

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} r_{N_1 \times N_1} & t_{N_1 \times N_2} \\ t'_{N_2 \times N_1} & r'_{N_2 \times N_2} \end{pmatrix}, \quad (1.11)$$

onde  $r$  é a matriz de reflexão e  $t$  a de transmissão. A matriz  $\mathcal{S}$  tem dimensão  $N_T$ , onde  $N_T = N_1 + N_2$  é o número total de canais abertos.

A matriz  $\mathcal{S}$  tem simetrias que ajudam a descrever o sistema. A principal delas está relacionada a conservação da corrente que implica em

$$\mathcal{S}\mathcal{S}^\dagger = \mathbb{1} \quad (1.12)$$

ou seja, na unitariedade de  $\mathcal{S}$ . Na ausência de qualquer outra simetria, este é o único vínculo [16][17]. Para o sistema que preserva a simetria de reversão temporal  $\mathcal{S}_{rev} = \mathcal{S}$ , temos

$$\mathcal{S}_{rev} = (\mathcal{S}^*)^{-1} \quad \text{ou} \quad \mathcal{S}\mathcal{S}^* = \mathbb{1},$$

onde  $\mathcal{S}_{rev}$  é a matriz de espalhamento revertida no tempo e  $\mathcal{S}^*$  a conjugada. Essa equação, juntamente com a relação de unitariedade da equação (1.12), fornece

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}^T. \quad (1.13)$$

Portanto, a matriz de espalhamento é real e simétrica [16][17] em situações onde o spin das partículas não pode ser ignorado, como no caso de forte interação spin-órbita ou a presença de impurezas magnéticas [18]. Então os graus de liberdade de spin podem ser acoplados convenientemente no formalismo de quatérnions (subseção 2.2.4). Dessa forma, a matriz  $\mathcal{S}$ ,  $2N_T \times 2N_T$ , pode ser encarada como uma matriz  $N_T \times N_T$  de quatérnions, com  $\mathcal{S}$  sendo uma matriz auto-dual [16].

### 1.2.2 Condutância

A amostra mesoscópica (1.5) está conectada a dois reservatórios de elétrons caracterizados pelos potenciais químicos  $\mu_1$  e  $\mu_2$ , através dos quais se aplica uma diferença de potencial  $V$ , onde  $V = (\mu_1 - \mu_2)/e$ . O sistema está em equilíbrio térmico à temperatura  $T$  e as funções de distribuição dos elétrons nos reservatórios são dadas pela função de Fermi

$$f_\alpha(E) = \frac{1}{1 + e^{(E - \mu_\alpha)/k_B T}}, \quad \alpha = 1, 2. \quad (1.14)$$

Usando o formalismo de Landauer-Büttiker que consiste em relacionar as probabilidades de transporte do sistema com suas propriedades de espalhamento descritas pela matriz  $\mathcal{S}$ , podemos encontrar uma expressão para corrente no guia 1 [19][20]

$$\langle I_1 \rangle = \frac{e}{h} \int dE \text{Tr}[t(E)t^\dagger(E)][f_1(E) - f_2(E)], \quad (1.15)$$

onde

$$\begin{aligned} f_1(E) &= f(E - E_F - eV) \\ f_2(E) &= f(E - E_F) \\ f(E) &= [1 + e^{(E/k_B T)}]^{-1}. \end{aligned}$$

No regime de resposta linear

$$\begin{aligned} f_1(E) - f_2(E) &= f(E - E_F - eV) - f(E - E_F) \\ &= \int_{E_F}^{E_F + eV} dE' \frac{\partial}{\partial E'} f(E - E') \\ &\approx eV \left( -\frac{\partial}{\partial E} f(E - E_F) \right) \end{aligned}$$

então

$$\langle I_1 \rangle = \frac{e^2 V}{h} \int dE \left( -\frac{\partial}{\partial E} f(E - E_F) \right) \text{Tr}[t^\dagger(E)t(E)]. \quad (1.16)$$

A condutância, definida por  $G = \sum_{V \rightarrow 0} \langle I_1 \rangle / V$ , fica

$$G = \frac{e^2}{h} \int dE \left( -\frac{\partial}{\partial E} f(E - E_F) \right) \text{Tr}[t^\dagger(E)t(E)].$$

Em  $T = 0$  a função de Fermi fica uma função degrau,  $f(E - E_F) = \theta(E - E_F)$ . Neste caso,  $\partial f(E - E_F) / \partial E = -\delta(E - E_F)$ , e a condutância fica

$$\begin{aligned} G &= \frac{e^2}{h} \int dE \delta(E - E_F) \text{Tr}[t(E)^\dagger t(E)], \\ G &= \frac{e^2}{h} \text{Tr}[t(E_F)^\dagger t(E_F)]. \end{aligned}$$

A Eq.(1.17) relaciona a matriz de espalhamento calculada na energia de Fermi com a condutância do sistema. A matriz  $t^\dagger t$  pode ser diagonalizada e a condutância pode ser expressa em termos dos autovalores de transmissão [19][20]

$$G = G_0 \sum_{j=1}^N \tau_j, \quad G_0 = \frac{e^2}{h}. \quad (1.17)$$



Se considerarmos o spin, teremos um fator  $G_0 = \frac{2e^2}{h}$ . Também podemos definir a condutância adimensional

$$g \equiv G/G_0 = \text{Tr}(tt^\dagger) = \sum_{j=1}^N \tau_j. \quad (1.18)$$

### 1.2.3 Potência do Ruído de Disparo

A teoria de espalhamento também pode ser usada para outras propriedades de transporte como flutuações temporais da corrente, que fornecem informação adicional sobre o processo de transporte. À temperatura zero, a discreteza da carga é a única fonte das flutuações temporais da corrente. Essas flutuações são chamadas "ruído de disparo" para diferenciá-las das flutuações térmicas que ocorrem para temperaturas não nulas [21][22][23]. Outra diferença entre os dois é que o ruído de disparo é proporcional à voltagem, enquanto o ruído térmico ocorre a  $V = 0$ . O ruído de disparo é então um fenômeno intrinsecamente de não-equilíbrio e fornece informações sobre a correlação entre as cargas devido ao princípio de Pauli. A expressão já conhecida na literatura [19][20] para potência do ruído de disparo é

$$P = 2\frac{e^2}{h} \int dE \{ [f_1(1-f_2) + f_2(1-f_1)] \text{Tr}(tt^\dagger rr^\dagger) + [f_1(1-f_1) + f_2(1-f_2)] \text{Tr}(tt^\dagger tt^\dagger) \} \quad (1.19)$$

Em  $T = 0$ , a função de distribuição de Fermi é uma função degrau,  $f_\alpha = \theta(\mu_\alpha - E)$ . No regime de resposta linear a Eq. (1.19) fornece a relação

$$P = \frac{2e^3|V|}{h} \text{Tr}(tt^\dagger rr^\dagger), \quad (1.20)$$

onde as matrizes  $t$  e  $r$  são calculadas na energia de Fermi. Definindo  $P_0 = 2e^3|V|/h$ , temos a potência do ruído de disparo adimensional

$$p = \frac{P}{P_0} = \text{Tr}(tt^\dagger rr^\dagger) = \sum_{j=1}^N \tau_j(1 - \tau_j), \quad (1.21)$$

onde usamos os autovalores de transmissão. Observe que o ruído de não-equilíbrio (de disparo) não é simplesmente determinado pela condutância. Em vez disso, ele é determinado pela soma dos produtos das probabilidades de transmissão e reflexão dos autocanais.

## 1.3 Teoria de Levitov-Lesovik

Qualquer medida experimental é de fato um resultado da média de muitas leituras de um dispositivo de medição. Isso ocorre porque as leituras diferem ou flutuam, mesmo se os parâmetros que controlam a situação física não mudarem. Cada leitura aleatória, sendo

um resultado da interação entre muitos fatores além do nosso controle. Um exemplo de transporte quântico é a medição da corrente elétrica de uma nanoestrutura a uma dada tensão. A transferência de elétrons é um processo estocástico, e o número de elétrons que atravessam a nanoestrutura durante um determinado intervalo de tempo  $\Delta T_0$  é aleatório. Mesmo se medir a corrente com um amperímetro ideal, as leituras poderiam ser diferentes [24].

Por completa analogia com a estatística de contagem de fóton em ótica quântica, a estatística de contagem de elétrons foi desenvolvida por Levitov e Lesovik, na referência [25]. A seguir vamos primeiro entender os elementos de teoria de probabilidade, para então encontrar os cumulantes de interesse.

### 1.3.1 Elementos de Teoria de Probabilidade

Além da média, podemos conhecer a distribuição dos resultados. Então seja  $P_n$  a probabilidade de  $n$  eventos acontecerem durante  $\Delta T_0$ . Logicamente, a distribuição de probabilidade é normalizada  $\sum_n P_n = 1$  e com ela podemos estimar qualquer cumulante da distribuição. O primeiro cumulante é a *média* distribuição de probabilidade

$$\langle n \rangle = \sum_n n P_n,$$

o segundo é a *variância*, quantidade que caracteriza a largura da f.d.p.

$$\langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2,$$

o terceiro é a *assimetria* da f.d.p. que é positiva (negativa) quando a cauda longa está a direita (esquerda) da média

$$\langle (n - \langle n \rangle)^3 \rangle = \langle n^3 \rangle - 3 \langle n \rangle \langle n^2 \rangle + 2 \langle n \rangle^3,$$

e o quarto cumulante é a *curtose*, que fornece uma medida do achatamento ou "agudeza" da função em relação à distribuição normal

$$\langle (n - \langle n \rangle)^4 \rangle = \langle n^4 \rangle - \langle n^2 \rangle^2 - 4 \langle n \rangle \langle n^3 \rangle + 12 \langle n \rangle^2 \langle n^2 \rangle - 6 \langle n \rangle^4.$$

F.d.p's com alta curtose tem um pico agudo e caudas cheias ou gordas, enquanto distribuições com baixa curtose tem um pico mais arredondado e caudas finas ou magras. A média de qualquer função  $n$  é dada por  $\langle F(n) \rangle = \sum_n F(n) P_n$ .

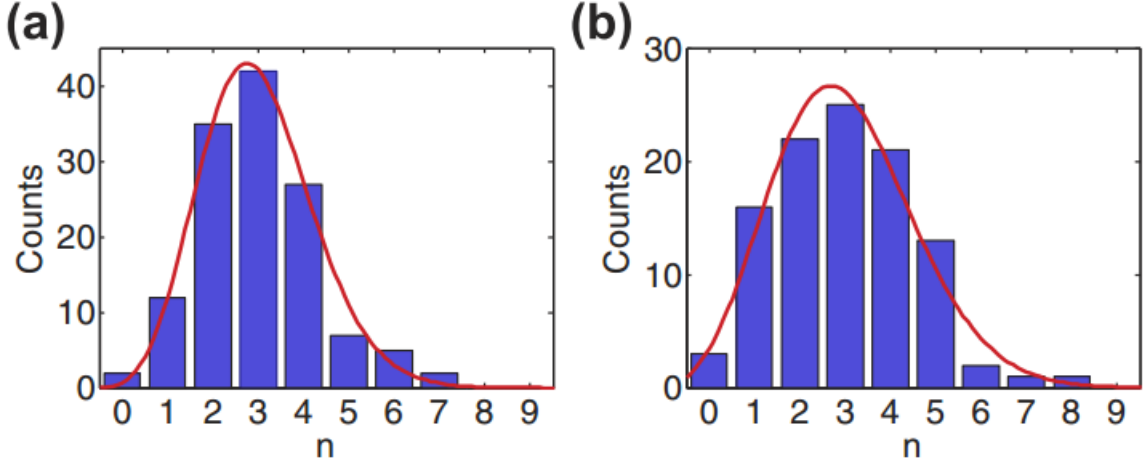
Nem sempre a distribuição de probabilidade fornece a descrição estatística mais conveniente. Alternativamente podemos usar a função geratriz  $\chi(\lambda)$  da distribuição de probabilidade, associado ao processo de medição estendido no tempo. A relação entre  $P_n$  e  $\chi(\lambda)$  é

$$\chi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\lambda} P_n. \quad (1.22)$$

A equação (1.22) também permite conexão direta com as características estatísticas da distribuição  $P_n$ . Para isso, vamos fazer a seguinte expansão

$$\ln\chi(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \frac{(i\lambda)^k}{k!} \quad (1.23)$$

onde  $q_k$  denota os cumulantes. Um experimento típico é detectar a distribuição de contagem de elétrons, que pode ser visto na referência [26] e a curva experimental é apresentada na figura (1.7).



**Figura 1.7** Os gráficos exibem a distribuição estatística experimental da contagem de  $n$  elétrons entrando em um ponto quântico durante um um intervalo de tempo de observação  $\Delta T_0$ . Os dois painéis, (a) e (b), diferem por valores de tensão nos "gates"(portões de entrada e saída de elétrons). O  $\Delta T_0$  é escolhido de maneira que os dois painéis exibam a mesma média  $\langle n \rangle = 3$ . As curvas vermelhas são as esperadas pela estatística de contagem de Levitov-Lesovik. A figura foi adaptada da referência [26].

### 1.3.2 Cumulantes da Estatística de Contagem de Carga

Vamos considerar o caso interessante de uma distribuição na qual existem  $M_0$  tentativas independentes de transmissão de carga. Todas as tentativas independentes de transmissão de carga. Cada tentativa tem a probabilidade  $g$  de sucesso e  $1 - g$  de fracasso. Sendo assim, a probabilidade de  $k$  tentativas de sucesso é dada por  $C_{M_0}^{(k)} = N!/[k!(N - k)!]$  e a distribuição de probabilidade é binomial  $P_k = C_{M_0}^{(k)} g^k (1 - g)^{M_0 - k}$ . Assim a função geratriz e a função características dos cumulantes (o logaritmo da função geratriz), são, respectivamente,

$$\chi(\lambda) = (ge^{i\lambda} + 1 - g)^{M_0},$$

$$\begin{aligned} \ln\chi(\lambda) &= N \ln(ge^{i\lambda} + 1 - g) = gN(i\lambda) + (g - g^2)N \frac{(i\lambda)^2}{2!} + (2g^3 - 3g^2 + g)N \frac{(i\lambda)^3}{3!} \\ &+ (-6g^4 + 12g^3 - 7g^2 + g)N \frac{(i\lambda)^4}{4!} + \dots, \end{aligned} \quad (1.24)$$

ou seja,  $q_1 = gN$ ,  $q_2 = (g - g^2)N$ ,  $q_3 = (2g^3 - 3g^2 + g)N$  e  $q_4 = (-6g^4 + 12g^3 - 7g^2 + g)N$  são os quatro primeiros cumulantes para a distribuição binomial de um único canal. A distribuição binomial anterior descreve as tentativas de transmissão de um único canal. A distribuição binomial anterior descreve as tentativas de um único elétron "monocromático" (um único canal eletrônico) em uma corrente a uma temperatura nula. A generalização da distribuição binomial para múltiplos canais seguindo distribuições binomiais independentes é

$$\chi(\lambda) = \prod_{j=1}^N (\tau_j e^{i\lambda} + 1 - \tau_j)^{M_0} = \prod_{j=1}^N (1 + \tau_j (e^{i\lambda} - 1))^{M_0}, \quad (1.25)$$

onde  $M_0 = eV\Delta T_0/h \gg 1$  é o número de tentativas de transmissão de elétrons durante  $\Delta T_0$ , para um sistema com uma diferença de potencial  $V$ . A função características  $\Xi(\lambda)$  e os cumulantes irreduzíveis são obtidos, imediatamente, da equação (1.25). Podemos escrevê-los, respectivamente, como

$$\Xi(\lambda) = M_0 \sum_{j=0}^N \ln[1 + \tau_j (e^{i\lambda} - 1)], \quad q_k = \left. \frac{d^k}{d(i\lambda)^k} \Xi(\lambda) \right|_{\lambda=0}. \quad (1.26)$$

O primeiro cumulante  $q_1$  para o sistema do ponto de contato com um fluxo de corrente pode ser obtido da equação (1.26). Usando o bloco de transmissão da matriz de espalhamento, obtemos

$$q_1 = M_0 \sum_{j=1}^N \tau_j = M_0 \text{Tr} tt^\dagger, \quad (1.27)$$

ou seja, o primeiro cumulante  $g \equiv q_1/M_0$  é justamente, a *condutância* adimensional de Landauer-Büttiker e está ligado a média da distribuição da corrente, pois  $\langle I \rangle = GV$ . O segundo cumulante, dado por

$$q_2 = M_0 \sum_{j=1}^N \tau_j (1 - \tau_j) = M_0 \text{Tr} [tt^\dagger (1 - tt^\dagger)], \quad (1.28)$$

é uma medida da largura da distribuição. O seu corresponde adimensional  $p = q_2/M_0$  é chamada, na literatura, de *potência do ruído do disparo* e representa a variância da corrente, que é uma medida comum do ponto de vista experimental. O terceiro cumulante fica dado por  $q_3 = M_0 \text{Tr} [tt^\dagger (1 - tt^\dagger) (1 - 2tt^\dagger)]$  está ligado a *assimetria* da distribuição de corrente (determinada experimentalmente em [27]) e o quarto cumulante  $q_4 = M_0 \text{Tr} [tt^\dagger (1 - tt^\dagger) (1 - 6tt^\dagger + 6tt^{\dagger 2})]$  é a *curtose* que representa o achatamento da curva de distribuição de corrente.

Para  $M_0 = 1$  os quatro primeiros cumulantes adimensionais são

$$q_1 \equiv g = \sum_{j=1}^N \tau_j, \quad (1.29)$$

$$q_2 \equiv p = \sum_{j=1}^N \tau_j(1 - \tau_j), \quad (1.30)$$

$$q_3 \equiv \xi = \sum_{j=1}^N \tau_j(1 - \tau_j)(1 - 2\tau_j), \quad (1.31)$$

$$q_4 \equiv \kappa = \sum_{j=1}^N \tau_j(1 - \tau_j)(1 - 6\tau_j + 6\tau_j^2). \quad (1.32)$$

E de forma geral os cumulantes da estatística de contagem de carga são dados por [29]

$$q_k = \sum_{i=1}^N \left( \tau(1 - \tau) \frac{d}{d\tau} \right)^{k-1} \Big|_{\tau=\tau_i}. \quad (1.33)$$

## 1.4 Uma Breve História da Cavidade com Contato Não Ideal

Um problema fundamental de um sistema mesoscópico é determinar a distribuição completa da condutância. Os primeiros trabalhos foram focados em um conjunto de fios desordenados [30]. No início década de 90, verificou-se que um ponto quântico tem uma distribuição de condutância qualitativamente diferente [31]-[33]. Baranger e Mello [32], e Jalabert, Pichard e Beenakker [33] iniciada a partir da Teoria de Matrizes Aleatórias (TMA) [34]. A matriz de espalhamento  $\mathcal{S}$  do ponto quântico foi assumida como um membro do ensemble circular a matriz unitária, como é apropriada para um bilhar caótico [35][36]. No caso de um único canal ( $N_1 = N_2 = 1$ ), a distribuição  $P(g)$  da probabilidade de transmissão  $g$  foi encontrada

$$P(g) = \frac{1}{2} \beta g^{(-1+\beta/2)}. \quad (1.34)$$

A equação (1.34) foi encontrada compatível com simulações numéricas de transmissão de uma mesa de bilhar caótico conectados a cabos de forma ideais que tem um único modo de propagação [32]. Previously, Prigodin, Efetov e Iida [31] tinha aplicado o método de supersimetria para o mesmo problema, mas com um modelo diferente para os contatos pontuais. Eles consideraram o caso da quebra de simetria de reversão temporal ( $\beta = 2$ ), para que a equação (1.34) poderia prever uma distribuição uniforme da condutância. Em vez disso, a distribuição da Ref. [31] está fortemente com pico próximo de zero condutância. A extremidade da distribuição (para a transmissão da unidade) é governada por tunelamento ressonante, e é consistente com trabalhos anteriores por Jalabert, Stone e Alhassid [37] sobre o tunelamento ressonante no regime Colomb-blockade.

Para preencher uma lacuna dessas teorias, em 1994 Brouwer e Beenakker [38] considera um modelo mais geral para o acoplamento do ponto quântico com os dois reservatórios,

em vez de assumir acoplamentos ideais como nas referências [32] e [33]. Brouwer [38] assumiu o acoplamento que permitem uma probabilidade de transmissão  $\Gamma$  do modo de propagação no guia, eles calcularam a distribuição da condutância de um ponto quântico conectado a dois reservatórios de elétrons por guias com único modo de propagação, por meio de uma probabilidade de transmissão  $\Gamma$  arbitrária com modo sendo no limite  $\Gamma \ll 1$ . Em um cálculo numérico [30], é possível encontrar  $P(g)$  com  $0 \leq g \leq 1$ . Na seção 2.3 comentaremos seus resultados e compararemos com a abordagem hamiltoniana que será utilizada para testar os resultados analíticos.

Em 1996, Barrager e Mello [39] encontraram uma expressão analítica para a distribuição da condutância com  $N_1 = N_2 = 1$  que será reproduzida em termos de  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , para isso usaremos a referência [40] publicada em 1999 por também Baranger e Mello. Nesse trabalho, fizeram uma abordagem da teoria da informação. A partir da distribuição de  $\mathcal{S}$ , encontraram a distribuição da condutância quântica das cavidades para os casos tanto de ausência quanto presença de processos diretos. No caso da presença de processos diretos, reproduziremos os resultados analíticos de [39] em função de  $\Gamma$  na seção 4.4 e ainda encontraremos novos resultados analíticos que foram comparadas com a abordagem hamiltoniana e com os resultados da referência [30].

No ano de 2012, Vidal e Kanziper [41] fizeram uma abordagem da matriz de espalhamento empregada para determinar a função de densidade de probabilidade conjunta dos autovalores de reflexão, sob hipótese de simetria de reversão temporal da cavidade quebrada ( $\beta = 2$ ). Eles encontraram a distribuição da condutância somente para ( $\beta = 2$ ), com ( $N_1 \leq N_2$ ) e  $\Gamma_2 = 1$ , ou seja, o acoplamento do guia 2 ideal.

## 1.5 Estrutura da Dissertação

O que caracteriza essencialmente o processo de espalhamento é a matriz de espalhamento que relaciona as ondas espalhadas com as incidentes. Devido à natureza caótica da dinâmica, a matriz  $\mathcal{S}$  comporta-se de forma irregular quando parâmetros das ondas incidentes (energia, por exemplo) ou da região de espalhamento (forma ou intensidade do potencial espalhador, intensidade de um campo magnético aplicado, etc.) variam suavemente. Dessa forma, uma descrição estatística baseada em distribuições e funções de correlação torna-se mais apropriada [19].

Uma ferramenta teórica bastante útil para o estudo de propriedades estatísticas de sistemas quânticos abertos exibindo espalhamento caótico é a TMA. Originalmente desenvolvida por Wigner e Dyson para descrever flutuações no espectro de ressonância em núcleos pesados, tem sido amplamente usada em física mesoscópica, sendo a universalidade dos fenômenos de interferência quântica, observada em tais sistemas, intimamente associada à universalidade das propriedades estatísticas dos autovalores e autovetores de matrizes aleatórias grandes [19].

Existem dois métodos para se obter a TMA da matriz  $\mathcal{S}$  de um cavidade caótica. O primeiro que será apresentado na capítulo 2 usa a fórmula de Mahaux-Weidenmüller, na qual a matriz  $\mathcal{S}$  é expressa em termos do sistema fechado, modelado como um membro dos Ensembles Gaussianos da TMA, e de uma matriz fenomenológica que descreve o aco-

plamento da cavidade com os guias. Para testar essa abordagem hamiltoniana, na seção 2.4 iremos comparar com resultados analíticos consolidados da referência [38]. O segundo método que será apresentado no capítulo 3 consiste em aplicar a TMA diretamente à matriz de espalhamento através do uso de um princípio de máxima entropia, sem nenhuma referência ao Hamiltoniano. Devido ao acoplamento ser não ideal, apresentaremos nesse mesmo capítulo o Núcleo de Poisson. Como os dois métodos são equivalentes [42][43], ambos serão comparados para testar os resultados exatos.

No capítulo 4, generalizaremos os resultados da distribuição da condutância de Vidal e Kanzieper para  $\beta = \{1, 2, 4\}$ , onde  $N_1 \leq N_2$  e o acoplamento do guia 2 ideal. Construiremos a distribuição da condutância para  $N_1 = 1$  e compararemos com a abordagem hamiltoniana do capítulo 2. Ainda encontraremos a média e a variância para os casos específicos da condutância na seção 4.1, assim como a distribuição da potência do ruído do disparo e as suas respectivas médias e variâncias na seção 4.2. Encontraremos também a distribuição da assimetria através de um integral numérica na seção 4.3, sua média e variância será encontrada no apêndice C, assim como a distribuição da curtose e sua média e variância. Todos os resultados serão testados pela abordagem numérica.

Na seção 4.4 observaremos resultados calculados de maneira distinta aos das seções anteriores, mas com o mesmo resultado analítico para casos particulares da generalização. Ainda faremos contribuições a literatura para o sistema como  $N_1 = N_2 = 1$  e  $\Gamma_1 = \Gamma_2$ . Por fim, no capítulo 5 apresentaremos as conclusões a respeito dos resultados encontrados e as perspectivas.

---

### Abordagem Hamiltoniana

---

Desde os anos 1950, quando Wigner e Dyson iniciaram a teoria de matrizes aleatória como uma ferramenta para análise estatística dos espectros de ressonâncias de núcleos pesados, a teoria de matrizes aleatórias tem encontrado aplicações em muitos ramos da física, incluindo física nuclear, atômica e molecular, sistemas mesoscópicos desordenados, caos quântico, gravitação quântica bidimensional, etc [44][34]. Essa teoria é bastante útil para descrever sistemas onde a informação microscópica é pouco conhecida ou até mesmo inacessível. Todo sistema quântico é descrito por um operador Hamiltoniano que pode ser representado por uma matriz. Para sistemas quânticos complexos, como um núcleo pesado, esta matriz é muito complicada e não conhecemos todos os seus detalhes. A idéia básica da teoria é substituir a matriz hamiltoniana por um membro de um ensemble de matrizes aleatórias consistentes com as simetrias do problema (reversão temporal e rotação de spin), a partir das quais determinamos as funções de correlação dos autovalores e autovetores.

Sistemas caóticos e regulares são descritos por estatísticas distintas [45][28][46][47][48]. No regime de caos quântico<sup>1</sup> na cavidade, podemos fazer uso da TMA, usando a abordagem hamiltoniana, onde uma matriz pertencente aos ensembles gaussianos representa o hamiltoniano da cavidade.

Apresentaremos na próxima seção o Hamiltoniano da região de interação, através dos *Ensembles Gaussianos*. A fórmula de Mahaux-Weidenmüller, que será deduzida analiticamente na seção 2.2, é uma espécie de mudança de variável para encontrar a matriz de espalhamento em termos do hamiltoniano. A partir dessa matriz  $\mathcal{S}$  encontraremos os blocos de transmissão e reflexão, e como consequência os observáveis. Na seção 2.3, faremos a comparação da abordagem hamiltoniana (método 1) com os resultados exatos

---

<sup>1</sup>O princípio da correspondência da mecânica quântica estabelece que as propriedades clássicas de um sistema devem surgir a partir de sua descrição quântica no limite em que a constante de Planck tende a zero. Isso tem motivado o estudo de sistemas quânticos que são caóticos no limite clássico. A Dinâmica quântica neste regime é denominada caos quântico [46][28].



(método 2) consolidados da referência [30].

## 2.1 Ensembles Gaussianos

A dinâmica no interior da cavidade pode ser descrita por uma matriz hamiltoniana  $\mathcal{H}$  aleatória  $M \times M$ , pertencente ao ensemble gaussiano que satisfaz á seguinte distribuição

$$P(\mathcal{H}) = \exp\left(-\frac{\beta M}{4\lambda^2} \text{Tr}\mathcal{H}^2\right). \quad (2.1)$$

Onde  $\mathcal{H}$  possui classes de universalidades que dependem de vínculos e simetrias da cavidade, que tem índice  $\beta$ . As classes mais comuns são as de Wigner-Dyson (WD), usadas para descrever o transporte de cargas não interagentes no regime balístico. A classe ortogonal se aplica a cavidades que possuem simetria de reversão temporal e de rotação de spin. A classe unitária é aplicada em cavidades onde existe a quebra de reversão temporal, causada, por exemplo, pela aplicação de um forte campo magnético [18]. Finalmente, a classe simplética descreve sistemas com simetria de reversão temporal, na ausência de invariância de rotação de spin.

$\beta$	SRT	SRS	$\mathcal{H}$	$\mathcal{U}$	Ensemble
1	Sim	Sim	Real	Ortogonal	<b>EGO</b>
2	Não	Irrelevante	Complexo	Unitária	<b>EGU</b>
4	Sim	Não	Quatérnion Real	Simplética	<b>EGS</b>

**Tabela 2.1** Resumo dos três ensembles de Wigner-Dyson. A matriz hamiltoniana  $\mathcal{H}$  (e sua matriz de autovetores  $\mathcal{U}$ ) são classificadas por um índice de  $\beta = \{1, 2, 4\}$ , dependendo da presença ou ausência de simetria de reversão temporal (SRT) e simetria de rotação de spin semi-inteiro (SRS).

Nas subseções seguintes serão apresentadas as funções densidade de probabilidade (f.d.p.) conjunta de  $\mathcal{H}$ , juntamente com as variâncias dos elementos da diagonal e dos triangulares. Ainda a construção das matrizes pertencente a cada ensemble gaussiano e sua implementação.

### 2.1.1 Ensemble Gaussiano Ortogonal

Nessa subseção vamos começar estudando matrizes hermitianas com todas as entradas reais, ou equivalentemente, matrizes simétricas reais. Uma determinada matriz  $\mathcal{H}$  simétrica real  $M \times M$  pertence ao Ensemble Gaussiano Ortogonal (**EGO**) se os elementos da diagonal e os triangulares superiores forem escolhidos de forma independente.

Como  $\mathcal{H} = \mathcal{H}^\dagger$  temos que

$$\text{Tr}\mathcal{H}^2 = \sum_{ij} |H_{ij}|^2 = \sum_i H_{ii}^2 + 2 \sum_{i<j} H_{ij}^2, \quad (2.2)$$

então a f.d.p. conjunta de todos os elementos independentes é

$$P(\mathcal{H}) = \prod_i \exp\left(-\frac{M}{4\lambda^2} H_{ii}^2\right) \prod_{i<j} \exp\left(-\frac{M}{2\lambda^2} H_{ij}^2\right). \quad (2.3)$$

Sendo  $\mathcal{H}$  um membro do **EGO** e seja  $\mathbf{O}$  uma matriz ortogonal real  $M \times M$ . Tem-se  $P(\mathbf{O}^T \mathcal{H} \mathbf{O}) = P(\mathcal{H})$ .

Os elementos independentes são distribuídos de forma gaussiana, com a variância diferente para as entradas diagonais e não diagonais

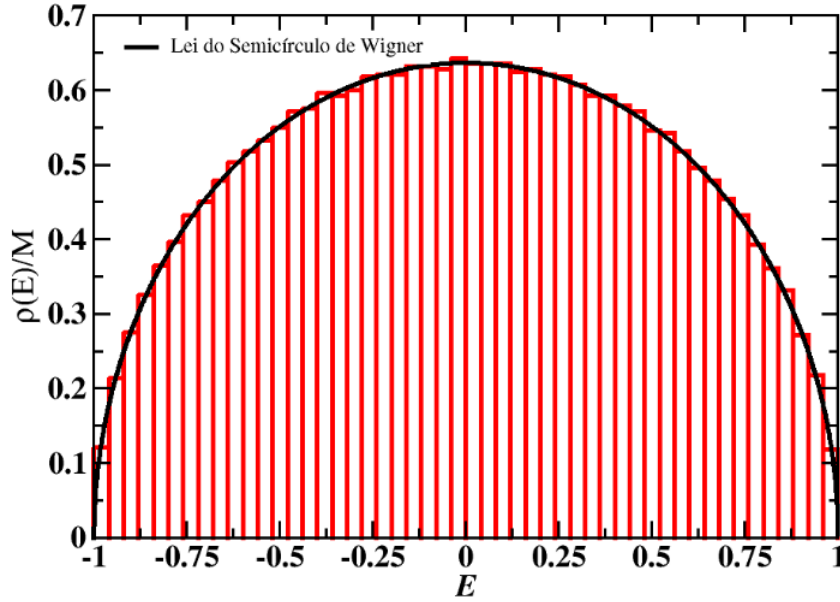
$$\begin{aligned} \langle H_{ij} \rangle &= 0 \\ \langle H_{ij}^2 \rangle &= \begin{cases} \frac{2\lambda^2}{M} & i = j, \\ \frac{\lambda^2}{M} & i \neq j. \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, uma construção equivalente de matriz que pertença ao **EGO** é deixar  $\mathbf{X}$  ser uma matriz aleatória  $M \times M$  de padrões gaussianos normais independentes  $N[0, 1]$  para formar  $\mathcal{H} = \sqrt{\frac{\lambda^2}{2M}} (\mathbf{X} + \mathbf{X}^\dagger)$ .

A densidade de autovalores de energia para o ensemble Gaussiano é conhecida como a lei do semicírculo de Wigner [19], e dada por

$$\rho(E) = \frac{M}{2\pi\lambda^2} \sqrt{4\lambda^2 - E^2},$$

onde o parâmetro  $\lambda$  controla o espaçamento médio  $\Delta = \pi\lambda/M$  na origem  $E = 0$ .



**Figura 2.1** Densidade de autovalores para um Hamiltoniano pertencente ao **EGO** com  $M = 7000$ , confirmando a lei do semicírculo de Wigner (curva preta).

Escolhendo  $\lambda = 0.5$ , os autovalores ficam distribuídos no intervalo  $(-1, 1)$  e o limite  $M \rightarrow \infty$  é atingido elevando-se a dimensão da matriz. A figura (2.1) mostra a densidade de autovalores para um matriz  $7000 \times 7000$ .

### 2.1.2 Ensemble Gaussiano Unitário

Para um sistema quântico, sem simetria de reversão temporal a única restrição na matriz hermitiana complexa usada para modelar a parte discreta do espectro de energia é que duas matrizes relacionadas por uma transformação de similaridade de operadores unitários tem a mesma f.d.p. conjunta para os elementos. Esta exigência é satisfeita pela seguinte escolha do ensemble de matriz. Sendo  $\mathcal{H}$  uma matriz aleatória  $M \times M$  hermitiana, pertence ao Ensemble Gaussiano Unitário (**EGU**) se os elementos diagonais (que deve ser real) e os elementos triangulares superiores  $H_{ij} = H_{ij}^{(0)} + iH_{ij}^{(1)}$  forem escolhidos de forma independentes.

Como  $\mathcal{H} = \mathcal{H}^\dagger$  temos que

$$\text{Tr}\mathcal{H}^2 = \sum_{ij} |H_{ij}|^2 = \sum_i H_{ii}^2 + \sum_{i<j} \{ [Re(H_{ij})]^2 + [Im(H_{ij})]^2 \},$$

então a f.d.p. conjunta de todos os elementos independentes é

$$P(\mathcal{H}) = \prod_i \exp\left(-\frac{M}{2\lambda^2} H_{ii}^2\right) \prod_{i<j} \exp\left\{-\frac{M}{\lambda^2} [Re(H_{ij})]^2\right\} \exp\left\{-\frac{M}{\lambda^2} [Im(H_{ij})]^2\right\}.$$

segue imediatamente, que a invariância  $P(\mathbf{U}^{-1}\mathcal{H}\mathbf{U}) = P(\mathcal{H})$  para qualquer matriz unitário  $\mathbf{U}$ .

Assim como no **EGO**, os elementos independentes são distribuídos de forma gaussiana, com a variância diferente para as entradas diagonais e não diagonais

$$\langle H_{ij} \rangle = 0$$

$$\langle [Re(H_{ij})]^2 \rangle = \langle [Im(H_{ij})]^2 \rangle = \begin{cases} \frac{2\lambda^2}{M} & i = j, \\ \frac{\lambda^2}{M} & i \neq j. \end{cases}$$

Então usando  $X$  e  $Y$  com entradas  $N[0,1]$  e dimensão  $M \times M$ ,  $\mathcal{H}$  pode ser especificado em termos de uma matriz complexa  $\mathbf{Z} = X + iY$ , de acordo com  $\mathcal{H} = \sqrt{\frac{\lambda^2}{4M}}(\mathbf{Z} + \mathbf{Z}^\dagger)$ .

### 2.1.3 Ensemble Gaussiano Simplético

Uma matriz  $\mathcal{H}$  ( $2M \times 2M$ ) pode ser vista como uma matriz  $M \times M$ , com elementos que consistem em blocos  $2 \times 2$  da forma,

$$\begin{bmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

onde  $z$  e  $w$  são números complexos. A matriz ( $2 \times 2$ ) neste formato é chamada de matriz quatérnio real<sup>2</sup>, onde os seus elementos são denotados por  $q$  e os de sua dual<sup>3</sup> por  $q^D$ . A

<sup>2</sup>Uma matriz de quatérnios tem elementos  $q = a\mathbb{1} + i\sigma_x + i\sigma_y + i\sigma_z$ , onde  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\sigma_x, \sigma_y$  e  $\sigma_z$  são as matrizes de Pauli e  $a, b, c$ , e  $d$  são escalares.

<sup>3</sup>O dual  $q^D$  de uma matriz  $q$  de quatérnios tem elementos  $q^D = a\mathbb{1} - i\sigma_x - i\sigma_y - i\sigma_z$ . Se  $q^D = q$ ,  $q$  é dita auto-dual.

dual de 2.4 é dada por

$$\begin{bmatrix} \bar{z} & -w \\ \bar{w} & z \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Como  $\mathcal{H} = \mathcal{H}^\dagger$  temos que

$$\text{Tr}\mathcal{H}^2 = 2 \sum_i [H_{ii}^{(0)}]^2 + 4 \sum_{i < j} \left( [H_{ij}^{(0)}]^2 + [H_{ij}^{(1)}]^2 + [H_{ij}^{(2)}]^2 + [H_{ij}^{(3)}]^2 \right),$$

então a f.d.p. conjunta de todos os elementos independentes do Ensemble Gaussiano Simplético (**GSE**) é dada por

$$\begin{aligned} P(\mathcal{H}) &= \prod_i \exp\left(-\frac{2M}{\lambda^2} H_{ii}^2\right) \prod_{i < j} \exp\left\{-\frac{M}{\lambda^2} [H_{ij}^{(0)}]^2\right\} \exp\left\{-\frac{M}{\lambda^2} [H_{ij}^{(1)}]^2\right\} \\ &\exp\left\{-\frac{M}{\lambda^2} [H_{ij}^{(2)}]^2\right\} \exp\left\{-\frac{M}{\lambda^2} [H_{ij}^{(3)}]^2\right\}. \end{aligned}$$

A matriz  $\mathcal{H}$  com elementos quartérnios reais, pertencente ao **EGS**, pode ser construída com as matrizes  $\mathbf{Z} = H_{ij}^{(0)} + iH_{ij}^{(1)}$  e  $\mathbf{W} = H_{ij}^{(2)} + iH_{ij}^{(3)}$  com entradas reais,  $\mathcal{H} = \sqrt{\frac{\lambda^2}{8M}}(\mathbf{Y} + \mathbf{Y}^\dagger)$ , onde

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z} & \mathbf{W} \\ -\bar{\mathbf{W}} & \bar{\mathbf{Z}} \end{bmatrix}.$$

## 2.2 Fórmula de Mahaux-Weidenmüller

Nessa seção estudaremos o problema de espalhamento quântico seguindo o modelo de Mahaux-Weidenmüller para o caso de uma cavidade caótica acoplada a dois terminais. Porém faremos a simplificação de apenas o guia 2 acoplado, para facilitar a dedução, como foi descrito na subseção 1.2.1, assim como a adaptação para dois guias. O modelo de Mahaux-Weidenmüller fornece uma abordagem hamiltoniana e descreve o espalhamento de canais de propagação eletrônicos por um ponto quântico com um número muito grande de ressonâncias. Os canais de espalhamento não têm "reação direta", o que implicará em certas condições de ortogonalidade sobre o acoplamento entre os canais e os modos ressonantes. Consideraremos o limite universal de uma distribuição aleatória de estados ressonantes. No limite universal, escolheremos, sem perda de generalidade, um ensemble gaussiano para a distribuição. Será usada as referências [49][50] como base para dedução da fórmula de Mahaux-Weidenmüller.

### 2.2.1 Descrição Geral do Modelo

É natural supor que evento de espalhamento é sempre confinado dentro de uma parte compacta do espaço disponível que é chamada de "região de interação" com um hamiltoniano  $\mathcal{H}$  associado. Fora dessa "região de interação", o espalhamento está ausente e

seus subprodutos dessa interação apresentam um movimento livre caracterizado por um conjunto de números quânticos que descrevem o estado quântico interno de cada subproduto, sendo que estes números quânticos especificam os estados em que as partículas podem ser encontradas muito antes ou muito depois do espalhamento. Considere em particular o modelo da figura 1.6, o qual consiste de modos propagantes ao longo de um guia semi-infinito com largura  $d$ . Os modos propagantes são quantizados ao longo da direção transversal. Assumindo que exatamente  $N_2$  canais estão abertos no guia com energia específica  $E$ . Na região assintótica existirá, portanto, um conjunto de estados de espalhamento denotados por  $|n, E\rangle; n = 1, \dots, N_2$  com normalização

$$\langle n, E_1 | n, E_2 \rangle = \delta_{nN_2} \delta(E_1 - E_2).$$

Um conjunto análogo, mas discreto, de estados ortogonais  $|\mu\rangle; n = 1, 2, \dots, M$  está associado com a região compacta de interação.

Na ausência de acoplamento entre o conjunto de estados do fio (guia) e da região de interação e da região de canais abertos, o hamiltoniano do sistema tem a forma

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{\mu\nu} |\mu\rangle \mathcal{H}_{\mu\nu} \langle \nu| + \sum_n \int |n, E\rangle E \langle n, E| dE; \quad (2.6)$$

onde a integração é realizada sobre a região de energia onde um determinado canal  $n$  está aberto. O modelo é simplificado por negligenciar qualquer acoplamento direto entre diferentes canais, daí o termo correspondente na equação 2.6 é diagonal em  $n$ . O primeiro termo descreve a representação em uma base arbitrária do hamiltoniano  $\mathcal{H}$  da região de interação, a qual contém  $M \gg 1$  auto-estados. O segundo termo do hamiltoniano contém os estados da região de canais abertos. Para descrever o acoplamento entre os canais de entrada com os auto-estados de  $\mathcal{H}$  (criando canais de espalhamento assintoticamente livres) se acrescenta ao hamiltoniano da equação 2.6 o termo de acoplamento

$$\mathcal{V} = \sum_{\mu\nu} (|\mu\rangle \int \mathcal{W}_{\mu\nu} \langle n, E| dE + conj.herm). \quad (2.7)$$

Como veremos a seguir, a implementação desse modelo deve garantir que o hamiltoniano total do sistema,  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{V}$ , seja auto-adjunto.

### 2.2.2 Matriz de Espalhamento $\mathcal{S}$

Sendo  $M$  o número de estados ortogonais da cavidade caótica, agrupando todos eles como  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_M)^T$  e a solução geral para função de onda no guia  $\Psi = (\Psi_1(x, y), \dots, \Psi_{N_2}(x, y))^T$  um vetor de  $N_2$  componentes, com estados quantizados, que pode ser escrita como um produto de uma solução que corresponde a um parte tipo onda propagante  $\psi_n(x)$  e parte tipo onda estacionária  $\phi_n(y)$ . O vetor  $\mathbf{u}$  pode ser obtido diretamente da matriz aleatória  $\mathcal{H}$  da cavidade. Os auto-estados do hamiltoniano, que descreve a interação dos estados ressonantes da cavidade com os canais propagantes no guia, podem ser escritos com

$$\Phi = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \Psi \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

pertencendo ao espaço de Hilbert  $L^2(R^+, C^M) \oplus C^N$ , dotado do produto interno

$$\langle \Phi_1 | \Phi_2 \rangle = \mathbf{u}_1^\dagger \mathbf{u}_2 + \langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle; \quad \langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = \int_{-d/2}^{d/2} dy \int_0^\infty \Psi_1^\dagger \Psi_2 dx. \quad (2.9)$$

O modelo **VWZ**(Verbaarschot, Weidenmüller e Zirnbauer) é baseado na matriz  $\mathcal{H}$ , que representa o operador  $\hat{\mathbf{H}}$ , incorporando com isso as propriedades básicas da TMA para matrizes  $M \times M$  de ordem alta. Vamos definir o operador hamiltoniano atuando nesse espaço de Hilbert como

$$\hat{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} \mathcal{H} & \hat{\mathcal{W}}_1 \\ \hat{\mathcal{W}}_2 & \hat{\mathcal{H}}_c \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

então,

$$\hat{\mathbf{H}}\Phi = \begin{pmatrix} \mathcal{H} & \hat{\mathcal{W}}_1 \\ \hat{\mathcal{W}}_2 & \hat{\mathcal{H}}_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \Psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{H}\mathbf{u} & \hat{\mathcal{W}}_1\Psi \\ \hat{\mathcal{W}}_2\mathbf{u} & \hat{\mathcal{H}}_c\Psi \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

O operador  $\hat{\mathbf{H}}$  atua na região de interação e é representado pela matriz hamiltoniana  $M \times M$ , cujos auto-estados formam as ressonâncias do sistema aberto. Os operadores  $\hat{\mathcal{W}}_1(M \times N_2)$  e  $\hat{\mathcal{W}}_2(N_2 \times M)$  que são matrizes retangulares, que descrevem o acoplamento dos canais propagantes com as ressonâncias. O operador diagonal  $\hat{\mathcal{H}}_c = (-\hbar^2/2m)\text{diag}(\partial_x^2 + \partial_y^2, \partial_x^2 + \partial_y^2, \dots, \partial_x^2 + \partial_y^2)$  representa o operador energia cinética do guia.

Vamos assumir, por simplicidade, que o acoplamento é local ao longo do guia de onda, podemos escolher  $\hat{\mathcal{W}}_2 = 0$  e  $\hat{\mathcal{W}}_1$ , mantendo a hermiticidade de modo que

$$\hat{\mathcal{W}}_1\Psi = \int_{-d/2}^{d/2} \mathcal{W}(y)\Psi(0, y)dy = \hat{w}\psi(0), \quad (2.12)$$

onde  $\psi(0) = (\psi_1(0), \psi_2(0), \dots, \psi_{N_2}(0))$  e  $\hat{w}$  tem entradas  $w_{\mu n} = \int_{-d/2}^{d/2} \mathcal{W}_{\mu n}\phi_n(y)dy$ , com  $\mu = 1, 2, \dots, M$  e  $n = 1, 2, \dots, N_2$ . Dessa forma, podemos escrever como o operador hamiltoniano atua nos estados do espaço de Hilbert estendido

$$\hat{\mathbf{H}}\Phi = \begin{pmatrix} \mathcal{H}\mathbf{u} + \hat{w}\psi(0) \\ \hat{\mathcal{H}}_c\Psi \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

O operador definido acima não é, em geral, auto-adjunto, uma vez que

$$\langle \hat{\mathbf{H}}\Phi_1 | \Phi_2 \rangle = \mathbf{u}_1^\dagger \mathcal{H}^\dagger \mathbf{u}_2 + \langle \hat{\mathcal{H}}_c \Psi_1 | \Psi_2 \rangle + \psi_1^\dagger(0) \hat{w} \mathbf{u}_2 \quad (2.14)$$

e

$$\langle \Phi_1 | \hat{\mathbf{H}}\Phi_2 \rangle = \mathbf{u}_1^\dagger \mathcal{H} \mathbf{u}_2 + \langle \Psi_1 | \hat{\mathcal{H}}_c \Psi_2 \rangle + \mathbf{u}_1^\dagger \hat{w} \psi_2(0). \quad (2.15)$$

Subtraindo a equação (2.14) da Eq. (2.15),

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbf{H}}\Phi_1 | \Phi_2 \rangle - \langle \Phi_1 | \hat{\mathbf{H}}\Phi_2 \rangle &= \mathbf{u}_1^\dagger \mathcal{H}^\dagger \mathbf{u}_2 + \langle \hat{\mathcal{H}}_c \Psi_1 | \Psi_2 \rangle + \psi_1^\dagger(0) \hat{w} \mathbf{u}_2 \\ &- \mathbf{u}_1^\dagger \mathcal{H} \mathbf{u}_2 - \langle \Psi_1 | \hat{\mathcal{H}}_c \Psi_2 \rangle - \mathbf{u}_1^\dagger \hat{w} \psi_2(0). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Como  $\mathcal{H} = \mathcal{H}^\dagger$  o termo  $\mathbf{u}_1^\dagger \mathcal{H}^\dagger \mathbf{u}_2$  é cancelado, por outro lado, da definição do operador  $\hat{\mathcal{H}}_c$  e do produto escalar  $\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle$ , pode-se encontrar depois de usar integração parcial em relação a  $x$  que

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbf{H}} \Phi_1 | \Phi_2 \rangle - \langle \Phi_1 | \hat{\mathbf{H}} \Phi_2 \rangle &= \frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \left( \frac{\partial \psi_1^\dagger}{\partial x} \right) \psi_2 - \psi_1^\dagger \left( \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right) \right\} \Big|_{x=0} \\ &+ \psi_1^\dagger(0) \hat{w}^\dagger \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1^\dagger \hat{w} \psi_2(0). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Para que  $\hat{\mathbf{H}}$  torne auto-adjunto é preciso impor a condição de contorno apropriada  $x = 0$  como na referência [51]. A escolha mais simples é

$$\hat{w}^\dagger \mathbf{u} = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \Big|_{x=0}. \quad (2.18)$$

Uma vez garantida a hermiticidade do hamiltoniano, vamos considerar a equação de Schrödinger para o sistema acoplado,  $\mathcal{H} \Phi = E \Phi$ , ou seja, que implica na seguinte relação

$$\hat{\mathbf{H}} \Phi = \begin{pmatrix} \mathcal{H} \mathbf{u} + \hat{w} \psi(0) \\ \hat{\mathcal{H}}_c \Psi \end{pmatrix} = E \Phi = E \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \Psi \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

e outra relação entre os canais propagantes e as ressonâncias

$$\mathbf{u} = (E - \mathcal{H})^{-1} \hat{w} \psi(0). \quad (2.20)$$

Substituindo a equação (2.20) na equação (2.18), temos

$$\hat{w}^\dagger (E - \mathcal{H})^{-1} \hat{w} \psi(0) = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \Big|_{x=0}. \quad (2.21)$$

Como a parte longitudinal da função de onda no guia é dada por

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar^2 k_1}} [A_1 e^{-ik_1 x} + B_1 e^{ik_1 x}] \\ \vdots \\ \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar^2 k_{N_2}}} [A_{N_2} e^{-ik_{N_2} x} + B_{N_2} e^{ik_{N_2} x}] \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

temos

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{x=0} = -i \left( \frac{m}{2\pi\hbar^2} \right) \mathbf{k} (\mathbf{A} - \mathbf{B}), \quad (2.23)$$

onde  $\mathbf{k} \equiv \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_{N_2})$  e os vetores  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  tem como entradas as amplitudes das ondas que entram e saem da cavidade.

Usando a equação 2.23 na 2.21

$$\hat{w}^\dagger (E - \mathcal{H})^{-1} \hat{w} \left( \frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^{1/2} \mathbf{k}^{-1/2} (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = -i \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^{1/2} \mathbf{k}^{1/2} (\mathbf{A} - \mathbf{B}). \quad (2.24)$$

Esta equação pode ser resolvida para  $\mathbf{B}$  em função de  $\mathbf{A}$ , resultando em

$$\mathbf{B} = (\mathbb{1} - i\mathbf{F})(\mathbb{1} + i\mathbf{F})^{-1}\mathbf{A} \quad (2.25)$$

onde  $\mathbf{F} = \pi\mathcal{W}^\dagger(E - \mathcal{H})^{-1}\mathcal{W}$ , com  $\mathcal{W} = \sqrt{2m/\pi\hbar^2}\hat{w}\mathbf{k}^{-1/2}$ , e  $\mathbb{1}$  é a matriz identidade de ordem  $N_2$ . Da definição de matriz de espalhamento concluímos que

$$\mathcal{S} = (\mathbb{1} - i\mathbf{F})(\mathbb{1} + i\mathbf{F})^{-1} = [(\mathbb{1} + i\mathbf{F}) - 2i\mathbf{F}][\mathbb{1} + i\mathbf{F}]^{-1} = \mathbb{1} - 2i\mathbf{F}(\mathbb{1} + i\mathbf{F})^{-1}. \quad (2.26)$$

Esta equação pode ser reescrita numa forma frequentemente usada em aplicações. Para isso, consideramos a identidade

$$\begin{aligned} \left[\mathbb{1} + i\pi\mathcal{W}^\dagger\frac{1}{E - \mathcal{H}}\mathcal{W}\right]^{-1}\mathcal{W}^\dagger\frac{1}{E - \mathcal{H}}\mathcal{W} &= \sum_{l=0}^{\infty}(-i\pi)^l \left[\mathcal{W}^\dagger\frac{1}{E - \mathcal{H}}\mathcal{W}\right]^{l+1} \\ &= \mathcal{W}^\dagger \left[\mathbb{1} + i\pi\frac{1}{E - \mathcal{H}}\mathcal{W}\mathcal{W}^\dagger\right]^{-1} \frac{1}{E - \mathcal{H}}\mathcal{W} \\ &= \mathcal{W}^\dagger \frac{1}{E - \mathcal{H} + i\pi\mathcal{W}\mathcal{W}^\dagger}\mathcal{W}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Desta forma a matriz de espalhamento pode ser escrita como

$$\mathcal{S} = \mathbb{1} - 2i\pi\mathcal{W}^\dagger(E - \mathcal{H} + i\pi\mathcal{W}\mathcal{W}^\dagger)^{-1}\mathcal{W}. \quad (2.28)$$

Esta equação pode ser facilmente adaptada para o caso de dois terminais, considerando que os blocos da matriz de espalhamento entre canais do mesmo guia correspondem a reflexão a partir da cavidade, blocos entre canais de guias diferentes correspondem a transmissão. Onde  $\mathcal{S}$  ( $N_T \times N_T$ ) é a matriz referente ao transporte dos elétrons com energia  $E$ ,  $\mathcal{H}$  é o hamiltoniano  $M \times M$  da cavidade caótica, pertencente ao ensemble gaussiano,  $\mathcal{W}$  ( $M \times N_T$ ) é uma matriz determinístico que modela o acoplamento dos guias com a cavidade e  $N_T = N_1 + N_2$  é o número total de modos propagantes.

A matriz  $\mathcal{W}$  contém informação sobre o número total de canais abertos nos dois guias, o espaçamento médio de níveis de energia da cavidade e das barreiras de tunelamento. Ela pode ser separada em duas partes

$$\mathcal{W} = [\mathcal{W}_1 \quad \mathcal{W}_2] \quad (2.29)$$

onde  $\mathcal{W}_p$  ( $M \times N_p$ ) e  $p = 1$  ou  $2$  é o índice dos guias. Para desprezar processos diretos, precisamos impor a seguinte condição de ortogonalidade [52][53][54]

$$\mathcal{W}_p^\dagger\mathcal{W}_q = \mathbf{w}_p \frac{M\Delta}{\pi^2} \delta_{pq}, \quad (2.30)$$

onde  $\Delta$  é o espaçamento médio de níveis da cavidade e  $\mathbf{w}_p$  é uma matriz diagonal dada por

$$\mathbf{w}_p = \text{diag}(w_{p,1}, w_{p,2}, \dots, w_{p,N_p}) \quad (2.31)$$



a qual está relacionada à probabilidade de transmissão  $\Gamma_{p,j}$  do canal  $j$  no guia  $p$  da seguinte forma

$$\Gamma_{p,j} \equiv \mathbb{1} - |\langle \mathcal{S} \rangle|^2,$$

onde  $\langle \mathcal{S} \rangle = (\mathbb{1} - i\pi\mathcal{W}^\dagger\mathcal{W}/\lambda)(\mathbb{1} + i\pi\mathcal{W}^\dagger\mathcal{W}/\lambda)^{-1}$ , é a média da matriz de espalhamento. Então

$$\Gamma_{p,j} \equiv \mathbb{1} - \left| \frac{\mathbb{1} - iw_{p,j}}{\mathbb{1} + iw_{p,j}} \right|^2 = \frac{4w_{p,j}}{1 + 2w_{p,j} + w_{p,j}^2}.$$

Definindo  $w_{p,j} = \exp(-\alpha_{p,j})$ , temos

$$\alpha_{p,j} \equiv -\ln(w_{p,j})$$

e

$$\Gamma_{p,j} = \frac{4\exp(-\alpha_{p,j})}{1 + 2\exp(-\alpha_{p,j}) + \exp(-2\alpha_{p,j})} = \operatorname{sech}^2(\alpha_{p,j}/2).$$

Considerando por simplicidade que todos os canais possuem a mesma probabilidade de tunelamento  $\Gamma_p = \Gamma_{p,j}$  e usando as relações de ortogonalidade da base discreta de Fourier, podemos parametrizar as matrizes de acoplamento e obter

$$\mathcal{W}_1 = b_1 \sqrt{\frac{2\lambda}{\pi(M+1)}} \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\pi}{M+1}\right) & \sin\left(\frac{2\pi}{M+1}\right) & \cdots & \sin\left(\frac{N_1\pi}{M+1}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{M+1}\right) & \sin\left(\frac{4\pi}{M+1}\right) & \cdots & \sin\left(\frac{N_1\pi}{M+1}\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin\left(\frac{M\pi}{M+1}\right) & \sin\left(\frac{2M\pi}{M+1}\right) & \cdots & \sin\left(\frac{N_1M\pi}{M+1}\right) \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

e

$$\mathcal{W}_2 = b_2 \sqrt{\frac{2\lambda}{\pi(M+1)}} \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\pi(N_1+1)}{M+1}\right) & \sin\left(\frac{\pi(N_1+2)}{M+1}\right) & \cdots & \sin\left(\frac{N_T\pi}{M+1}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi(N_1+1)}{M+1}\right) & \sin\left(\frac{2\pi(N_1+2)}{M+1}\right) & \cdots & \sin\left(\frac{2N_T\pi}{M+1}\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin\left(\frac{M\pi(N_1+1)}{M+1}\right) & \sin\left(\frac{M\pi(N_1+2)}{M+1}\right) & \cdots & \sin\left(\frac{N_TM\pi}{M+1}\right) \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

onde  $b_1 = \frac{\sqrt{\Gamma_1}}{1+\sqrt{1-\Gamma_1}}$ ,  $b_2 = \frac{\sqrt{\Gamma_2}}{1+\sqrt{1-\Gamma_2}}$ .

Os blocos de reflexão e transmissão da matriz de espalhamento  $\mathcal{S}$  são dados por

$$r_{N_1 \times N_1} = \mathbb{1} - 2\pi i \mathcal{W}_1^\dagger (E - \mathcal{H} + i\pi(\mathcal{W}_1\mathcal{W}_1^\dagger + \mathcal{W}_2\mathcal{W}_2^\dagger))^{-1} \mathcal{W}_1, \quad (2.34)$$

$$r'_{N_2 \times N_2} = \mathbb{1} - 2\pi i \mathcal{W}_2^\dagger (E - \mathcal{H} + i\pi(\mathcal{W}_1\mathcal{W}_1^\dagger + \mathcal{W}_2\mathcal{W}_2^\dagger))^{-1} \mathcal{W}_2, \quad (2.35)$$

$$t'_{N_2 \times N_1} = -2\pi i \mathcal{W}_2^\dagger (E - \mathcal{H} + i\pi(\mathcal{W}_1\mathcal{W}_1^\dagger + \mathcal{W}_2\mathcal{W}_2^\dagger))^{-1} \mathcal{W}_1, \quad (2.36)$$

$$t_{N_1 \times N_2} = -2\pi i \mathcal{W}_1^\dagger (E - \mathcal{H} + i\pi(\mathcal{W}_1\mathcal{W}_1^\dagger + \mathcal{W}_2\mathcal{W}_2^\dagger))^{-1} \mathcal{W}_2. \quad (2.37)$$

Fazemos  $E = 0$  para desprezar a dependência em energia da matriz de espalhamento, pois apenas características locais universais no espectro serão consideradas [54]. Uma característica marcante desta abordagem é que sempre, no final dos cálculos, o limite  $M \rightarrow \infty$  deve ser tomado para garantir a universalidade dos observáveis. Com as matrizes (2.32), (2.33) e com a TMA abordada no início desse capítulo que apresenta dependendo de cada simetria o  $\mathcal{H}$  da cavidade caótica, podemos fazer o uso da equação (2.28) para obter a matriz de espalhamento do sistema e assim extrair os autovalores de transmissão, que caracterizam o ponto quântico.

As fórmulas (2.32), (2.33) e (2.37) são facilmente implementados no computador e permitem o estudo numérico dos observáveis de transporte. Na próxima seção, verificamos a eficácia deste método comparando com alguns resultados disponíveis na literatura.

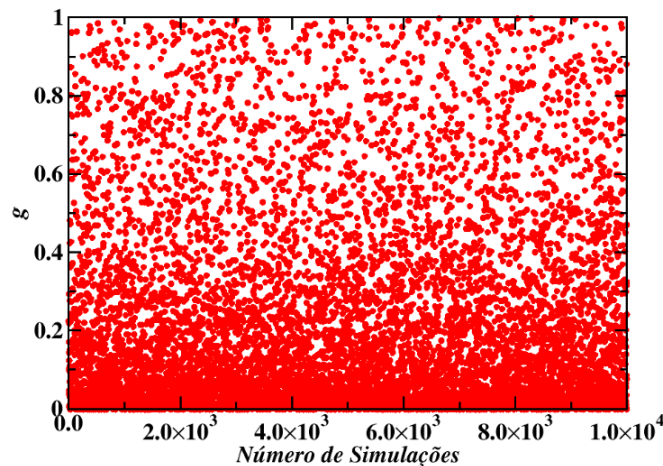
## 2.3 Comparação com Resultados Analíticos

Para uma cavidade com dois terminais de canal único ( $N_1 = N_2 = 1$ ), contendo uma barreira de tunelamento (a probabilidade de transmissão  $\Gamma$ ), as distribuições da condutância são estudadas numa formulação de matriz de transferência, que pode ser parametrizada como [8][9]. Reescrevendo a matriz de transferência do sistema como produto das matrizes do ponto e das respectivas barreiras, então pode-se encontrar as propriedades de transporte, que foram calculadas em [30].

Os resultados numéricos para condutância são gerados usando a matriz de transmissão (2.37), da seguinte forma

$$g = \text{Tr}(tt^\dagger),$$

onde os autovalores são mostrados para um caso específico na figura 2.2.



**Figura 2.2** Simulação da condutância para  $\beta = 1$  com  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma = 2/3$ .

Para  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma \neq 1$ , ou seja, para cavidades acopladas a contatos com barreiras de

tunelamento, os resultados exatos são mostrados na referência [30], onde

$$g = (1 + \lambda_d + m\lambda_d \cos^2 \psi_- + m(\lambda_d + 1) \cos^2 \psi_+ + 2\sqrt{\lambda_d(\lambda_d + 1)m(m + 1)} \cos \psi_- \cos \psi_+)^{-1}, \quad (2.38)$$

com

$$m = 4(1 - \Gamma)\Gamma^{-2}, \quad \psi_{\pm} = \phi_1 \pm \phi_2.$$

A equação (2.38) pode ser invertida para se obter  $\lambda_d$  em termos de  $\phi_1$  e  $\phi_2$  para determinado  $g$  e  $\Gamma$ . A distribuição de probabilidade  $P(g)$  então segue a partir de

$$P(g) = \frac{\beta}{2\pi^2} \int_0^\pi d\phi_1 \int_0^\pi d\phi_2 (1 + \lambda_d)^{-1-\beta/2} \left| \frac{\partial \lambda_d}{\partial g} \right|,$$

onde a integração é sobre todo  $\phi_i \in (0, \pi)$  para quais  $\lambda_d$  é real e positivo. Diversas expressões assintóticas podem ser obtidas para  $P(g)$  com  $\Gamma \ll 1$ ,

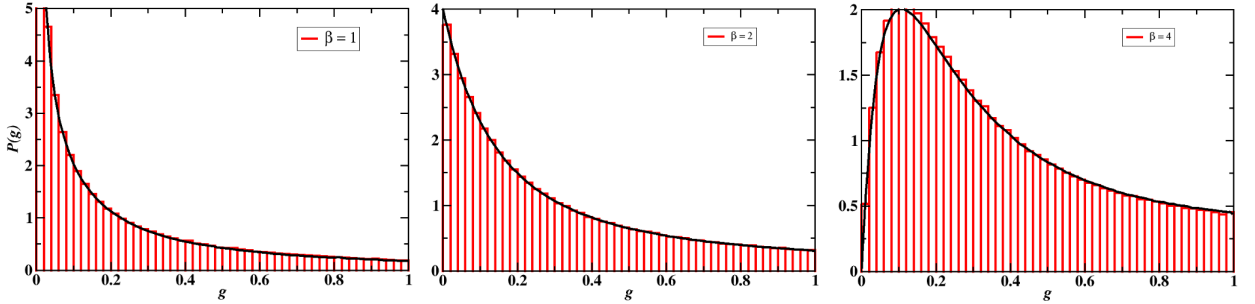
$$\beta = 1 : P(g) = \begin{cases} \frac{8}{\pi^2 \Gamma} g^{-1/2} & (g \ll \Gamma^2), \\ \frac{\Gamma}{\pi^2} g^{-3/2} & (\Gamma^2 \ll g \ll 1), \end{cases}$$

$$\beta = 2 : P(g) = 4\Gamma \frac{\Gamma^2 + g}{(\Gamma^2 + 4g)^{5/2}} (g \ll 1),$$

$$\beta = 4 : P(g) = 24g\Gamma \frac{3\Gamma^4 + 4g\Gamma^2 + 3g^2}{(\Gamma^2 + 4g)^{9/2}} (g \ll 1).$$

A expressão  $\beta = 2$  de  $P(g)$ , em regime de tunelamento precisa concordar com o cálculo de supersimetria da referência [55].

A figura 2.3 mostra a comparação dos dois métodos



**Figura 2.3** Distribuição da condutância para  $\beta = \{1, 2, 4\}$  com  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 2/3$ . Foram feitas  $10^6$  realizações com hamiltoniano de dimensão 200.

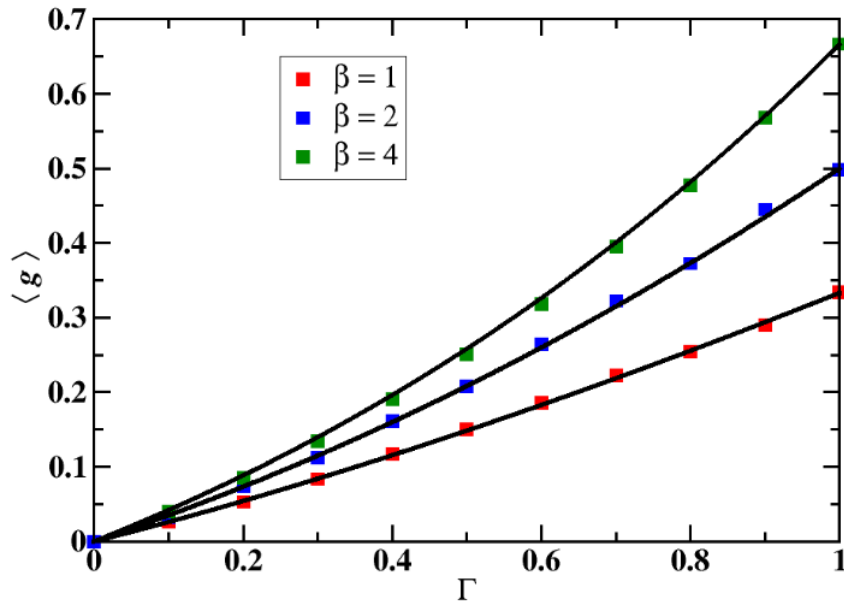
Momentos de  $P(g)$  pode ser calculado para todos os  $\Gamma$ . Os dois primeiros momentos são:

$$\langle g \rangle = \begin{cases} \frac{1}{2} m^{-1} [\sqrt{1+m} - \frac{1}{\sqrt{m}} \ln(\sqrt{1+m} + \sqrt{m})] & (\beta = 1), \\ \frac{2}{3} m^{-2} [(m-2)\sqrt{1+m} + 2] & (\beta = 2), \\ \frac{4}{15} m^{-3} [(3m^2 - 4m + 8)\sqrt{1+m} - 8] & (\beta = 4), \end{cases}$$

e

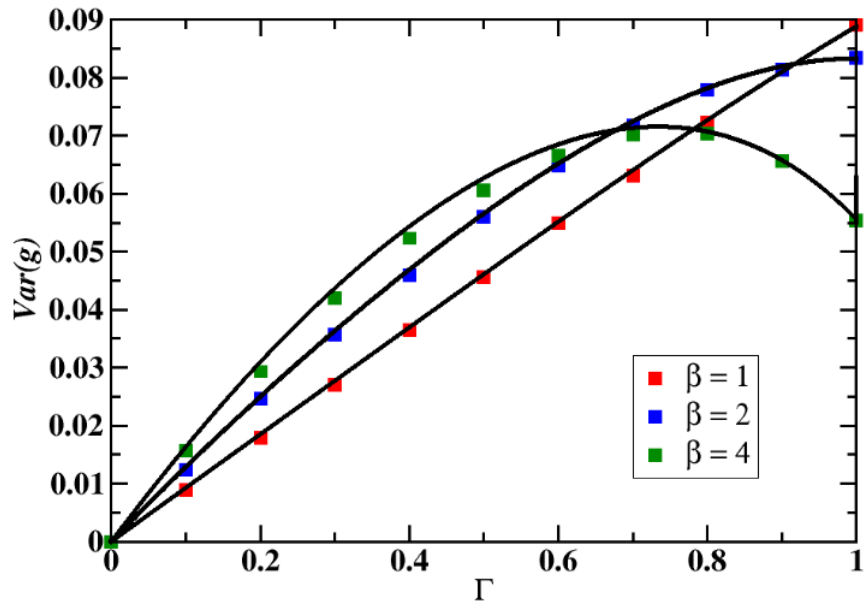
$$\langle g^2 \rangle = \begin{cases} \frac{3}{64}m^{-2}[(4m-18)\sqrt{1+m} + (\frac{18}{\sqrt{m}} + 8\sqrt{m})\ln(\sqrt{1+m} + \sqrt{m})] & (\beta = 1), \\ \frac{4}{15}m^{-3}[(m^2 + m + 16)\sqrt{1+m} - 10m - 16] & (\beta = 2), \\ \frac{4}{35}m^{-4}[(3m^3 + 2m^2 - 40m - 144)\sqrt{1+m} + 112m + 144] & (\beta = 4). \end{cases}$$

A comparação para média, desses resultados analíticos com a abordagem hamiltoniana é mostrada na figura 2.4.



**Figura 2.4** Média da condutância para  $\beta = \{1, 2, 4\}$  com  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$  arbitrário. Foram feitas  $10^5$  realizações com hamiltoniano de dimensão 40.

Sendo a variância da probabilidade de transmissão,  $Var(g) = \langle g^2 \rangle - \langle g \rangle^2$ , a figura 2.5 mostra a comparação dos dois métodos.



**Figura 2.5** Variância da condutância para  $\beta = \{1, 2, 4\}$  com  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$  arbitrário. Foram feitas  $10^5$  realizações com hamiltoniano de dimensão 40.

No próxima capítulo apresentaremos a abordagem via matriz  $\mathcal{S}$  para encontrar resultados exatos inéditos no capítulo 4, onde usaremos essa abordagem hamiltoniana para testa-los.

---

## Abordagem Via Matriz de Espalhamento

---

Vimos que o ingrediente básico do método estocástico apresentado no capítulo anterior é a suposição de que o hamiltoniano da cavidade pode ser modelado como membro de um dos ensembles gaussianos. Neste capítulo, consideraremos uma formulação alternativa para o problema que consiste na construção direta de um ensemble de matrizes de espalhamento sem nenhuma referência a ensembles de matrizes hamiltonianas.

Nesta abordagem, o tratamento estatístico do problema de transporte é baseado na construção de um ensemble de cavidades representado por um ensemble das matrizes de espalhamento correspondentes. Este ensemble é definido por uma densidade de probabilidade que pode convenientemente ser obtida a partir de um princípio de máxima entropia. Finalmente, a comparação com resultados experimentais é baseada na hipótese ergódica na qual médias no ensemble são equivalente a médias numa janela conveniente de energia [56].

A seguir revisaremos duas versões do formalismo da TMA aplicada diretamente à matriz  $\mathcal{S}$  para nosso o problema de interesse nesta dissertação.

### 3.1 Ensembles Circulares

A probabilidade de encontrarmos  $\mathcal{S}$  dentro do volume  $d\mu(\mathcal{S})$  é definida por

$$dP(\mathcal{S}) = P(\mathcal{S})d\mu(\mathcal{S}),$$

onde  $P(\mathcal{S})$  é a densidade de probabilidade e  $d\mu(\mathcal{S})$  é a medida invariante de espaço de matrizes  $\mathcal{S}$ . Por definição, ela é invariante sob automorfismos  $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$  de uma determinada classe de matrizes, ou seja

$$d\mu^{(\beta)}(\mathcal{S}) = d\mu^{(\beta)}(\mathcal{S}'),$$

onde para  $\beta = 2$  temos  $\mathcal{S}' = U_0\mathcal{S}V_0$ , onde  $U_0$  e  $V_0$  é uma matrizes unitárias fixas. Em particular, para  $\beta = 1$  temos  $V_0 = U_0^T$  e, para  $\beta = 4$ , temos  $V_0 = U_0^D$ .

Uma vez definida a medida, o ensemble pode ser definido a partir da maximização da entropia de informação

$$\mathbf{S}[P(\mathcal{S})] = - \int d\mu^{(\beta)}(\mathcal{S}) P(\mathcal{S}) \ln P(\mathcal{S}),$$

que, juntamente com o vínculo de normalização,

$$1 = \int d\mu^{(\beta)}(\mathcal{S}) P(\mathcal{S}),$$

resulta numa densidade de probabilidade constante,

$$P(\mathcal{S}) = \text{constante.}$$

Portanto, todas as matrizes unitárias do ensemble são igualmente prováveis. Ensembles de matrizes unitárias uniformemente distribuídas são denominados ensembles circulares. Estes ensembles foram introduzidos por Dyson na década de 60 [34][57] e, assim como os ensembles gaussianos, são rotulados por um índice de simetria  $\beta$  que assume os valores  $\beta = 1$ , para sistemas com invariância sob reversão temporal e rotação de spin,  $\beta = 2$ , para sistemas sem invariância sob reversão temporal, e  $\beta = 4$  para sistemas invariantes sob reversão temporal mas não sob rotação de spin. Esses são os ensembles circulares ortogonal (**ECO**), unitário (**ECU**) e simplético (**ECS**), respectivamente. A tabela (3.1) resume as propriedades dos ensembles circulares.

$\beta$	<b>SRT</b>	<b>SRS</b>	$\mathcal{S}$	<b>Ensemble</b>
1	Sim	Sim	Unitária e Simétrica	<b>ECO</b>
2	Não	Irrelevante	Unitária	<b>ECU</b>
4	Sim	Não	Unitária e Quatérion Auto-Dual	<b>ECS</b>

**Tabela 3.1** Classificação de Dyson dos ensembles circulares.

Uma característica importante dos ensembles circulares é que a média no ensemble da matriz da  $\mathcal{S}$  é nula. Isto é uma consequência imediata da invariância do ensemble. Por exemplo, no caso unitário, a média deve satisfazer

$$\langle \mathcal{S} \rangle = \langle U_0 \mathcal{S} V_0 \rangle = U_0 \langle \mathcal{S} \rangle V_0$$

para matrizes  $U_0$  e  $V_0$  unitárias arbitrárias. Segue então que

$$\langle \mathcal{S} \rangle = 0.$$

Os ensemble circulares são apropriados para o estudo de cavidades caóticas acopladas aos guias por meio de contatos ideais [30]. Neste caso, a parametrização polar da matriz  $\mathcal{S}$

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{v}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1-\tau} & 0 & i\sqrt{\tau} \\ 0 & \mathbf{1}_m & 0 \\ i\sqrt{\tau} & 0 & \sqrt{1-\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_2 & 0 \\ 0 & \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}$$

onde  $\tau = \text{diag}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N)$ ,  $N = \min(N_1, N_2)$ ,  $m = |N_1 - N_2|$ ,  $\mathbf{u}_1$  e  $\mathbf{u}_2$  ( $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$ ) são matrizes unitárias  $N_1 \times N_1$  ( $N_2 \times N_2$ ), essa parametrização leva a seguinte densidade conjunta de probabilidade para os autovalores de transmissão

$$P(\{\tau\}) = C \prod_{i < j} |\tau_i - \tau_j|^\beta \prod_i \tau_i^{\beta(|N_1 - N_2| + 1 - 2/\beta)/2} \quad (3.1)$$

a partir da qual pode-se obter resultados exatos para qualquer estatística linear ou não linear dos autovalores de transmissão. A obtenção de resultados exatos para  $N_1, N_2$  e  $\beta$  arbitrários tem se tornado um campo de intensa atividade com o surgimento de novas técnicas analíticas baseadas nas integrais de correlação de Selberg [58][59][60][61][62], polinômios de Jack [63][64][65] e integrais de trajetórias [66][67]. Tais resultados, no entanto, não se aplicam ao caso em que  $\langle \mathcal{S} \rangle \neq 0$ . Na próxima seção discutiremos como abordar este problema.

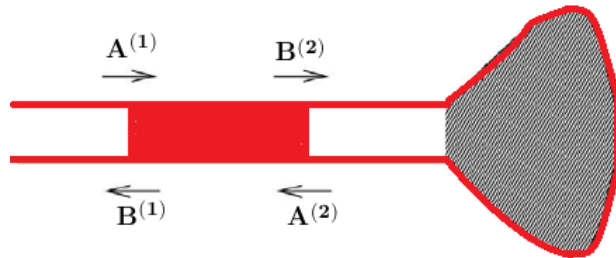
### 3.2 Núcleo de Poisson

A abordagem via teoria da informação vista na seção anterior foi usada com sucesso por Mello e colaboradores [40][68][56] em situações mais gerais em que há presença de processos diretos. Neste caso, a média da matriz  $\mathcal{S}$  é não nula e passa a ser um parâmetro relevante na densidade de probabilidade  $P(\mathcal{S})$ . Além das considerações usuais de simetria da matriz  $\mathcal{S}$ , a distribuição de máxima entropia que satisfaz às chamadas condições de analiticidade-ergodicidade [68] é dada

$$P(\mathcal{S}) = C \frac{[\det(\mathbb{1} - \langle \mathcal{S} \rangle \langle \mathcal{S} \rangle^\dagger)]^{(\beta N_T + 2 - \beta)/2}}{|\det(\mathbb{1} - \mathcal{S} \langle \mathcal{S} \rangle^\dagger)|^{\beta N_T + 2 - \beta}}, \quad (3.2)$$

onde  $C$  é uma constante. Esta distribuição é conhecida na literatura como *Núcleo de Poisson* e se reduz à distribuição dos ensembles circulares no caso particular em que  $\langle \mathcal{S} \rangle = 0$ .

Uma dedução do *Núcleo de Poisson* para uma situação mais concreta de uma cavidade acoplada a guias via barreiras de tunelamento foi apresentada na referência [48]. Apresentaremos a seguir detalhes dessa dedução para o caso  $\beta = 2$ . Para isso consideremos



**Figura 3.1** Diagrama esquemático de um guia com barreira de tunelamento acoplado a uma cavidade caótica, indicando a notação para as diversas ondas entrando e saindo.

inicialmente uma cavidade caótica conectada a apenas um guia, como mostra a figura



(3.1). A cavidade é descrita por uma matriz de espalhamento  $\mathcal{S}_0$  pertencente ao ensemble circular unitário. A barreira de tunelamento no contato cavida-guia, por sua vez, é descrita pela matriz de espalhamento  $\mathcal{S}_1$ . O processo de espalhamento  $\mathcal{S}_1$  ocorre antes do processo  $\mathcal{S}_0$ . O espalhamento total do sistema é a composição dessas duas partes, que são descritas pelas equações

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{(1)} \\ \mathbf{B}^{(2)} \end{pmatrix} &= \mathcal{S}_1 \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{(1)} \\ \mathbf{A}^{(2)} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{S}_0 \mathbf{B}^{(2)} &= \mathbf{A}^{(2)}, \\ \mathcal{S} \mathbf{A}^{(1)} &= \mathbf{B}^{(1)}. \end{aligned}$$

Usando as equações acima, podemos escrever a matriz de espalhamento do sistema  $\mathcal{S}$  em função de  $\mathcal{S}_0$

$$\mathcal{S} = r_1 + t_2(1 - \mathcal{S}_0 r_2)^{-1} \mathcal{S}_0 t_1, \quad (3.3)$$

onde  $r_1$  e  $t_1$  denotam as matrizes de reflexão e transmissão, respectivamente, para o lado esquerdo da barreira, e de forma semelhante  $r_2$  e  $t_2$  à direita da barreira.

Como a matriz  $\mathcal{S}_1$  é unitária, ou seja,

$$\mathcal{S}_1^\dagger \mathcal{S}_1 = \mathbf{1}$$

podemos usar esse fato para escrever  $\mathcal{S}_0$  em função de  $\mathcal{S}$

$$\mathcal{S}_0 = t_2^{-1}(\mathcal{S} - r_1)(\mathbf{1} - r_1^\dagger \mathcal{S})^{-1} t_1^\dagger. \quad (3.4)$$

Diferenciando a equação (3.4), obtemos

$$d\mathcal{S}_0 = t_2^{-1}[(d\mathcal{S})(\mathbf{1} - r_1^\dagger \mathcal{S})^{-1} + (\mathcal{S} - r_1)d(\mathbf{1} - r_1^\dagger \mathcal{S})^{-1}]t_1^\dagger.$$

Usando as identidades  $dX^{-1} = -X^{-1}(dX)X^{-1}$  e  $(1 - AB)^{-1}A = A(1 - BA)^{-1}$ , temos

$$d\mathcal{S}_0 = t_2^\dagger(\mathbf{1} - \mathcal{S} r_1^\dagger)^{-1}(d\mathcal{S})(\mathbf{1} - r_1^\dagger \mathcal{S})^{-1} t_1^\dagger.$$

Como  $(d\mathcal{S}) = \mathcal{S} \mathcal{S}^{-1}(d\mathcal{S})$

$$d\mathcal{S}_0 = t_2^\dagger \mathcal{S}(\mathbf{1} - r_1^\dagger \mathcal{S})^{-1} \mathcal{S}^{-1}(d\mathcal{S})(\mathbf{1} - r_1^\dagger \mathcal{S})^{-1} t_1^\dagger$$

multiplicado por

$$\mathcal{S}_0^\dagger = t_1(\mathbf{1} - \mathcal{S}^\dagger r_1)^{-1}(\mathcal{S}^\dagger - r_1^\dagger)(t_2^\dagger)^{-1},$$

obtemos

$$\mathcal{S}_0^\dagger d\mathcal{S}_0 = t_1(\mathbf{1} - \mathcal{S}^\dagger r_1)^{-1} \mathcal{S}^\dagger d\mathcal{S}(\mathbf{1} - r_1^\dagger \mathcal{S})^{-1} t_1^\dagger.$$

Se  $\beta = 2$ , a medida de Haar é definida por

$$d\mu(\mathcal{S}) \equiv \frac{1}{C} \mathcal{S}^\dagger d\mathcal{S},$$

usando a identidade  $(A^\dagger dMA) = (\det A^\dagger A)^N (dM)$ , com  $A = (\mathbb{1} - r_1^\dagger \mathcal{S})^{-1} t_1^\dagger$

$$\begin{aligned} A^\dagger A &= t_1 (\mathbb{1} - \mathcal{S}^\dagger r_1)^{-1} (\mathbb{1} - r_1^\dagger \mathcal{S})^{-1} t_1^\dagger \\ \det A^\dagger A &= \det [t_1 (\mathbb{1} - \mathcal{S}^\dagger r_1)^{-1} (\mathbb{1} - r_1^\dagger \mathcal{S})^{-1} t_1^\dagger] \\ &= \frac{\det(\mathbb{1} - r_1^\dagger r_1)}{|\det(\mathbb{1} - r_1^\dagger \mathcal{S})|^2} \end{aligned}$$

temos então

$$d\mu(\mathcal{S}_0) = \left( \frac{\det(\mathbb{1} - r_1^\dagger r_1)}{|\det(\mathbb{1} - r_1^\dagger \mathcal{S})|^2} \right)^N d\mu(\mathcal{S}).$$

As densidades de probabilidades  $P(\mathcal{S}_0)$  e  $P(\mathcal{S})$  se relacionam por

$$P(\mathcal{S}_0) d\mu(\mathcal{S}_0) = P(\mathcal{S}) d\mu(\mathcal{S}) \quad (3.5)$$

como  $P(\mathcal{S}_0) = \frac{1}{C}$ , temos

$$P(\mathcal{S}) = \frac{1}{C} \left( \frac{\det(\mathbb{1} - r_1^\dagger r_1)}{|\det(\mathbb{1} - r_1^\dagger \mathcal{S})|^2} \right)^{N_T}. \quad (3.6)$$

Como  $r_1 = \langle \mathcal{S} \rangle$ , temos para qualquer  $\beta$

$$d\mu(\mathcal{S}_0) = \left( \frac{\det(\mathbb{1} - \langle \mathcal{S} \rangle^\dagger \langle \mathcal{S} \rangle)}{|\det(\mathbb{1} - \langle \mathcal{S} \rangle^\dagger \mathcal{S})|^2} \right)^{\beta(N_T-1)/2+1} d\mu(\mathcal{S}) \quad (3.7)$$

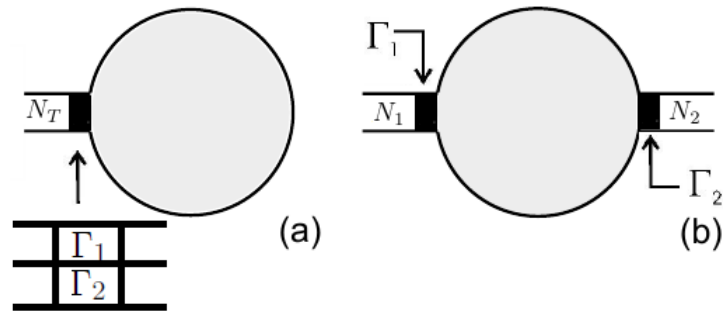
e, assim o Jacobiano é proporcional ao *Núcleo de Poisson*

$$P(\mathcal{S}) = \frac{1}{C} \left( \frac{\det(\mathbb{1} - \langle \mathcal{S} \rangle^\dagger \langle \mathcal{S} \rangle)}{|\det(\mathbb{1} - \langle \mathcal{S} \rangle^\dagger \mathcal{S})|^2} \right)^{\beta(N_T-1)/2+1}. \quad (3.8)$$

Podemos adaptar o problema de um guia para dois guias como mostra a figura (3.2), considerando que os elementos da matriz de espalhamento  $\mathcal{S}$  entre canais do mesmo guia correspondem a reflexão a partir da cavidade, elementos entre canais de guias diferentes correspondem a transmissão. Assim teremos

$$\langle \mathcal{S} \rangle = \begin{pmatrix} r^{(1)} & 0 \\ 0 & r^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_1 & 0 \\ 0 & \hat{\gamma}_2 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

onde  $r^{(1)}$  ( $N_1 \times N_1$ ) e  $r^{(2)}$  ( $N_2 \times N_2$ ), são as matrizes de reflexão nas barreiras dos guias 1 e 2. Considerando também que  $\hat{\gamma}$  a matriz de autovalores de  $\langle \mathcal{S} \rangle$ .



**Figura 3.2** Visão esquemática de uma cavidade (a) como um guia (b) com dois guias

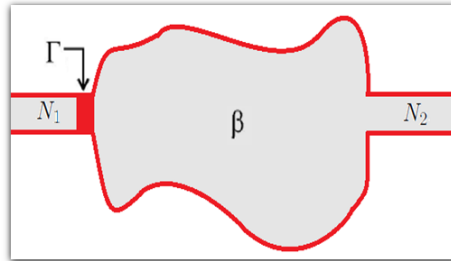
No próximo capítulo, o *Núcleo de Poisson* será o ponto de partida para encontrarmos as expressões analíticas via funções hipergeométricas de argumento matricial para distribuição da condutância e da potência de ruído de disparo, e suas respectivas médias e variâncias.

---

Resultados Exatos Via Função Hipergeometrica de Argumento Matricial: Condutância, Ruído de Disparo, Assimetria

---

Os resultados exatos somente para distribuição da condutância com  $\beta = 2$  foram encontrados por Vidal e Kanzieper na referência [41], para uma cavidade com acoplamento no guia 1 não ideal, ou seja,  $\Gamma_1 = \Gamma \neq 1$  e o guia 2 com contato ideal  $\Gamma_2 = 1$  como ilustra a figura (4.1).



**Figura 4.1** Ilustração de uma cavidade com acoplamento não ideal no guia 1 e com contato ideal no guia 2.

O Núcleo de Poisson apresentado na seção 3.2 para resolver problemas no qual a cavidade tem acoplamento não ideal, ou seja, com barreira de tunelamento

$$P(\mathcal{S}) = \frac{1}{C} \left( \frac{\det(\mathbf{1} - \langle \mathcal{S} \rangle^\dagger \langle \mathcal{S} \rangle)}{|\det(\mathbf{1} - \langle \mathcal{S} \rangle^\dagger \mathcal{S})|^2} \right)^{\beta(N_T-1)/2+1}, \quad (4.1)$$

que pode ser reescrita como

$$P(\mathcal{S}) \propto [\det(\mathbf{1} - \langle \mathcal{S} \rangle^\dagger \mathcal{S})]^{-(\beta(N_T-1)/2+1)} [\det(\mathbf{1} - \mathcal{S}^\dagger \langle \mathcal{S} \rangle)]^{-(\beta(N_T-1)/2+1)}.$$

Considerando o contato do guia 2 ideal  $\Gamma_2 = \mathbf{1}_{N_2}$ , ou seja, a matriz de autovalores  $\hat{\gamma}_2 = \text{diag}(0, 0, \dots, 0)$  e o guia 1 com barreira de tunelamento, temos

$$\langle \mathcal{S} \rangle = \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

onde  $\hat{\gamma}_1 = \hat{\gamma} = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{N_1})$ . A matriz de autovalores  $\hat{\gamma} = \text{diag}\sqrt{1 - \Gamma_j}$  ( $1 \leq j \leq N_1$ ) da matriz  $\langle \mathcal{S} \rangle$ , caracteriza o acoplamento entre a cavidade e os contatos em termos da probabilidade de tunelamento  $\Gamma_j$  do elétron no  $j$ -ésimo modo.

Usando a decomposição usual da matriz  $\mathcal{S}$  em sistemas de dois terminais

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} r_{N_1 \times N_1} & t_{N_1 \times N_2} \\ t'_{N_2 \times N_1} & r'_{N_2 \times N_2} \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

então temos

$$\langle \mathcal{S} \rangle \langle \mathcal{S} \rangle^\dagger = \begin{pmatrix} \hat{\gamma}^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

$$\langle \mathcal{S} \rangle^\dagger \mathcal{S} = \begin{pmatrix} \hat{\gamma} r & \hat{\gamma} t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

e

$$\mathcal{S}^\dagger \langle \mathcal{S} \rangle = \begin{pmatrix} r^\dagger \hat{\gamma} & 0 \\ (t')^\dagger \hat{\gamma} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Subtraindo  $\langle \mathcal{S} \rangle \langle \mathcal{S} \rangle^\dagger$ ,  $\langle \mathcal{S} \rangle^\dagger \mathcal{S}$  e  $\mathcal{S}^\dagger \langle \mathcal{S} \rangle$  da matriz identidade  $\mathbf{1}$  passamos a ter

$$\begin{aligned} P_{(\hat{\gamma}, 0)}(\mathcal{S}) &= C_{(N_1, N_2)} [\det(\mathbf{1}_{N_1} - \hat{\gamma}^2)]^{\beta(N_T - 1)/2 + 1} [\det(\mathbf{1}_{N_1} - \hat{\gamma} r)]^{-(\beta(N_T - 1)/2 + 1)} \\ &\times [\det(\mathbf{1}_{N_1} - r^\dagger \hat{\gamma})]^{-(\beta(N_T - 1)/2 + 1)}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Como a densidade de corrente se conserva a matriz  $\mathcal{S}$  é unitária  $\mathcal{S} \mathcal{S}^\dagger = \mathbf{1}$

$$\begin{cases} rr^\dagger + tt^\dagger = \mathbf{1}_{N_1} \\ r(t')^\dagger + t'(r')^\dagger = 0 \\ tr^\dagger + r't^\dagger = 0 \\ t(t')^\dagger + r(r')^\dagger = \mathbf{1}_{N_2}. \end{cases} \quad (4.8)$$

A função densidade de probabilidade conjunta de elementos de  $\mathcal{S}$  pode ser escrita como

$$P_{(\hat{\gamma}, 0)}(\mathcal{S}) \propto \delta(r^\dagger r + t^\dagger t - \mathbf{1}_{N_1}) \delta(r t'^\dagger + t'^\dagger r') \delta((t')^\dagger t' + (r')^\dagger r - \mathbf{1}_{N_2}), \quad (4.9)$$

onde  $\delta$  está em função de matrizes apropriadas [69]. A função densidade de probabilidade associada a matriz de reflexão é obtida integrando somente em relação a  $t$

$$P_{(\hat{\gamma}, 0)}(r) \propto \int dt \delta(rr^\dagger + tt^\dagger - \mathbf{1}_{N_1}).$$

Como  $P_{(\hat{\gamma},0)}(\mathcal{S})$  é função somente de  $r$  e  $t$ , temos que

$$P_{(\hat{\gamma},0)}(r) = \int_{t \in \mathbb{C}^{N_1 \times N_2}} dt \delta(rr^\dagger + tt^\dagger - \mathbf{1}_{N_1}) P_{(\hat{\gamma},0)}(\mathcal{S})$$

onde  $\mathbb{C}^{N_1 \times N_2}$  denota o espaço de matrizes complexas  $\mathbb{C}^{N_1 \times N_2}$ . Então

$$\begin{aligned} P_{(\hat{\gamma},0)}(r) &= C_{(N_1, N_2)} [\det(\mathbf{1}_{N_1} - \hat{\gamma}^2)]^{\beta(N_T-1)/2+1} [\det(\mathbf{1}_{N_1} - \hat{\gamma}r)]^{-(\beta(N_T-1)/2+1)} \\ &\times [\det(\mathbf{1}_{N_1} - r^\dagger \hat{\gamma})]^{-(\beta(N_T-1)/2+1)} \int dt \delta(rr^\dagger + tt^\dagger - \mathbf{1}_{N_1}). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Para o cálculo da integral, usamos uma representação de integral para função delta de argumento matricial. Para reescrever como um integral de *Ingham-Siegel* (Apêndice A). Essa integral tem resultado na literatura [70]. Para o caso de  $N_1 \leq N_2$  a probabilidade  $P_{(\hat{\gamma},0)}(r)$  é proporcional a uma expressão simples, não singular:

$$P_{(\hat{\gamma},0)}(r) \propto [\det(\mathbf{1}_{N_1} - rr^\dagger)]^{(\beta/2)(N_2 - N_1 + 1 - 2/\beta)} \Theta(\mathbf{1}_{N_1} - rr^\dagger), \quad (4.11)$$

onde a matriz  $\Theta$ , é uma função unitário quando seu argumento é uma matriz positiva definida e é zero caso contrário [70]. Portando  $P_{(\hat{\gamma},0)}(r)$  é dada por

$$\begin{aligned} P_{(\hat{\gamma},0)}(r) &= C_{(N_1, N_2)} [\det(\mathbf{1}_{N_1} - \hat{\gamma}^2)]^{\beta(N_T-1)/2+1} [\det(\mathbf{1}_{N_1} - \hat{\gamma}r)]^{-(\beta(N_T-1)/2+1)} \\ &\times [\det(\mathbf{1}_{N_1} - r^\dagger \hat{\gamma})]^{-(\beta(N_T-1)/2+1)} [\det(\mathbf{1}_{N_1} - rr^\dagger)]^{(\beta/2)(N_2 - N_1 + 1 - 2/\beta)} \Theta(\mathbf{1}_{N_1} - rr^\dagger). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Podemos então decompor cada bloco de  $\mathcal{S}$  como na decomposição em valores singulares [71][72],

$$r_{N_1 \times N_1} = \mathbf{U}_r \mathbf{\Lambda}_r \mathbf{V}_r^\dagger \quad \text{ou} \quad t_{N_2 \times N_1} = \mathbf{U}_t \mathbf{\Lambda}_t \mathbf{V}_t^\dagger. \quad (4.13)$$

Sendo que  $\mathbf{U}_r$  e  $\mathbf{V}_r^\dagger$  são matrizes unitárias, e  $\mathbf{\Lambda}_r$  ( $\mathbf{\Lambda}_t$ ) uma matriz retangular compostas das raízes quadradas positivas dos autovalores de  $r^\dagger r$  ( $t^\dagger t$ ) (estes autovalores estão entre 0 e 1 desde que  $r^\dagger r + t^\dagger t = \mathbf{1}$ ). A restrição de unitariedade inter-relaciona as matrizes  $\mathbf{U}_r$ ,  $\mathbf{U}_{r'}$ ,  $\mathbf{V}_r^\dagger$  e  $\mathbf{V}_{r'}^\dagger$ , implicando na decomposição

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_r & 0 \\ 0 & \mathbf{U}_{r'} \end{bmatrix} \mathbf{L} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_r^\dagger & 0 \\ 0 & \mathbf{V}_{r'}^\dagger \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

onde

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \sqrt{\mathbf{1}_{N_1} - \mathbf{\Lambda}_t \mathbf{\Lambda}_t^T} & i \mathbf{\Lambda}_t \\ i \mathbf{\Lambda}_t^T & \sqrt{\mathbf{1}_{N_2} - \mathbf{\Lambda}_t^T \mathbf{\Lambda}_t} \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

Para o caso de quebra simetria reversão temporal  $\mathbf{T}^2 = 1$ ,  $\mathcal{S}$  deve ser simétrica, e assim do mesmo modo o bloco  $r_{N_1 \times N_1}$ . Essas matrizes quadradas então permite a decomposição de valores singulares [70]

$$r_{N_1 \times N_1} = \mathbf{U}_r \mathbf{\Lambda}_r \mathbf{U}_r^T, \quad (4.16)$$

e assim (4.15) mantém com

$$\mathbf{V}_r^\dagger = \mathbf{U}_r^T, \mathbf{V}_{r'}^\dagger = \mathbf{U}_{r'}^T. \quad (4.17)$$

Similarmente ao caso de simetria de reversão temporal com  $\mathbf{T}^2 = -1$ , quando  $\mathcal{S}$  é quaternion auto-dual, (4.15) mantém como

$$\mathbf{V}_r^\dagger = \mathbf{U}_r^D, \mathbf{V}_{r'}^\dagger = \mathbf{U}_{r'}^D. \quad (4.18)$$

Com  $\mathbf{\Lambda}_r = \text{diag}(\sqrt{R_1}, \dots, \sqrt{R_{N_1}}) = \text{diag}(\rho_1, \dots, \rho_{N_1})$  restringindo-nos a um caso estruturalmente mais transparente  $N_1 \leq N_2$ , notamos que com a decomposição polar (4.15) temos a seguinte medida de volume

$$dr = \text{vol}^2[\mathbf{U}(N_1)] \Delta_{N_1}^\beta(\mathbf{\Lambda}_r^2) \prod_{j=1}^{N_1} \rho_j d\rho_j d\mu(\mathbf{U}_r) d\mu(\mathbf{V}_r) \quad (4.19)$$

onde  $\rho_j \geq 0$ ,  $\Delta_{N_1}^\beta(\mathbf{\Lambda}_r^2) = \Delta_{N_1}^\beta(\mathbf{R}) = \prod_{j < k} (R_k - R_j)$  é o determinante de Vandermonde e  $\mathbf{U}_r, \mathbf{V}_r \in \mathbf{U}(N_1)$ .

Substituindo a equação (4.13) em (4.12), e considerando a medida de volume (4.19) podemos concluir que a f.d.p. conjunta em termos de  $\rho_j$  no caso de contatos não ideal admite a representação

$$\begin{aligned} P_{(\hat{\gamma}, 0)}(\rho_1, \dots, \rho_{N_1}) &= C_{(N_1, N_2)} [\det(\mathbf{1}_{N_1} - \hat{\gamma}^2)]^{\beta(N_T - 1)/2 + 1} \\ &\times \Delta_{N_1}^\beta(\mathbf{\Lambda}_r^2) \prod_{j=1}^{N_1} \rho_j (1 - \rho_j^2)^{(\beta/2)(N_2 - N_1 + 1 - 2/\beta)} \Theta(\mathbf{1}_{N_1} - \rho_j^2) \\ &\times \int d\mu(\mathbf{U}_r) \int d\mu(\mathbf{V}_r) [\det(\mathbf{1}_{N_1} - \hat{\gamma} \mathbf{U}_r \mathbf{\Lambda}_r \mathbf{V}_r^\dagger)]^{-(\beta(N_T - 1)/2 + 1)} \\ &\times [\det(\mathbf{1}_{N_1} - \mathbf{V}_r \mathbf{\Lambda}_r \mathbf{U}_r^\dagger \hat{\gamma})]^{-(\beta(N_T - 1)/2 + 1)}. \end{aligned}$$

A referência [73] encontrou o seguinte resultado para as integrais anteriores

$$\begin{aligned} P_{(\hat{\gamma}, 0)}(\mathbf{R}) &\propto [\det(\mathbf{1}_{N_1} - \hat{\gamma}^2)]^{\beta(N_T - 1)/2 + 1} \Delta_{N_1}^\beta(\mathbf{R}) \prod_{j=1}^{N_1} (1 - R_j)^{(\beta/2)(N_2 - N_1 + 1 - 2/\beta)} \\ &\times {}_2\mathcal{F}_1^{(2/\beta)} \left( \begin{matrix} \beta(N_T - 1)/2 + 1, \beta(N_T - 1)/2 + 1 \\ \frac{\beta}{2}(N_1 - 1) + 1 \end{matrix} \middle| \hat{\gamma}^2, \mathbf{R} \right), \end{aligned} \quad (4.20)$$

sendo que essa equação foi escrita em termos dos autovalores de reflexão, onde  ${}_2\mathcal{F}_1^{(2/\beta)}(\cdot | \mathbf{A}, \mathbf{B})$  é um função hipergeométrica de argumento matricial, com  $\mathbf{A} = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_n)$  e  $\mathbf{B} = \text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_n)$ , definida pela série

$${}_2\mathcal{F}_1^{(2/\beta)} \left( \begin{matrix} a_1, a_2 \\ b_1 \end{matrix} \middle| \mathbf{A}, \mathbf{B} \right) = \sum_{\{\lambda: l(\lambda)\}} \frac{1}{|\lambda|!} \frac{[a_1]_\lambda^{(2/\beta)} [a_2]_\lambda^{(2/\beta)}}{[b_1]_\lambda^{(2/\beta)}} \frac{C_\lambda^{(2/\beta)}(\mathbf{A}) C_\lambda^{(2/\beta)}(\mathbf{B})}{C_\lambda^{(2/\beta)}(\mathbf{1}_n)}$$

onde  $C_\lambda^{(2/\beta)}(\mathbf{A})$  é uma função polinomial de Jack [74].

## 4.1 Condutância

### 4.1.1 Distribuição

A equação (4.20) permite-nos encontrar a expressão geral para distribuição da condutância de uma cavidade cujo guia 1 de contato não ideal suporta um modo de propagação ( $N_1 = 1$ ). Levando em conta que os autovalores de reflexão  $R = 1 - g$ , portanto

$$P_{(1,N_2)}(g; \Gamma) = \frac{\beta N_2}{2} g^{(\beta/2)(N_2-2/\beta)} \Gamma^{(\beta N_2/2+1)} {}_2\mathcal{F}_1(\beta N_2/2 + 1, \beta N_2/2 + 1; 1; (1 - \Gamma)(1 - g)).$$

- **Caso**  $\beta = 1$ ,  $N_1 = 1$  e  $N_2 = 2$

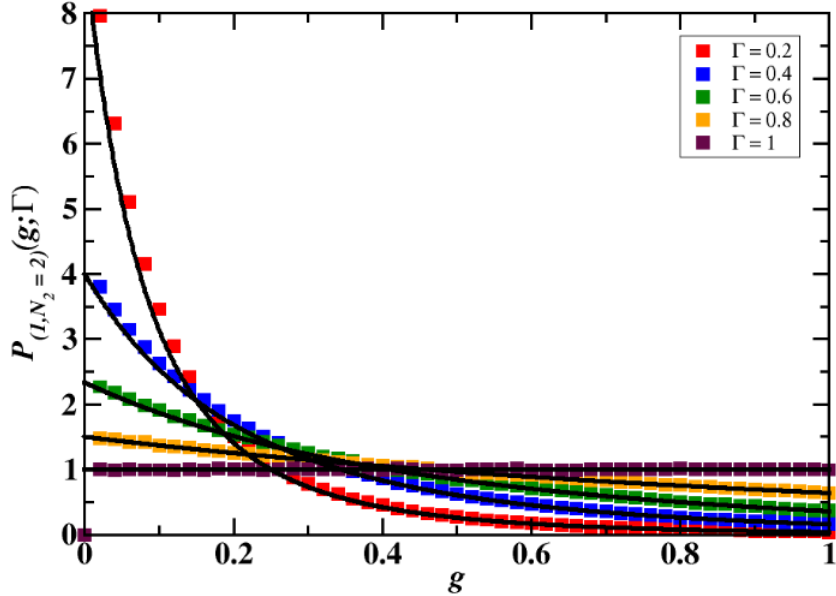
A partir da expressão geral acima da distribuição da condutância para qualquer  $\beta = \{1, 2, 4\}$ . A distribuição da condutância para  $\beta = 1$  é dada por

$$P_{(1,N_2)}(g; \Gamma) = \frac{N_2}{2} g^{(1/2)(N_2-2)} \Gamma^{(N_2/2+1)} {}_2\mathcal{F}_1(N_2/2 + 1, N_2/2 + 1; 1; (1 - \Gamma)(1 - g))$$

com  $N_1 = 1$  e  $N_2 = 2$  temos a seguinte equação para qualquer  $\Gamma$  arbitrário com  $0 \leq g \leq 1$

$$P_{(1,N_2=2)}(g; \Gamma) = \Gamma^2 {}_2\mathcal{F}_1(2, 2; 1; (1 - \Gamma)(1 - g)) \quad (4.21)$$

a figura (4.2) mostra a comparação entre a abordagem hamiltoniana e a expressão analítica (4.21) para esse caso.



**Figura 4.2** Distribuição da condutância para  $\Gamma = 0.2, \Gamma = 0.4, \Gamma = 0.6, \Gamma = 0.8$  e  $\Gamma = 1$  respectivamente com  $\beta = 1$ . Sendo feito  $10^6$  realizações e hamiltoniano de dimensão 200.



- **Caso**  $\beta = 2$ ,  $N_1 = 1$  e  $N_2 = 3$

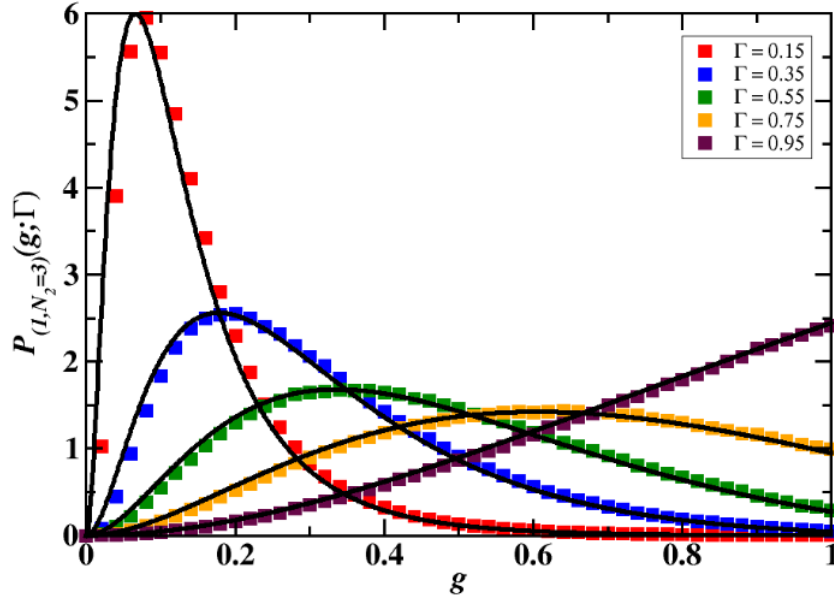
A distribuição da condutância para  $\beta = 2$  é dada por

$$P_{(1,N_2)}(g;\Gamma) = N_2 g^{N_2-1} \Gamma^{N_2+1} {}_2F_1(N_2+1, N_2+1; 1; (1-\Gamma)(1-g)) \quad (4.22)$$

com  $N_1 = 1$ ,  $N_2 = 3$ ,  $\Gamma$  arbitrário e  $0 \leq g \leq 1$

$$P_{(1,N_2=3)}(g;\Gamma) = 3g^2\Gamma^4 {}_2F_1(3, 3; 1; (1-\Gamma)(1-g))$$

a comparação entre a abordagem hamiltoniana e o método usado nesse capítulo é mostrada na figura (4.3).



**Figura 4.3** Distribuição da condutância para  $\Gamma = 0.15, \Gamma = 0.35, \Gamma = 0.55, \Gamma = 0.75$  e  $\Gamma = 0.95$  respectivamente com  $\beta = 2$ . Sendo feito  $10^6$  realizações e hamiltoniano de dimensão 200.

- **Caso**  $\beta = 4$ ,  $N_1 = 1$  e  $N_2 = 4$

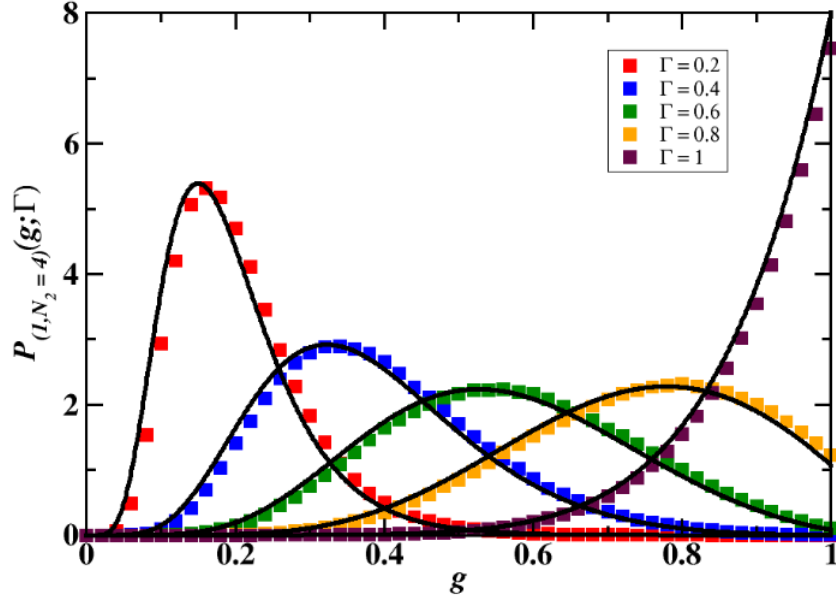
A distribuição da condutância para  $\beta = 4$  é

$$P_{(1,N_2)}(g;\Gamma) = 2N_2 g^{2N_2-1} \Gamma^{2N_2+1} {}_2F_1(2N_2+1, 2N_2+1; 1; (1-\Gamma)(1-g))$$

com  $N_1 = 1$ ,  $N_2 = 4$ ,  $\Gamma$  arbitrário e  $0 \leq g \leq 1$

$$P_{(1,N_2=4)}(g;\Gamma) = 8g^7\Gamma^9 {}_2F_1(9, 9; 1; (1-\Gamma)(1-g))$$

a comparação entre a abordagem hamiltoniana e o método analítico mostrado nesse capítulo é apresentada na figura (4.4).



**Figura 4.4** Distribuição da condutância para  $\Gamma = 0.2, \Gamma = 0.4, \Gamma = 0.6, \Gamma = 0.8$  e  $\Gamma = 1$  respectivamente com  $\beta = 4$ . Sendo feito  $10^6$  realizações e hamiltoniano de dimensão 200.

#### 4.1.2 Média

Para  $N_1 = 1$  temos que  $g = \tau$ , então a equação para distribuição da condutância se torna

$$P_{(1, N_2)}(\tau; \Gamma) = \frac{\beta N_2}{2} \tau^{(\beta/2)(N_2 - 2/\beta)} \Gamma^{(\beta N_2/2 + 1)} \times {}_2F_1(\beta N_2/2 + 1, \beta N_2/2 + 1; 1; (1 - \Gamma)(1 - \tau)). \quad (4.23)$$

Portanto calcula-se a média da condutância integrando a Eq.(4.23)

$$\langle g \rangle = \langle \tau \rangle = \int_0^1 \tau P_{(1, N_2)}(\tau; \Gamma) d\tau. \quad (4.24)$$

- **Caso**  $\beta = 1, N_1 = 1$  e  $N_2 = 2$

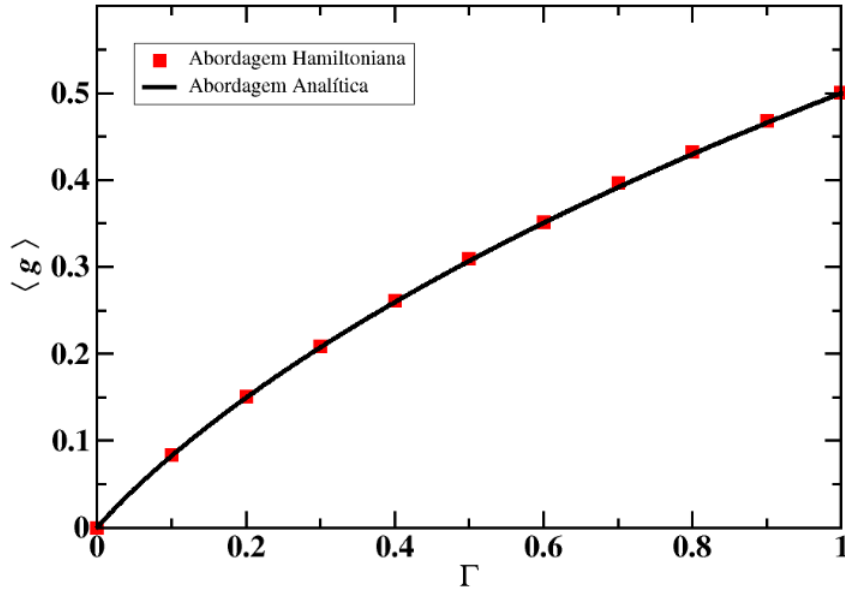
Resolvendo a Eq. (4.24) fazendo

$$\begin{aligned} \langle \tau \rangle &= \int_0^1 \tau \Gamma^2 {}_2F_1(2, 2; 1; (1 - \Gamma)(1 - \tau)) d\tau \\ &= \int_0^1 -\frac{((\Gamma^2(2 + \Gamma(-1 + \tau) - \tau)\tau)}{(\Gamma(-1 + \tau) - \tau)^3)} d\tau \end{aligned}$$

podemos encontrar a média da condutância para esse caso

$$\langle g \rangle = -\frac{\Gamma(-1 + \Gamma - \Gamma \text{Log}[\Gamma])}{(-1 + \Gamma)^2}$$

sendo que a figura (4.5) mostra a comparação entre as abordagens.



**Figura 4.5** Média da Condutância para  $N_2 = 2$  e  $\beta = 1$ , com  $10^5$  realizações e hamiltoniano de dimensão 30.

- **Caso**  $\beta = 2$ ,  $N_1 = 1$  e  $N_2 = 2$

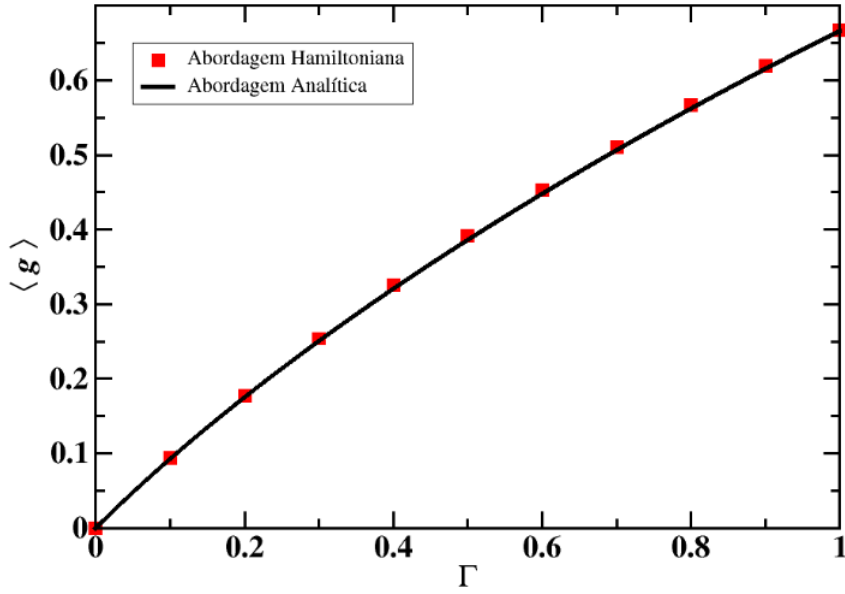
Nesse caso a média de  $\tau$  é dada por

$$\begin{aligned} \langle \tau \rangle &= \int_0^1 2\tau^2 \Gamma^3 {}_2F_1(3, 3; 1; (1-\Gamma)(1-\tau)) d\tau \\ &= \int_0^1 \frac{(2\Gamma^3 \tau^2 (6 + \Gamma^2(-1+\tau)^2 - 6\tau + \tau^2 - 2\Gamma(3 - 4\tau + \tau^2)))}{(\Gamma + \tau - \Gamma\tau)^5} d\tau \end{aligned}$$

portanto a média da condutância

$$\langle g \rangle = \frac{\Gamma(-1 + \Gamma(4 - 3\Gamma) + 2\Gamma^2 \text{Log}[\Gamma])}{(-1 + \Gamma)^3}$$

a comparação é mostrada na figura (4.6).



**Figura 4.6** Média da Condutância para  $N_2 = 2$  e  $\beta = 2$ , com  $10^5$  realizações e hamiltoniano de dimensão 30.

- **Caso**  $\beta = 4$ ,  $N_1 = 1$  e  $N_2 = 2$

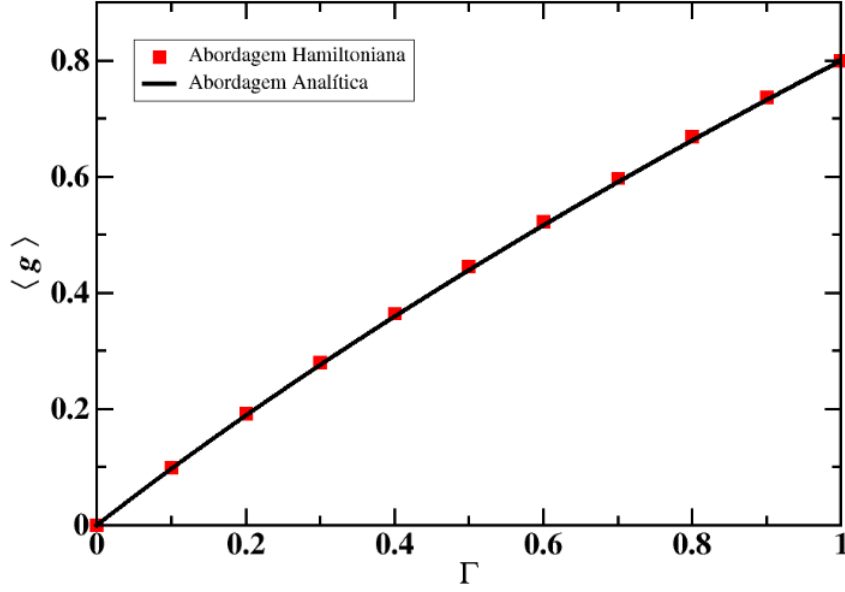
Calculando através da equação (4.24)

$$\begin{aligned} \langle \tau \rangle &= \int_0^1 4\tau\tau^{2(2-1/2)}\Gamma^5 {}_2F_1(5, 5; 1; (1-\Gamma)(1-\tau))d\tau \\ &= \int_0^1 \frac{(2\Gamma^3\tau^2(6 + \Gamma^2(-1 + \tau)^2 - 6\tau + \tau^2 - 2\Gamma(3 - 4\tau + \tau^2)))}{(\Gamma + \tau - \Gamma)^5} d\tau \end{aligned}$$

obtemos a média da condutância

$$\langle g \rangle = \frac{\Gamma(-3 + \Gamma(16 + \Gamma(-36 + \Gamma(48 - 25\Gamma))))}{3(-1 + \Gamma)^5} + \frac{\Gamma(12\Gamma^4 \text{Log}[\Gamma])}{3(-1 + \Gamma)^5}$$

sendo que a figura (4.7) mostra a comparação entre os dois métodos.



**Figura 4.7** Média da Condutância para  $N_2 = 2$  e  $\beta = 4$ , com  $10^5$  realizações e hamiltoniano de dimensão 30.

### 4.1.3 Variância

Para  $N_1 = 1$  a variância da condutância  $Var(g) = \langle g^2 \rangle - \langle g \rangle^2 = Var(\tau) = \langle \tau^2 \rangle - \langle \tau \rangle^2$  pode ser calculada de forma similar a média

$$Var(g) = Var(\tau) = \int_0^1 \tau^2 P_{(1, N_2)}(\tau; \Gamma) d\tau - \langle \tau \rangle^2. \quad (4.25)$$

onde  $P_{(1, N_2)}(\tau; \Gamma)$  é dado na equação (4.23) e  $\langle \tau \rangle$  calculado da mesma forma da subseção anterior.

- **Caso**  $\beta = 1$ ,  $N_1 = 1$  e  $N_2 = 2$

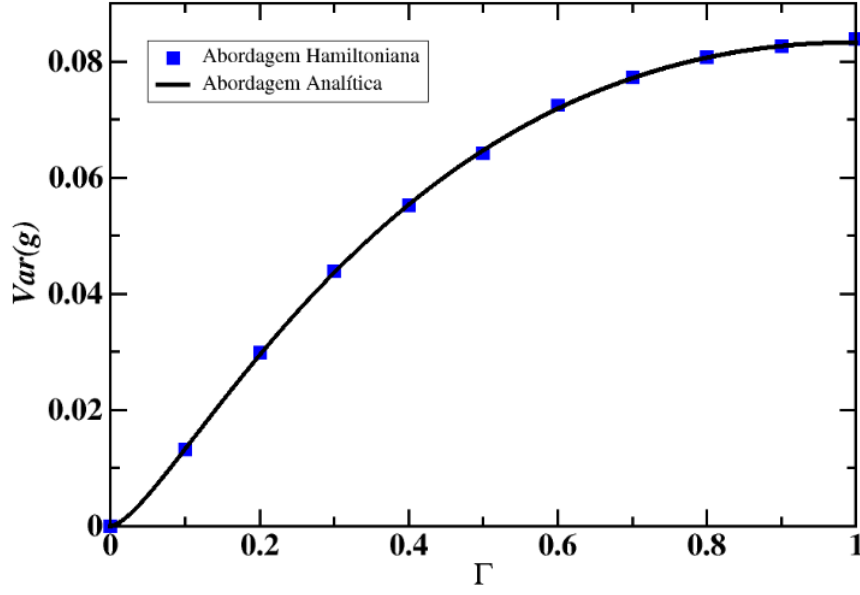
Fazendo a integral da equação (4.25) da mesma forma feita para média e utilizando os resultados da média do mesmo caso

$$\begin{aligned} Var(\tau) &= \int_0^1 \tau^2 \Gamma^2 {}_2F_1(2, 2; 1; (1 - \Gamma)(1 - \tau)) d\tau - \langle \tau \rangle^2 \\ &= \int_0^1 -\frac{((\Gamma^2(2 + \Gamma(-1 + \tau) - \tau)\tau))}{(\Gamma(-1 + \tau) - \tau)^3} d\tau - \langle \tau \rangle^2 \end{aligned}$$

temos a seguinte variância da condutância

$$Var(g) = \frac{\Gamma^2(-(-1 + \Gamma - \Gamma \text{Log}[\Gamma])^2 - (-1 + \Gamma)(4(-1 + \Gamma)))}{(-1 + \Gamma)^4} + \frac{\Gamma^2(-2(1 + \Gamma)\text{Log}[\Gamma])}{(-1 + \Gamma)^4},$$

que pode ser comparada com a abordagem hamiltoniana como mostra a figura (4.8).



**Figura 4.8** Variância da Condutância para  $N_2 = 2$  e  $\beta = 1$ , com  $10^5$  realizações e hamiltoniano de dimensão 30.

- **Caso**  $\beta = 2$ ,  $N_1 = 1$  e  $N_2 = 1$

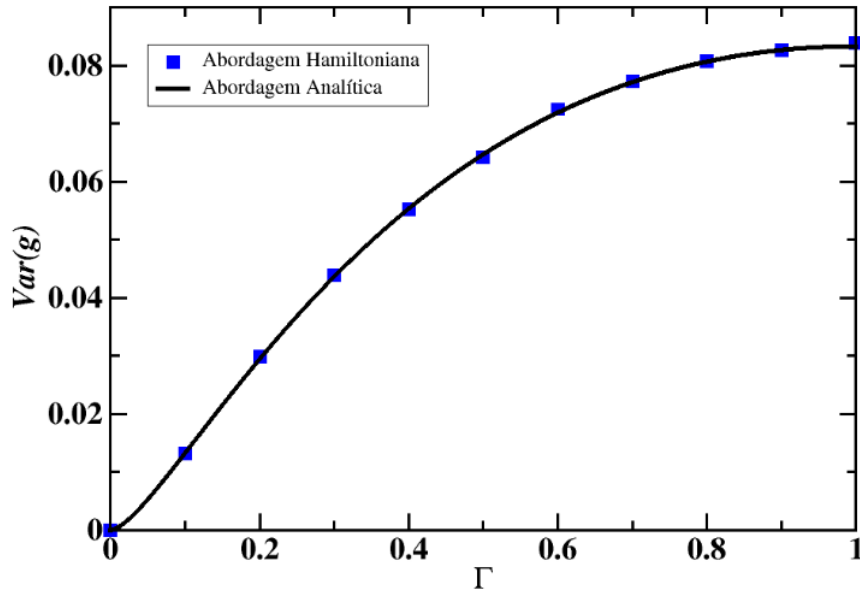
A variância da condutância é encontrada calculando a equação (4.25)

$$\begin{aligned} Var(\tau) &= \int_0^1 \tau^2 \Gamma^2 {}_2F_1(2, 2; 1; (1-\Gamma)(1-\tau)) d\tau - \langle \tau \rangle^2 \\ &= \int_0^1 -\frac{((\Gamma^2(2+\Gamma(-1+\tau))-\tau)\tau^2)}{(\Gamma(-1+\tau)-\tau)^3} d\tau - \langle \tau \rangle^2 \end{aligned}$$

então

$$Var(g) = \frac{\Gamma^2(-(-1+\Gamma-\Gamma\text{Log}[\Gamma])^2 - (-1+\Gamma)(4(-1+\Gamma)))}{(-1+\Gamma)^4} - \frac{2\Gamma^2(1+\Gamma)\text{Log}[\Gamma]}{(1+\Gamma)^4},$$

a figura (4.9) mostra a comparação entre a abordagem hamiltoniana e abordagem analítica.



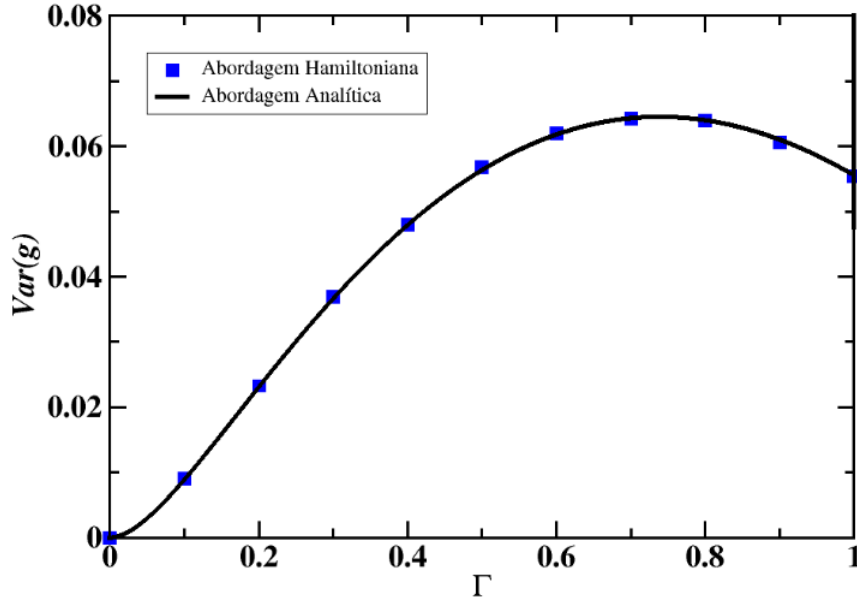
**Figura 4.9** Variância da Condutância para  $N_2 = 1$  e  $\beta = 2$ , com  $10^5$  realizações e hamiltoniano de dimensão 30.

- **Caso**  $\beta = 4$ ,  $N_1 = 1$  e  $N_2 = 1$

Podemos encontrar a variância da condutância calculando a integral da equação (4.25) da mesma forma dos casos anterior

$$Var(g) = \frac{\Gamma^2}{(-1+\Gamma)^6} \left( -(-1+\Gamma(4-3\Gamma) + 2\Gamma^2 \text{Log}(\Gamma))^2 + 3(-1+\Gamma)^2(1+\Gamma(4-5\Gamma) + 2\Gamma(2+\Gamma)\text{Log}(\Gamma)) \right),$$

a figura (4.10) compara os dois métodos.



**Figura 4.10** Variância da Condutância para  $N_2 = 1$  e  $\beta = 4$ , com  $10^5$  realizações e hamiltoniano de dimensão 30.

## 4.2 Potência do Ruído de Disparo

Nesta seção encontraremos uma expressão geral para distribuição da potência do ruído de disparo. Na subseção 4.2.1, compararemos as expressões analíticas com a abordagem hamiltoniana para os casos:  $\beta = 1$  e  $N_2 = 4$ ,  $\beta = 2$  e  $N_2 = 3$ , e  $\beta = 4$  e  $N_2 = 1$ . Na subseção (4.2.2) encontraremos a média de  $p$  em função de  $\Gamma$  e na (4.2.3) a variância.

### 4.2.1 Distribuição

Com apenas um canal aberto no guia 1, a distribuição da potência do ruído de disparo pode ser calculada usando a distribuição da equação (4.23)

$$W_{(1,N_2)}(p; \Gamma) = \int_0^1 \delta[p - \tau(1 - \tau)] P_{(1,N_2)}(\tau; \Gamma) d\tau. \quad (4.26)$$

Utilizaremos para isso, as propriedades da delta de Dirac já conhecida na literatura [76][77]

$$\delta(f(x)) = \sum_n \frac{\delta(x - x_n)}{|f'(x_n)|}$$

onde  $f(x_n) = 0$  e  $f'(x_n) \neq 0$ , assim temos

$$\delta(p - \tau(1 - \tau)) = \frac{1}{\sqrt{1 - 4p}} \left( \delta\left(\tau - \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4p}}{2}\right)\right) + \delta\left(\tau - \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4p}}{2}\right)\right) \right).$$



Então (4.26) torna-se

$$W_{(1,N_2)}(p;\Gamma) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-4p}} \left( \delta \left( \tau - \left( \frac{1+\sqrt{1-4p}}{2} \right) \right) + \delta \left( \tau - \left( \frac{1-\sqrt{1-4p}}{2} \right) \right) \right) \\ \times \frac{\beta N_2}{2} \tau^{(\beta/2)(N_2-2/\beta)} \Gamma^{\beta N_2/2+1} {}_2\mathcal{F}_1 \left( \frac{\beta N_2}{2} + 1, \frac{\beta N_2}{2} + 1; 1; (1-\tau)(1-\Gamma) \right) d\tau,$$

portanto a expressão analítica da distribuição da potência do ruído de disparo para  $\beta = \{1, 2, 4\}$  é

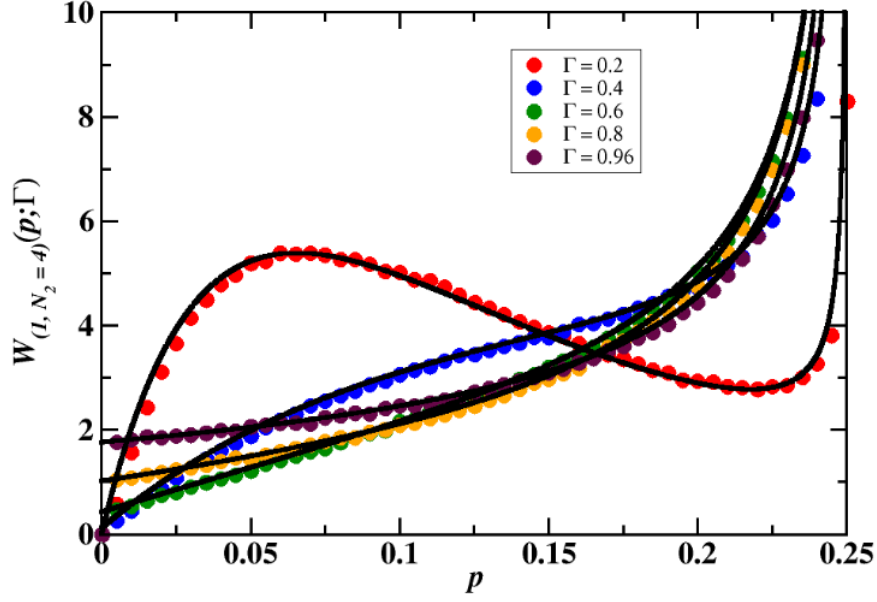
$$W_{(1,N_2)}(p;\Gamma) = \frac{1}{\sqrt{1-4p}} 2^{(-\frac{\beta N_2}{2})} N_2 \beta \Gamma^{(\frac{\beta N_2}{2}+1)} \\ \times \left( (1+\sqrt{1-4p})^{(\frac{\beta N_2}{2}-1)} {}_2\mathcal{F}_1 \left( \frac{\beta N_2}{2} + 1, \frac{\beta N_2}{2} + 1; 1; \frac{1}{2}(\sqrt{1-4p}-1)(\Gamma-1) \right) \right. \\ \left. + (1-\sqrt{1-4p})^{(\frac{\beta N_2}{2}-1)} {}_2\mathcal{F}_1 \left( \frac{\beta N_2}{2} + 1, \frac{\beta N_2}{2} + 1; 1; -\frac{1}{2}(\sqrt{1-4p}+1)(\Gamma-1) \right) \right). \quad (4.27)$$

• **Caso**  $\beta = 1$ ,  $N_1 = 1$  e  $N_2 = 4$

A distribuição da potência do ruído de disparo para esse caso em função da barreira de tunelamento  $\Gamma$  e  $0 \leq p \leq 0.25$ , de acordo (4.27) é dada por

$$W_{(1,N_2=4)}(p;\Gamma) = \frac{1}{((p(-1+\Gamma)^2 + \Gamma)^5 \sqrt{1-4p})} (2\Gamma^3(2p^4(-1+\Gamma)^7 + \Gamma^5) \\ - p(-1+\Gamma)(6 + \Gamma^2 + \Gamma^3 + 6\Gamma^4 + 4\Gamma^5) - p^3(-1+5)^5(31 \\ + \Gamma(27 + 4\Gamma)) + p^2(-1+\Gamma)^3(30 + \Gamma(28 + \Gamma(30 + \Gamma(21 + \Gamma))))),$$

a comparação entre a abordagem hamiltoniana e analítica é mostrada na figura (4.11).



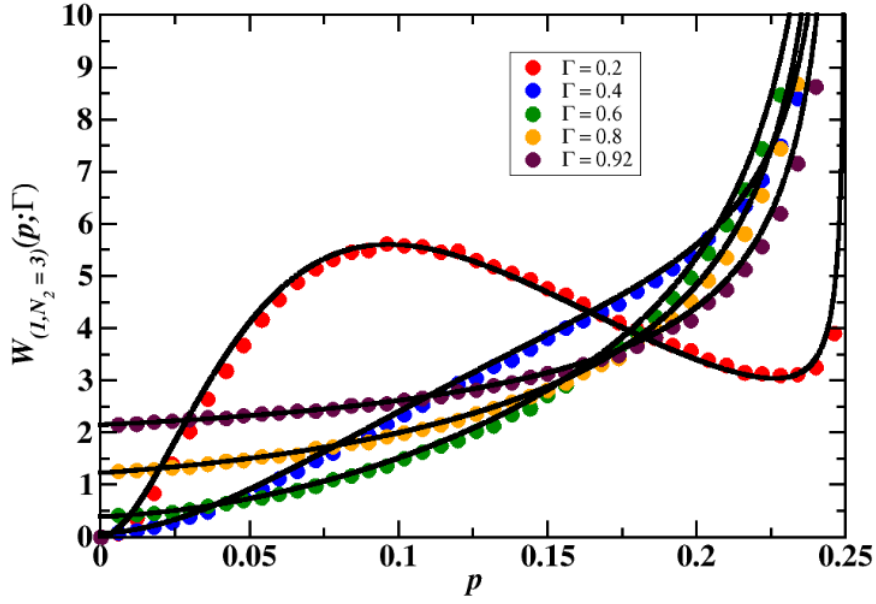
**Figura 4.11** Distribuição da potência do ruído de disparo para  $N_2 = 4$  e  $\beta = 1$ , com  $10^6$  realizações e hamiltoniano de dimensão 200.

- **Caso**  $\beta = 2$ ,  $N_1 = 1$  e  $N_2 = 3$

A partir da equação (4.27) temos que a distribuição da potência do ruído de disparo em função da barreira de tunelamento  $\Gamma$  e  $0 \leq p \leq 0.25$  é dada por

$$\begin{aligned}
 W_{(1, N_2=3)}(p; \Gamma) = & \frac{1}{((p(-1 + \Gamma)^2 + \Gamma)^7 \sqrt{1 - 4p})} (3\Gamma^4(2p^6(-1 + \Gamma)^{10} + \Gamma^7 \\
 & - p^5(-1 + \Gamma)^8(97 + 80\Gamma + 9\Gamma^2) + p^4(-1 + \Gamma)^6(232 + 369\Gamma \\
 & + 348\Gamma^2 + 137\Gamma^3 + 6\Gamma^4) - p^3(-1 + \Gamma)^4(130 + 176\Gamma + 221\Gamma^2 + 256\Gamma^3 \\
 & + 244\Gamma^4 + 64\Gamma^5 + \Gamma^6) + p^2(-1 + \Gamma)^2(20 + 10\Gamma + 12\Gamma^2 \\
 & + 13\Gamma^3 + 14\Gamma^4 + 36\Gamma^5 + 72\Gamma^6 + 9\Gamma^7) + p(7\Gamma^6 - 9\Gamma^8)),
 \end{aligned}$$

a comparação para os dois métodos é mostrada na figura (4.12).



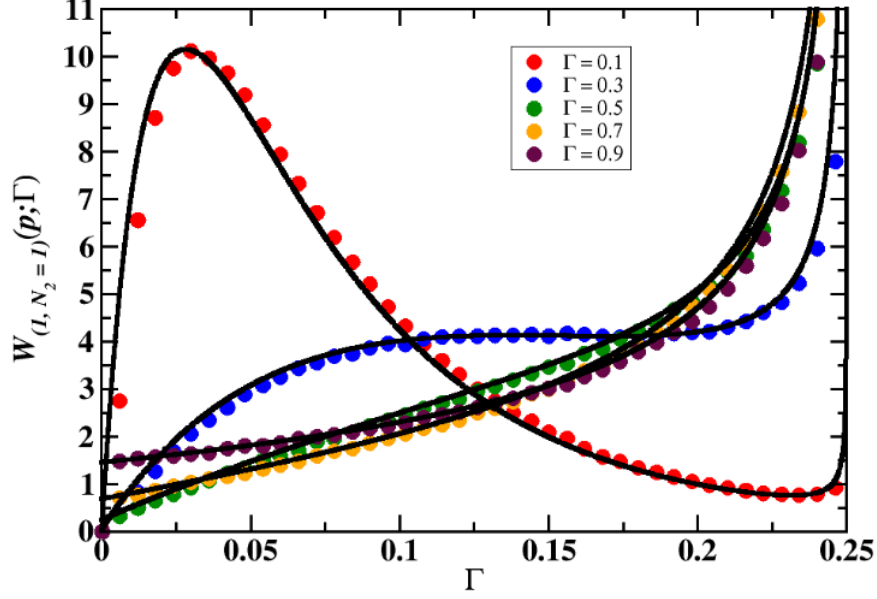
**Figura 4.12** Distribuição da potência do ruído de disparo para  $N_2 = 3$  e  $\beta = 2$ , com  $10^6$  realizações e hamiltoniano de dimensão 200.

- **Caso**  $\beta = 4$ ,  $N_1 = 1$  e  $N_2 = 1$

Usando equação (4.27) temos que a distribuição da potência do ruído de disparo em função da barreira de tunelamento  $\Gamma$  e  $0 \leq p \leq 0.25$  é dada por

$$\begin{aligned}
 W_{(1, N_2=1)}(p; \Gamma) = & \frac{1}{((p(-1 + \Gamma)^2 + \Gamma)^5 \sqrt{1 - 4p})} (2\Gamma^3(2p^4(-1 + \Gamma)^7 + \Gamma^5 - p(-1 + \Gamma)(6 \\
 & + \Gamma^2 + \Gamma^3 + 6\Gamma^4 + 4\Gamma^5) - p^3(-1 + \Gamma)^5(31 + \Gamma(27 + 4\Gamma)) + p^2(-1 \\
 & + \Gamma)^3(30 + \Gamma(28 + \Gamma(30 + \Gamma(21 + \Gamma))))),
 \end{aligned}$$

a abordagem hamiltoniana versus abordagem analítica é mostrada na figura (4.13).



**Figura 4.13** Distribuição da potência do ruído de disparo para  $N_2 = 1$  e  $\beta = 4$ , com  $10^6$  realizações e hamiltoniano de dimensão 200.

#### 4.2.2 Média

Para  $N_1 = 1$  temos que  $p = \tau(1 - \tau)$ , então

$$\langle p \rangle = \langle \tau(1 - \tau) \rangle = \int_0^1 \tau(1 - \tau) P_{(1, N_2)}(\tau; \Gamma) d\tau. \quad (4.28)$$

onde  $P_{(1, N_2)}(\tau; \Gamma)$  é dada na equação (4.23).

- **Caso  $\beta = 1$ ,  $N_1 = 1$  e  $N_2 = 2$**

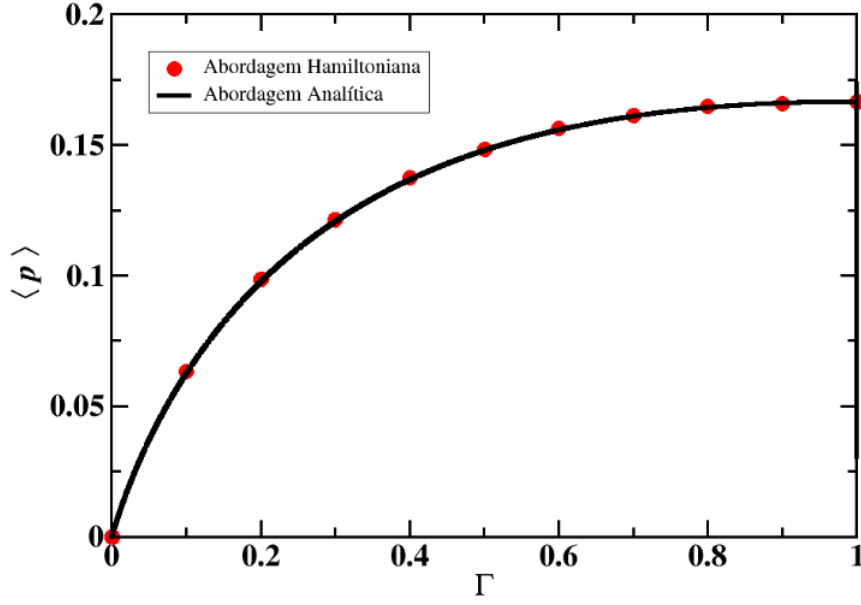
Calculando a integral da equação (4.28)

$$\begin{aligned} \langle \tau(1 - \tau) \rangle &= \int_0^1 \tau(1 - \tau) \Gamma^2 {}_2F_1(2, 2; 1; (1 - \Gamma)(1 - \tau)) d\tau \\ &= \int_0^1 \frac{(\Gamma^2(2 + \Gamma(-1 + \tau) - \tau)(-1 + \tau)\tau)}{(\Gamma(-1 + \tau) - \tau)^3} d\tau, \end{aligned}$$

integrando podemos encontrar a média da potência do ruído de disparo para esse caso em função da barreira de tunelamento  $\Gamma$

$$\langle p \rangle = \frac{1}{(-1 + \Gamma)^3} (\Gamma(-1 + \Gamma(-2 + 3\Gamma) - \Gamma(3 + \Gamma)\text{Log}[\Gamma])),$$

a comparação dos dois métodos é mostrada na figura (4.14).



**Figura 4.14** Média da potência do ruído de disparo para  $N_2 = 2$  e  $\beta = 1$ , com  $10^5$  realizações e hamiltoniano de dimensão 30.

- **Caso**  $\beta = 2$ ,  $N_1 = 1$  e  $N_2 = 2$

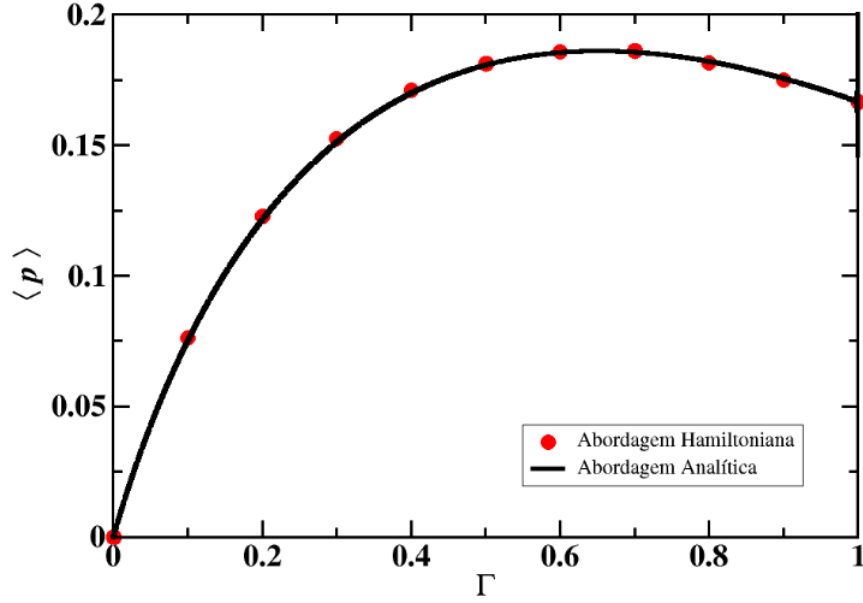
Integrando na equação (4.28)

$$\begin{aligned} \langle \tau(1-\tau) \rangle &= \int_0^1 \tau(1-\tau) 2\tau \Gamma^3 {}_2F_1(3, 3; 1; (1-\Gamma)(1-\tau)) d\tau \\ &= \int_0^1 -\frac{((2\Gamma^3(-1+\tau)\tau^2(6+\Gamma^2(-1+\tau)^2-6\tau+\tau^2-2\Gamma(3-4\tau+\tau^2))))}{(\Gamma+\tau-\Gamma\tau)^5} d\tau, \end{aligned}$$

podemos encontrar a distribuição da potência do ruído de disparo para esse caso em função da barreira de tunelamento  $\Gamma$

$$\langle p \rangle = -\frac{1}{(-1+\Gamma)^4} ((\Gamma(-1+\Gamma(8+(5-12\Gamma)\Gamma)) + 2\Gamma^2(7+2\Gamma)\text{Log}[\Gamma])),$$

a comparação dos métodos usados até aqui é mostrada na figura (4.15).



**Figura 4.15** Média da potência do ruído de disparo para  $N_2 = 2$  e  $\beta = 2$ , com  $10^5$  realizações e hamiltoniano de dimensão 30.

- **Caso**  $\beta = 4$ ,  $N_1 = 1$  e  $N_2 = 2$

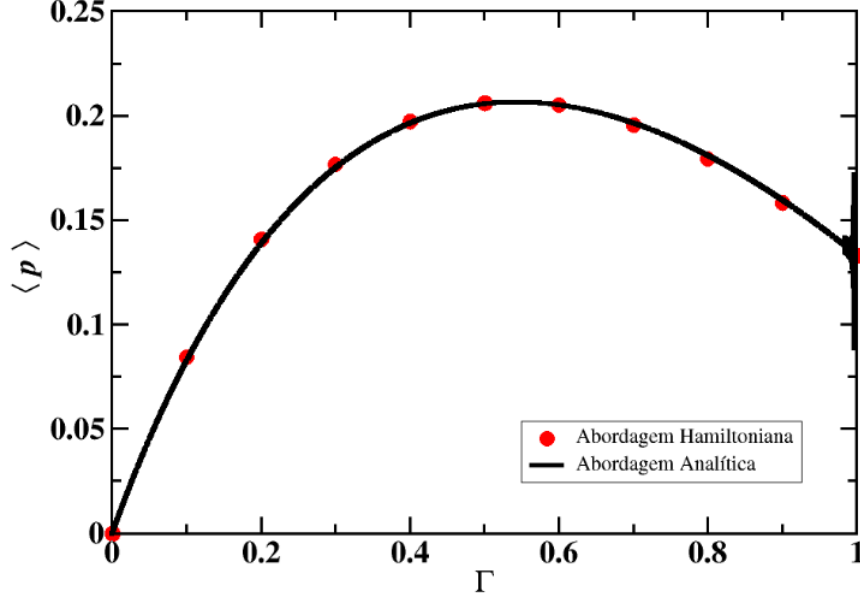
Calculando a integral da equação (4.28),

$$\begin{aligned}
 \langle \tau(1-\tau) \rangle &= \int_0^1 \tau(1-\tau) 4\tau^{2(2-1/2)} \Gamma^3 {}_2F_1(5, 5; 1; (1-\Gamma)(1-\tau)) d\tau \\
 &= \int_0^1 -\frac{1}{(\Gamma + \tau - \Gamma\tau)^9} 4\Gamma^5 (-1 + \tau)\tau^4 (70 - 4\Gamma^3(-5 + \tau)(-1 + \tau))^3 \\
 &\quad + \Gamma^4(-1 + \tau)^4 - 140\tau + 90\tau^2 - 20\tau^3 + \tau^4 \\
 &\quad + 6\Gamma^2(-1 + \tau)^2(15 - 10\tau + \tau^2) - 4\Gamma(35 - 80\tau + 60\tau^2 - 16\tau^3 + \tau^4) d\tau,
 \end{aligned}$$

dessa forma a média da potência do ruído de disparo para esse caso em função da barreira de tunelamento  $\Gamma$

$$\langle p \rangle = -4\Gamma^5 \left( \frac{3 - \Gamma(21 + \Gamma(-71 + \Gamma(193 + 160\Gamma)))}{12(-1 + \Gamma)^5 \Gamma^4} + \frac{(21 + 4\Gamma)\text{Log}[\Gamma]}{(-1 + \Gamma)^6} \right),$$

a comparação para os dois métodos é mostrada na figura (4.16).



**Figura 4.16** Média da potência do ruído de disparo para  $N_2 = 2$  e  $\beta = 4$ , com  $10^5$  realizações e hamiltoniano de dimensão 30.

### 4.2.3 Variância

Para o guia 1 com um canal aberto a variância da potência do ruído de disparo é dada por  $Var(p) = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 = Var(\tau(1-\tau)) = \langle (\tau(1-\tau))^2 \rangle - \langle \tau(1-\tau) \rangle^2$  e pode ser calculada fazendo

$$Var(p) = Var(\tau(1-\tau)) = \int_0^1 (\tau(1-\tau))^2 P_{(1;N_2)}(\tau; \Gamma) d\tau - \langle \tau(1-\tau) \rangle^2 \quad (4.29)$$

onde  $P_{(1;N_2)}(\tau; \Gamma)$  é dada na equação (4.23) e  $\langle \tau(1-\tau) \rangle^2$  é o quadrado da média que já foi calculada na seção anterior.

- **Caso**  $\beta = 1$ ,  $N_1 = 1$  e  $N_2 = 4$

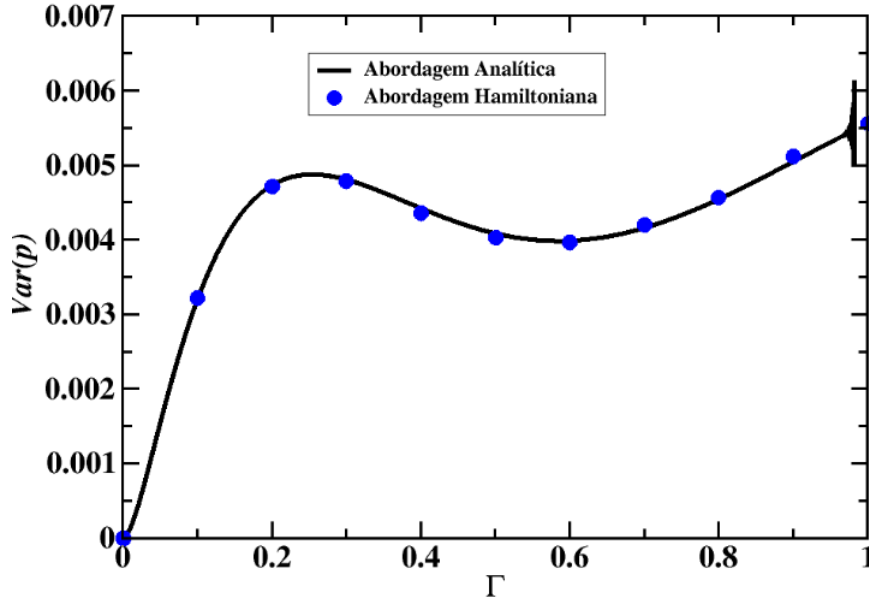
Calculando a integral da equação (4.29),

$$\begin{aligned} Var(p) &= \int_0^1 2(\tau(1-\tau))^2 \tau \Gamma^3 {}_2F_1(5, 5; 1; (1-\Gamma)(1-\tau)) d\tau - \langle \tau(1-\tau) \rangle^2 \\ &= \int_0^1 \frac{(2\Gamma^3(-1+\tau)^2 \tau^3 (6 + \Gamma^2(-1+\tau)^2 - 6\tau + \tau^2 - 2\Gamma(3-4\tau + \tau^2)))}{(\Gamma + \tau - \Gamma\tau)^5} d\tau \\ &\quad - \langle \tau(1-\tau) \rangle^2, \end{aligned}$$

então a média da potência do ruído de disparo em função da barreira de tunelamento  $\Gamma$

$$\begin{aligned} Var(p) &= \frac{\Gamma^2(9 + \Gamma(254 + \Gamma(36 - \Gamma(270 + 29\Gamma))))}{(3(-1 + \Gamma)^6)} + \frac{\Gamma^2(6\Gamma(18 + \Gamma(57 + \Gamma(24 + \Gamma)))\text{Log}[\Gamma])}{(3(-1 + \Gamma)^6)} \\ &\quad - \frac{(\Gamma^2(-1 + \Gamma(8 + (5 - 12\Gamma)\Gamma)) + 2\Gamma^2(7 + 2\Gamma)\text{Log}[\Gamma])^2}{(-1 + \Gamma)^8}, \end{aligned}$$

a comparação para os dois métodos é mostrada na figura (4.17).



**Figura 4.17** Variância da potência do ruído de disparo para  $N_2 = 4$  e  $\beta = 1$ , com  $10^5$  realizações e hamiltoniano de dimensão 30.

- **Caso**  $\beta = 2$ ,  $N_1 = 1$  e  $N_2 = 1$

Fazendo a integral da equação (4.29),

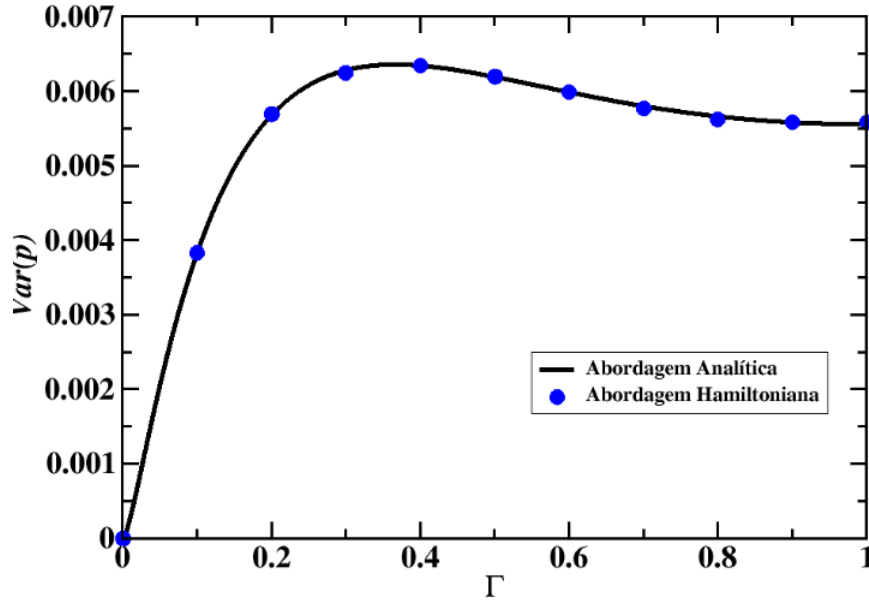
$$\begin{aligned} \text{Var}(p) &= \int_0^1 (\tau(1-\tau))^2 \Gamma^2 {}_2F_1(2, 2; 1; (1-\Gamma)(1-\tau)) d\tau - \langle \tau(1-\tau) \rangle^2 \\ &= \int_0^1 -\frac{((\Gamma^2(2 + (-1+\tau) - \tau)(-1+\tau)^2 \tau^2))}{(\Gamma(-1+\tau) - \tau)^3} d\tau - \langle \tau(1-\tau) \rangle^2, \end{aligned}$$

então a média da potência do ruído de disparo em função da barreira de tunelamento  $\Gamma$

$$\begin{aligned} \text{Var}(p) &= -\frac{(\Gamma^2(-1 + \Gamma(-2 + 3\Gamma) - \Gamma(3 + \Gamma)\text{Log}(\Gamma))^2)}{(-1 + \Gamma)^6} \\ &\quad - \frac{(\Gamma^2((-1 + \Gamma)(19 + \Gamma(28 + \Gamma)) - 6(1 + \Gamma(5 + 2\Gamma))\text{Log}(\Gamma)))}{(3(-1 + \Gamma)^5)}, \end{aligned}$$

a comparação entre os métodos é mostrada na figura (4.18).





**Figura 4.18** Variância da potência do ruído de disparo para  $N_2 = 1$  e  $\beta = 2$ , com  $10^5$  realizações e hamiltoniano de dimensão 30.

- **Caso**  $\beta = 4$ ,  $N_1 = 1$  e  $N_2 = 1$

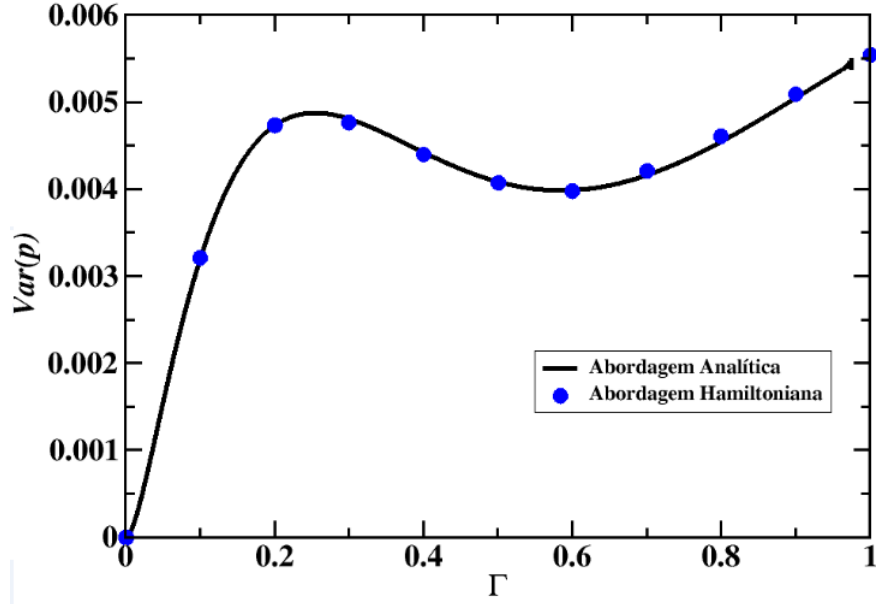
Calculando a integral da equação (4.29),

$$\begin{aligned} Var(p) &= \int_0^1 2(\tau(1-\tau))^2 \tau \Gamma^3 {}_2F_1(3, 3; 1; (1-\Gamma)(1-\tau)) d\tau - \langle \tau(1-\tau) \rangle^2 \\ &= \int_0^1 \frac{(2\Gamma^3(-1+\tau)^2 \tau^3 (6 + \Gamma^2(-1+\tau)^2 - 6\tau + \tau^2 - 2\Gamma(3 - 4\tau + \tau^2)))}{(\Gamma + \tau - \Gamma\tau)^5} d\tau \\ &\quad - \langle \tau(1-\tau) \rangle^2, \end{aligned}$$

dessa forma encontraremos a média da potência do ruído de disparo para esse caso em função da barreira de tunelamento  $\Gamma$

$$\begin{aligned} Var(p) &= \frac{\Gamma^2(9 + \Gamma(254 + \Gamma(36 - \Gamma(270 + 29\Gamma))))}{3(-1 + \Gamma)^6} + \frac{\Gamma^2(6\Gamma(18 + \Gamma(57 + \Gamma(24 + \Gamma)))\text{Log}[\Gamma])}{3(-1 + \Gamma)^6} \\ &\quad - \frac{\Gamma^2(-1 + \Gamma(8 + (5 - 12\Gamma)\Gamma) + 2\Gamma^2(7 + 2\Gamma)\text{Log}[\Gamma])^2}{(-1 + \Gamma)^8}, \end{aligned}$$

a comparação para os dois métodos é mostrada na figura (4.19).



**Figura 4.19** Variância da potência do ruído de disparo para  $N_2 = 1$  e  $\beta = 4$ , com  $10^5$  realizações e hamiltoniano de dimensão 30.

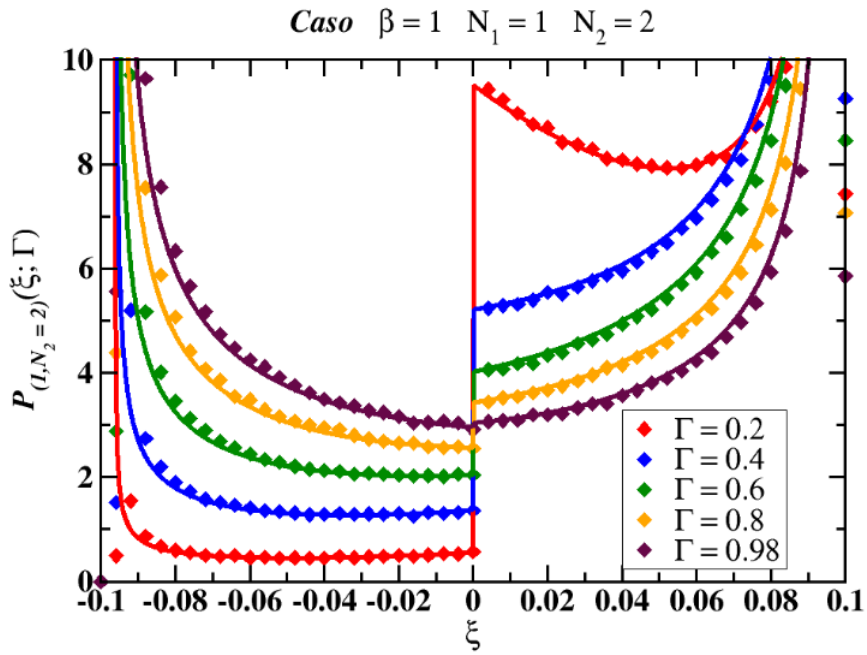
## 4.3 Assimetria

### 4.3.1 Distribuição

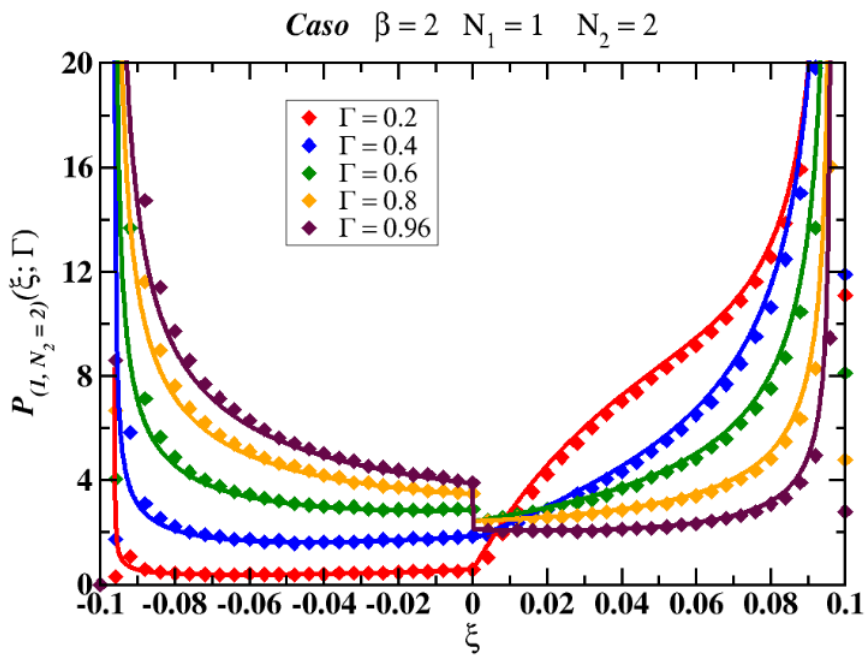
O terceiro cumulante está ligado à assimetria da distribuição de corrente. Para  $N_1 = 1$  podemos encontrar  $P_{(1,N_2)}(\xi; \Gamma)$  fazendo o seguinte cálculo

$$P_{(1,N_2)}(\xi; \Gamma) = \int_0^1 \delta(\xi - \tau(1-\tau)(1-2\tau)) P_{(1,N_2)}(\tau; \Gamma) d\tau. \quad (4.30)$$

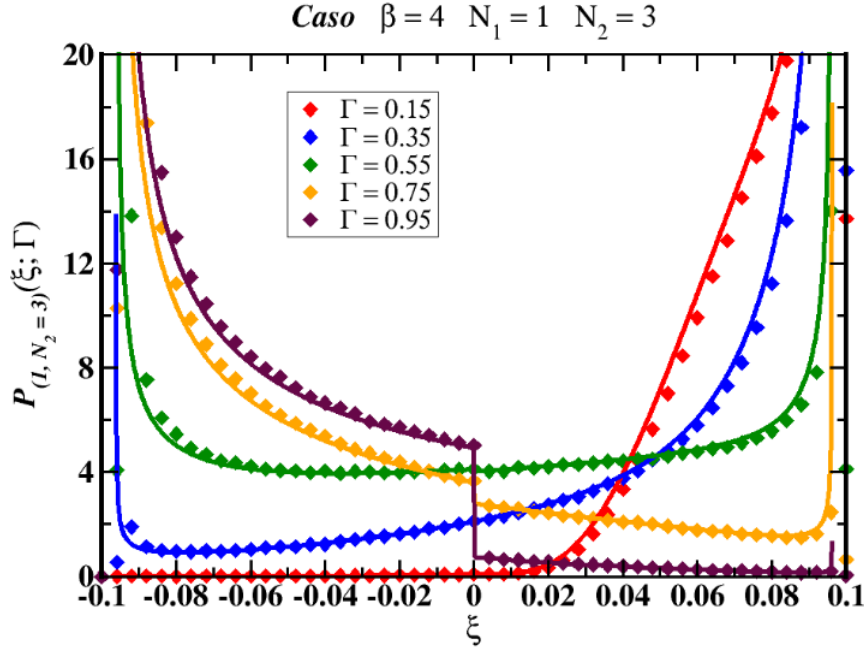
Integrando a Eq. (4.30) de forma numérica, temos os resultados para os seguintes casos:



**Figura 4.20** Distribuição da assimetria para  $N_2 = 2$  e  $\beta = 1$ , com  $10^6$  realizações e hamiltoniano de dimensão 200.



**Figura 4.21** Distribuição da assimetria para  $N_2 = 2$  e  $\beta = 2$ , com  $10^6$  realizações e hamiltoniano de dimensão 200.



**Figura 4.22** Distribuição da assimetria para  $N_2 = 3$  e  $\beta = 4$ , com  $10^6$  realizações e hamiltoniano de dimensão 200.

As figuras (4.20), (4.21) e (4.22) mostram a comparação dos resultados da abordagem hamiltoniana e da integral numérica.

Resultados envolvendo a média da assimetria, variância e o quarto cumulante serão apresentados no apêndice B.

## 4.4 Outros Resultados Exatos

O ensemble de matrizes  $\mathcal{S}$  é definida pela probabilidade diferencial

$$dP_{\langle \mathcal{S} \rangle}^{(\beta)} = P(\mathcal{S}) d\mu^{(\beta)}(\mathcal{S}) \quad (4.31)$$

onde  $d\mu^{(\beta)}(\mathcal{S})$  é a medida de Haar definida pela invariância

$$\begin{cases} d\mu^{(1)}(\mathcal{S}) = d\mu^{(1)}(\mathcal{S}') & \text{com } \mathcal{S}' = \mathbf{U}_0 \mathcal{S} \mathbf{U}_0^T \\ d\mu^{(2)}(\mathcal{S}) = d\mu^{(2)}(\mathcal{S}') & \text{com } \mathcal{S}' = \mathbf{U}_0 \mathcal{S} \mathbf{V}_0 \end{cases} \quad (4.32)$$

onde  $\mathbf{U}_0$  e  $\mathbf{V}_0$  são matrizes unitárias fixas. Estas transformações representam automorfismo de conjuntos de matrizes unitárias ( $\beta = 2$ ) e unitárias simétricas ( $\beta = 1$ ).

A média de qualquer função  $f(\mathcal{S})$  é definida por

$$\langle f(\mathcal{S}) \rangle = \int f(\mathcal{S}) P(\mathcal{S}) d\mu^{(\beta)}(\mathcal{S}). \quad (4.33)$$

Vamos considerar o caso  $N_1 = N_2 = 1$  e  $\beta = 2$

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{1-\tau} & \sqrt{\tau} \\ \sqrt{\tau} & \sqrt{1-\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\gamma} & 0 \\ 0 & e^{i\delta} \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

sendo que a medida de Haar para essa decomposição

$$d\mu^{(2)}(\mathcal{S}) = \frac{d\alpha d\beta d\gamma d\delta}{(2\pi)^4}. \quad (4.35)$$

Como na Eq. (3.9), temos que

$$\langle \mathcal{S} \rangle = \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_1 & 0 \\ 0 & \hat{\gamma}_2 \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

multiplicando  $\langle \mathcal{S} \rangle$  da equação (4.36) pela sua transposta conjugada

$$\langle \mathcal{S} \rangle \langle \mathcal{S} \rangle^\dagger = \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_1^2 & 0 \\ 0 & \hat{\gamma}_2^2 \end{pmatrix}, \quad (4.37)$$

então o determinante do numerador do Núcleo de Poisson Eq. (3.8) pode ser organizado da seguinte maneira

$$\det(\mathbf{1} - \langle \mathcal{S} \rangle \langle \mathcal{S} \rangle^\dagger) = \det \begin{pmatrix} 1 - \hat{\gamma}_1^2 & 0 \\ 0 & 1 - \hat{\gamma}_2^2 \end{pmatrix} = (1 - \hat{\gamma}_1^2)(1 - \hat{\gamma}_2^2). \quad (4.38)$$

Multiplicando  $\mathcal{S}$  pela transposta conjugada de  $\langle \mathcal{S} \rangle$

$$\begin{aligned} \mathcal{S} \langle \mathcal{S} \rangle^\dagger &= \begin{pmatrix} -e^{i(\alpha+\gamma)}\sqrt{1-\tau} & e^{i(\alpha+\delta)}\sqrt{\tau} \\ e^{i(\beta+\gamma)}\sqrt{\tau} & e^{i(\beta+\delta)}\sqrt{1-\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_1 & 0 \\ 0 & \hat{\gamma}_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -e^{i(\alpha+\gamma)}\hat{\gamma}_1\sqrt{1-\tau} & e^{i(\alpha+\delta)}\hat{\gamma}_2\sqrt{\tau} \\ e^{i(\beta+\gamma)}\hat{\gamma}_1\sqrt{\tau} & e^{i(\beta+\delta)}\hat{\gamma}_2\sqrt{1-\tau} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.39)$$

então o determinante do denominador do Núcleo de Poisson fica

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{1} - \mathcal{S} \langle \mathcal{S} \rangle^\dagger) &= \det \begin{pmatrix} 1 + e^{i(\alpha+\gamma)}\hat{\gamma}_1\sqrt{1-\tau} & -e^{i(\alpha+\delta)}\hat{\gamma}_2\sqrt{\tau} \\ -e^{i(\beta+\gamma)}\hat{\gamma}_1\sqrt{\tau} & 1 - e^{i(\beta+\delta)}\hat{\gamma}_2\sqrt{1-\tau} \end{pmatrix} \\ &= (1 + e^{i(\alpha+\gamma)}\hat{\gamma}_1\sqrt{1-\tau})(1 - e^{i(\beta+\delta)}\hat{\gamma}_2\sqrt{1-\tau}) - e^{i(\alpha+\beta+\delta+\gamma)}\hat{\gamma}_1\hat{\gamma}_2\tau \\ &= 1 + e^{i(\alpha+\gamma)}\hat{\gamma}_1\sqrt{1-\tau} - e^{i(\beta+\delta)}\hat{\gamma}_2\sqrt{1-\tau} - e^{i(\alpha+\beta+\delta+\gamma)}\hat{\gamma}_1\hat{\gamma}_2 \end{aligned}$$

Definindo  $\varphi = \alpha + \gamma$ ,  $\psi = \beta + \delta$ ,  $\tilde{\varphi} = \alpha - \gamma$  e  $\tilde{\psi} = \beta - \delta$ , com  $\varphi$  e  $\psi$  no intervalo  $(0, 2\pi)$ , temos a seguinte diferencial de  $P(\tau, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$

$$\begin{aligned} dP_{(\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2)}^{(2)} &= \frac{(1 - \hat{\gamma}_1^2)^2(1 - \hat{\gamma}_2^2)^2}{\left| (1 + e^{i(\alpha+\gamma)}\hat{\gamma}_1\sqrt{1-\tau})(1 - e^{i(\beta+\delta)}\hat{\gamma}_2\sqrt{1-\tau}) - e^{i(\alpha+\beta+\delta+\gamma)}\hat{\gamma}_1\hat{\gamma}_2\tau \right|^4} \\ &\times \frac{d\alpha d\beta d\gamma d\delta}{(2\pi)^4}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

#### 4.4.1 Caso Particular $\hat{\gamma}_2 = 0$

A equação (4.41) torna-se

$$dP_{(\hat{\gamma}_1, 0)}^{(2)}(\tau, \alpha, \gamma) = \frac{(1 - \hat{\gamma}_1^2)^2}{|1 + e^{i(\alpha+\gamma)}\hat{\gamma}_1\sqrt{1-\tau}|^4} \frac{d\alpha d\beta d\gamma d\delta}{(2\pi)^2}.$$

Usando a definição  $\varphi = \alpha + \gamma$  e  $\tilde{\varphi} = \alpha$ , temos

$$dP_{(\hat{\gamma}_1, 0)}^{(2)}(\tau, \varphi, \tilde{\varphi}) = \frac{(1 - \hat{\gamma}_1^2)^2}{|1 + e^{i\varphi}\hat{\gamma}_1\sqrt{1-\tau}|^4} \frac{d\alpha d\beta d\gamma d\delta}{(2\pi)(2\pi)}$$

então fazendo  $\Gamma_1 = \Gamma$

$$\begin{aligned} P(\tau; \Gamma) &= \frac{\Gamma^2}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\tilde{\varphi} \int_{\tilde{\varphi}}^{\tilde{\varphi}+2\pi} d\varphi \frac{1}{|1 + e^{i\varphi}\hat{\gamma}_1\sqrt{1-\tau}|^4} \\ &= \frac{\Gamma^2}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\tilde{\varphi} \int_{\tilde{\varphi}}^{\tilde{\varphi}+2\pi} d\varphi \frac{1}{(1 + 2\hat{\gamma}_1\sqrt{1-\tau}\cos\varphi + \hat{\gamma}_1^2(1-\tau))^2} \\ &= \frac{\Gamma^2}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\tilde{\varphi} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{(1 + 2\hat{\gamma}_1\sqrt{1-\tau}\cos\varphi + \hat{\gamma}_1^2(1-\tau))^2}. \end{aligned}$$

Portanto

$$P(\tau; \Gamma) = \frac{\Gamma^2}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{(1 + 2\hat{\gamma}_1\sqrt{1-\tau}\cos\varphi + \hat{\gamma}_1^2(1-\tau))^2} \quad (4.41)$$

efetuando a integral da equação (4.41), temos

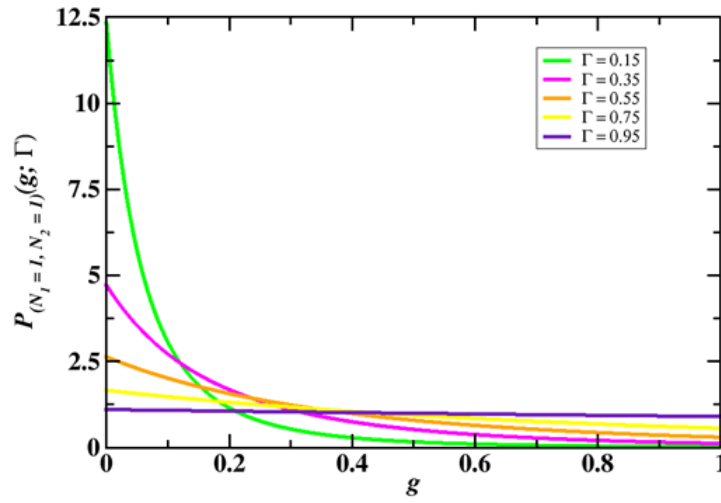
$$P(\tau; \Gamma) = \Gamma^2 \frac{1 + (1 - \Gamma)(1 - \tau)}{[1 - (1 - \Gamma)(1 - \tau)]^3}. \quad (4.42)$$

##### 4.4.1.1 Condutância

Dessa forma a distribuição da condutância para o caso  $N_1 = N_2 = 1$  e  $\beta = 2$

$$P(g; \Gamma) = \Gamma^2 \frac{1 + (1 - \Gamma)(1 - g)}{[1 - (1 - \Gamma)(1 - g)]^3} \quad (4.43)$$

essa expressão é a mesma para os resultados exatos via função hipergométrica de argumento matricial com  $N_1 = N_2 = 1$  e  $\beta = 2$  da equação (4.22), os gráficos para  $\Gamma$  são mostrados na figura (4.23).



**Figura 4.23** Distribuição da condutância para  $N_1 = N_2 = 1$  com  $\beta = 2$  e  $\Gamma$  arbitrária ( $\Gamma_2 = 1$ ).

A média da condutância pode ser calculada fazendo

$$\langle g \rangle = \langle \tau \rangle = \int_0^1 \tau P(\tau; \Gamma) d\tau \quad (4.44)$$

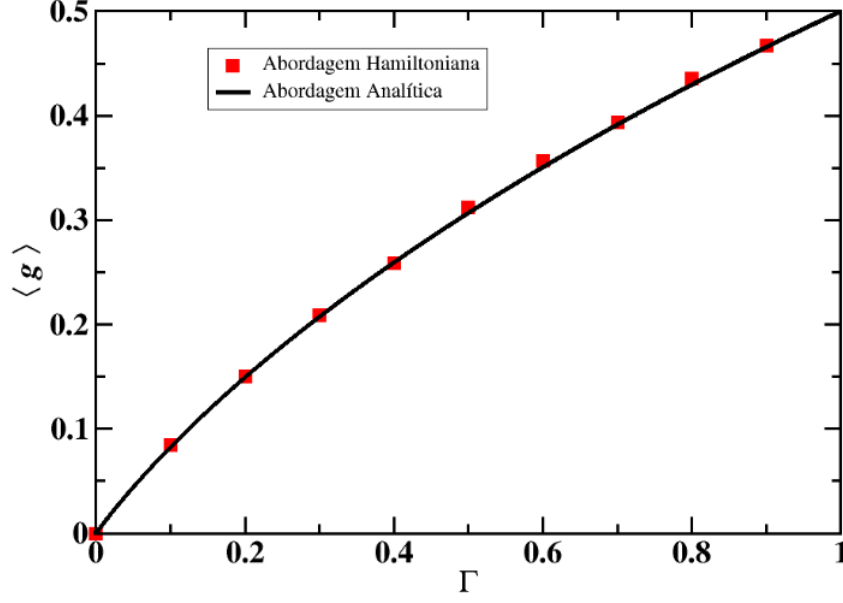
assim

$$\langle g \rangle = \int_0^1 \tau \Gamma^2 \frac{1 + (1 - \Gamma)(1 - \tau)}{[1 - (1 - \Gamma)(1 - \tau)]^3} d\tau$$

então

$$\langle g \rangle = \Gamma \frac{(1 - \Gamma + \Gamma \text{Log}[\Gamma])}{(1 - \Gamma)^2}$$

a figura (4.24) mostra o gráfico da média com a comparação em relação a abordagem hamiltoniana.



**Figura 4.24** Média da condutância para  $N_1 = N_2 = 1$  com  $\beta = 2$  e  $\Gamma$  arbitrária ( $\Gamma_2 = 1$ ).

A variância da condutância  $Var(g) = \langle g^2 \rangle - \langle g \rangle^2 = \langle \tau^2 \rangle - \langle \tau \rangle^2$

$$Var(g) = Var(\tau) = \int_0^1 \tau^2 P(\tau; \Gamma) d\tau - \langle \tau \rangle^2, \quad (4.45)$$

logo

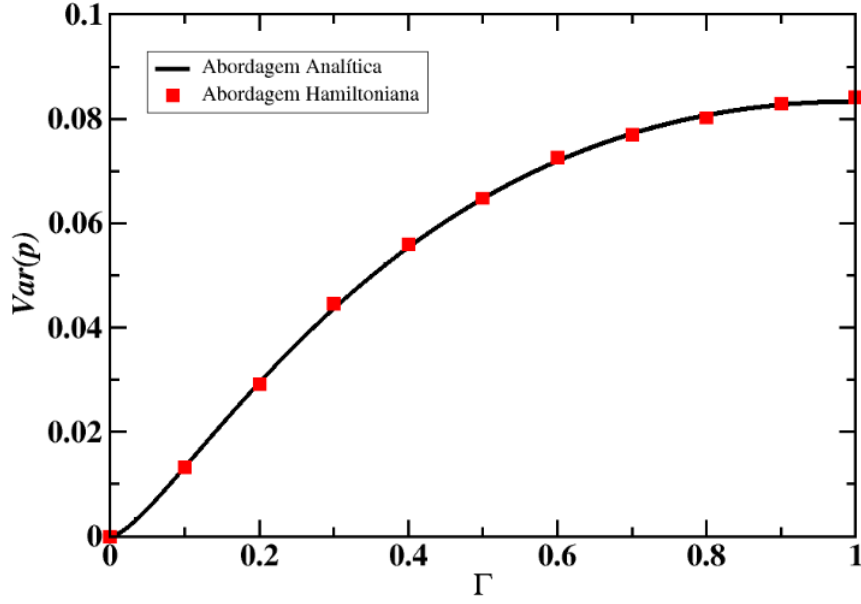
$$Var(g) = \int_0^1 \tau^2 \Gamma^2 \frac{1 + (1 - \Gamma)(1 - \tau)}{[1 - (1 - \Gamma)(1 - \tau)]^3} d\tau - \langle \tau \rangle^2$$

então

$$Var(g) = \Gamma^2 \frac{[(4\Gamma^2 - 2\Gamma - 2)\text{Log}[\Gamma] - \Gamma^2(\text{Log}[\Gamma])^2 - 5(1 - \Gamma)^2]}{(1 - \Gamma)^4},$$

a figura (4.25) mostra a comparação dos dois métodos.





**Figura 4.25** Variância da condutância para  $N_1 = N_2 = 1$  com  $\beta = 2$  e  $\Gamma$  arbitrária ( $\Gamma_2 = 1$ ).

#### 4.4.1.2 Potência do Ruído de Disparo

A distribuição da potência do ruído de disparo também pode se calculada

$$W_{(N_1=1, N_2=1)}(p; \Gamma) = \int_0^1 \delta(p - \tau(1 - \tau)) P(\tau; \Gamma) d\tau \quad (4.46)$$

onde  $P(\tau; \Gamma)$  é dada na equação (4.42).

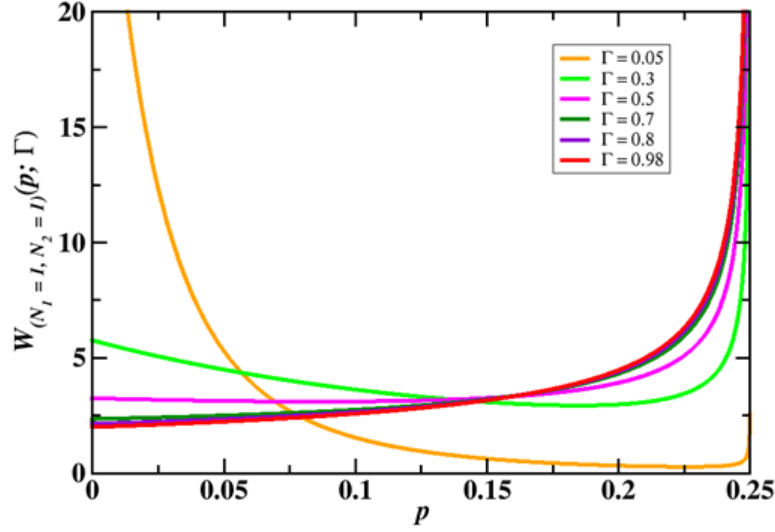
Usando as propriedades da Delta de Dirac usadas na seção 3.3, temos

$$\begin{aligned} W_{(N_1=1, N_2=1)}(p; \Gamma) &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-4p}} \left[ \delta\left(\tau - \left(\frac{1 + \sqrt{1-4p}}{2}\right)\right) + \delta\left(\tau - \frac{1 - \sqrt{1-4p}}{2}\right) \right] \\ &\times \Gamma^2 \frac{1 + (1 - \Gamma)(1 - \tau)}{[1 - (1 - \Gamma)(1 - \tau)]^2} d\tau. \end{aligned}$$

Portanto

$$W_{(N_1=1, N_2=1)}(p; \Gamma) = \frac{\Gamma^2(2 + 2p^2(-1 + \Gamma)^4 - \Gamma + \Gamma^3 - p(-1 + \Gamma)^2(7 + 4\Gamma + \Gamma^2))}{(p(-1 + \Gamma)^2 + \Gamma)^3 \sqrt{1 - 4p}}$$

a figura (4.26) mostra os gráficos para barreiras específica, sendo que  $W_{(N_1=1, N_2=1)}(p; \Gamma)$  está de acordo com a generalização da equação (4.27).



**Figura 4.26** Distribuição da potência do ruído de disparo para  $N_1 = N_2 = 1$  com  $\beta = 2$  e  $\Gamma$  arbitrário ( $\Gamma_2 = 1$ ).

Calculando da mesma forma que fizemos até aqui, a média da potência do ruído de disparo é dada por  $\langle p \rangle = \langle \tau(1 - \tau) \rangle$

$$\langle p \rangle = \frac{\Gamma(-1 + \Gamma(-2 + 3\Gamma) - \Gamma(3 + \Gamma)\text{Log}(\Gamma))}{(-1 + \Gamma)^3}$$

a variância da potência do ruído de disparo é dada por  $\text{Var}(p) = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$

$$\begin{aligned} \text{Var}(p) &= \frac{-\Gamma^2(-1 + \Gamma(-2 + 3\Gamma) - \Gamma(3 + \Gamma)\text{Log}\Gamma)^2}{(-1 + \Gamma)^6} \\ &- \frac{\Gamma^2((-1 + \Gamma)(19 + \Gamma(28 + \Gamma)) - 6(1 + \Gamma(5 + 2\Gamma))\text{Log}(\Gamma))}{3(-1 + \Gamma)^5}. \end{aligned}$$

#### 4.4.2 Caso Particular $\hat{\gamma}_1 = \hat{\gamma}_2$

Nesse caso o acoplamento tem contatos não ideais nos dois guias. Esse problema foi abordado na seção 2.3 para  $\Gamma \ll 1$  e  $g \ll 1$ . A diferencial de  $P_{(\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_1)}(\tau, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$

$$\begin{aligned} dP_{(\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_1)}(\tau, \alpha, \beta, \gamma, \delta) &= \frac{(1 - \hat{\gamma}_1^2)^4}{\left| (1 + e^{i(\alpha+\gamma)}\hat{\gamma}_1\sqrt{1-\tau})(1 - e^{i(\beta+\gamma)}\hat{\gamma}_1\sqrt{1-\tau}) - e^{i(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}\hat{\gamma}_1^2\tau \right|^4} \\ &\times \frac{d\tau d\alpha d\beta d\gamma d\delta}{(2\pi)^4} \end{aligned}$$

então

$$P(\tau, \varphi, \psi) = \frac{\Gamma^4}{\left| (e^{-i\varphi} + \sqrt{1-\Gamma}\sqrt{1-\tau})(e^{-i\psi} - \sqrt{1-\Gamma}\sqrt{1-\tau}) - (1-\Gamma)\tau \right|^4} \frac{d\tau d\varphi d\psi}{(2\pi)^2}$$

assim

$$P(\tau; \Gamma) = \Gamma^4 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\Gamma^4}{\left| (e^{-i\varphi} + \sqrt{1-\Gamma}\sqrt{1-\tau})(e^{-i\psi} - \sqrt{1-\Gamma}\sqrt{1-\tau}) - (1-\Gamma)\tau \right|^4} \frac{d\varphi d\psi}{(2\pi)^2},$$

o resultado  $P(\tau; \Gamma)$  para essa integral é conhecido [40]

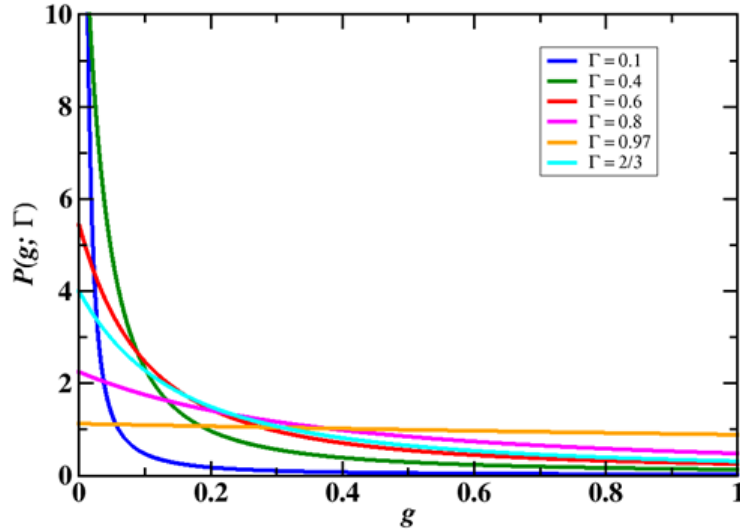
$$P(\tau; \Gamma) = \Gamma \frac{(1 - (1 - \Gamma)^2)^2 + 2(1 - \Gamma)(1 + (1 - \Gamma)^2)\tau + 4(1 - \Gamma)^2\tau^2}{[\Gamma^2 + 4(1 - \Gamma)\tau]^{5/2}}. \quad (4.47)$$

#### 4.4.2.1 Condutância

A partir da equação (4.47), a distribuição da condutância é dada por

$$P(g; \Gamma) = \Gamma \frac{(1 - (1 - \Gamma)^2)^2 + 2(1 - \Gamma)(1 + (1 - \Gamma)^2)g + 4(1 - \Gamma)^2g^2}{[\Gamma^2 + 4(1 - \Gamma)g]^{5/2}}$$

a figura (4.27) mostra distribuições para barreiras específicas,  $P(g; \Gamma)$  foi encontrado em termos de outras variáveis na referência [39], no próximo parágrafo iremos comparar com os resultados consolidados da referência [30].

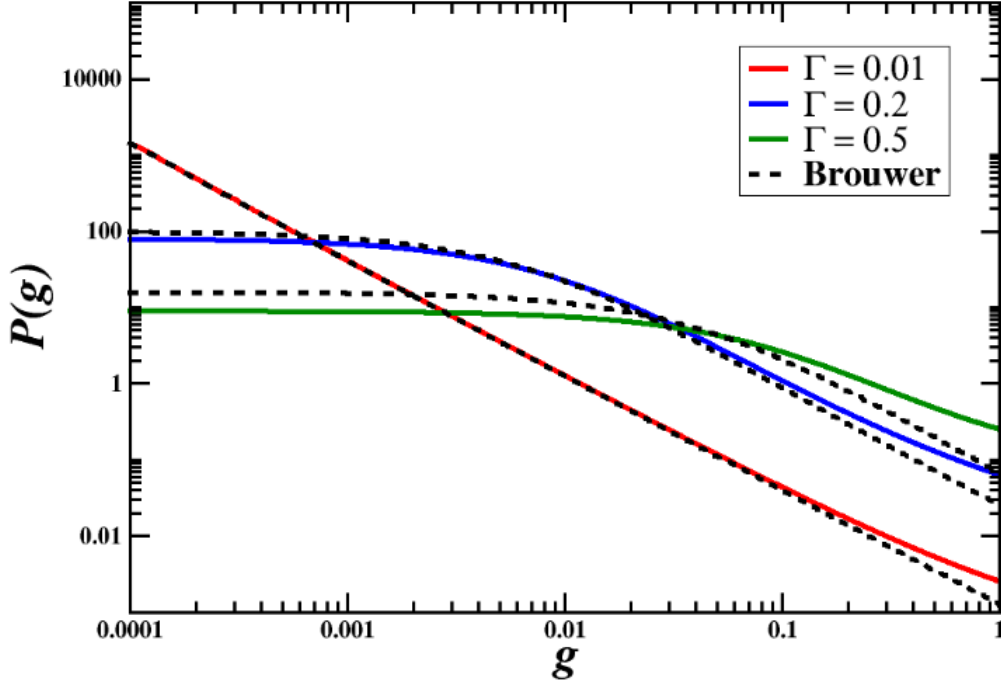


**Figura 4.27** Distribuição da condutância para  $N_1 = N_2 = 1$  com  $\beta = 2$  e  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$  arbitrário.

No limite  $\Gamma \ll 1$  e  $g \ll 1$ , a expressão acima de  $P(g; \Gamma)$  torna-se

$$P(g; \Gamma) = 4\Gamma \frac{\Gamma^2 + g}{(\Gamma^2 + 4g)^{5/2}}$$

essa expressão é a mesma da seção 2.3 calculada na referência [30]. A figura (4.28) mostra a comparação no limite abordado com a expressão analítica da distribuição da condutância para  $\Gamma$  arbitrário.



**Figura 4.28** Distribuição da condutância na escala logarítmica para  $N_1 = N_2 = 1$  com  $\beta = 2$  e  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$  arbitrário.

A média da condutância  $\langle g \rangle = \langle \tau \rangle$

$$\langle g \rangle = \frac{\Gamma((\Gamma)^3 - \sqrt{(-2 + \Gamma)^2(-2 + 2\Gamma + \Gamma^2)})}{12(\Gamma - 1)^2}$$

e a variância da condutância

$$\begin{aligned} Var(g) = & \frac{\Gamma}{720(\Gamma - 1)^4} (-5\Gamma(\Gamma^3 - \sqrt{(\Gamma - 2)^2(-2 + 2\Gamma + \Gamma^2)})^2 + 24(\Gamma - 1)(\Gamma^3(5 + \Gamma(-5 + 2\Gamma)) \\ & + \sqrt{(\Gamma - 2)^2(-2 - (\Gamma - 1)\Gamma(4 + \Gamma + 2\Gamma^2))}). \end{aligned}$$

esses resultados já são conhecidos [30] e foram testados através da abordagem hamiltoniana seção 2.3.

#### 4.4.2.2 Potência do Ruído de Disparo

A distribuição da potência do ruído pode ser encontrada calculada usando  $P(\tau; \Gamma)$  da equação (4.47)

$$W_{(N_1=1, N_2=1)}(p; \Gamma) = \int_0^1 \delta[p - \tau(1 - \tau)] P(\tau; \Gamma) d\tau \quad (4.48)$$

Utilizando as propriedades da Delta de Dirac usadas na seção 3.3

$$\delta[p - \tau(1 - \tau)] = \frac{1}{\sqrt{1 - 4p}} \left[ \delta\left(\tau - \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4p}}{2}\right)\right) + \delta\left(\tau - \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4p}}{2}\right)\right) \right],$$

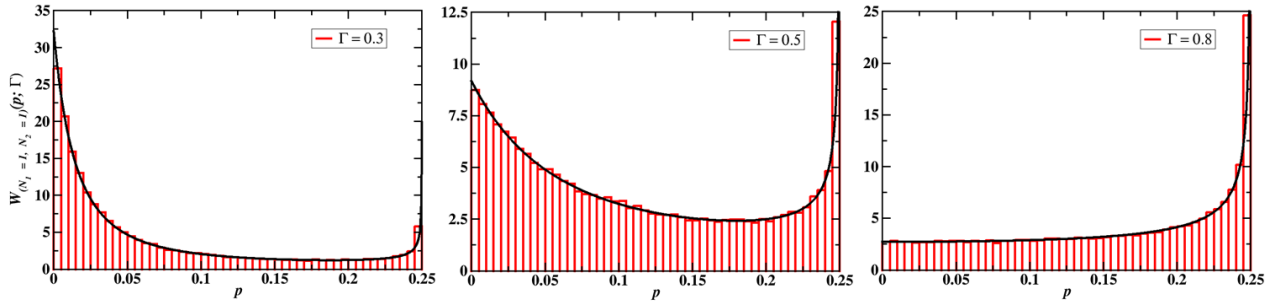
então

$$W_{(N_1=1, N_2=1)}(p; \Gamma) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-4p}} \left[ \delta \left( \tau - \left( \frac{1+\sqrt{1-4p}}{2} \right) \right) + \delta \left( \tau - \left( \frac{1-\sqrt{1-4p}}{2} \right) \right) \right] \\ \times \frac{\Gamma (1 - (1 - \Gamma)^2)^2 + 2(1 - \Gamma)(1 + (1 - \Gamma)^2)\tau + 4(1 - \Gamma)^2\tau^2}{(\Gamma^2 + 4(1 - \Gamma)\tau)^{5/2}} d\tau.$$

Portanto

$$W_{(N_1=1, N_2=1)}(p; \Gamma) = \frac{1}{A} (\Gamma(-4p(-1 + \Gamma)^2(B^{5/2} + C^{5/2}) + (-2 + \Gamma)^2(B^{5/2} + \sqrt{1-4p}B^{5/2} - \Gamma B^{5/2} \\ - \sqrt{1-4p}\Gamma B^{5/2} + \Gamma^2 B^{5/2} + C^{5/2} - \sqrt{1-4p}C^{5/2} - \Gamma C^{5/2} + \sqrt{1-4p}\Gamma C^{5/2} + \Gamma^2 C^{5/2})),$$

onde  $A = (\sqrt{1-4p}(2 - 2\sqrt{1-4p} + 2(-1 + \sqrt{1-4p})\Gamma + \Gamma^2)^{5/2}(2(1 + \sqrt{1-4p}) - 2(1 + \sqrt{1-4p})\Gamma + \Gamma^2)^{5/2})$ ,  $B = (2 - 2\sqrt{1-4p} + 2(-1 + \sqrt{1-4p})\Gamma + \Gamma^2)$  e  $C = (2(1 + \sqrt{1-4p}) - 2(1 + \sqrt{1-4p})\Gamma + \Gamma^2)$ . A expressão analítica para  $W_{(N_1=1, N_2=1)}(p; \Gamma)$  é testada através da abordagem hamiltoniana na figura (4.29).



**Figura 4.29** Distribuição da potência do ruído de disparo para  $N_1 = N_2 = 1$  com  $\beta = 2$  e  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$  arbitrário.  $10^5$  realizações e hamiltoniano de dimensão 60.

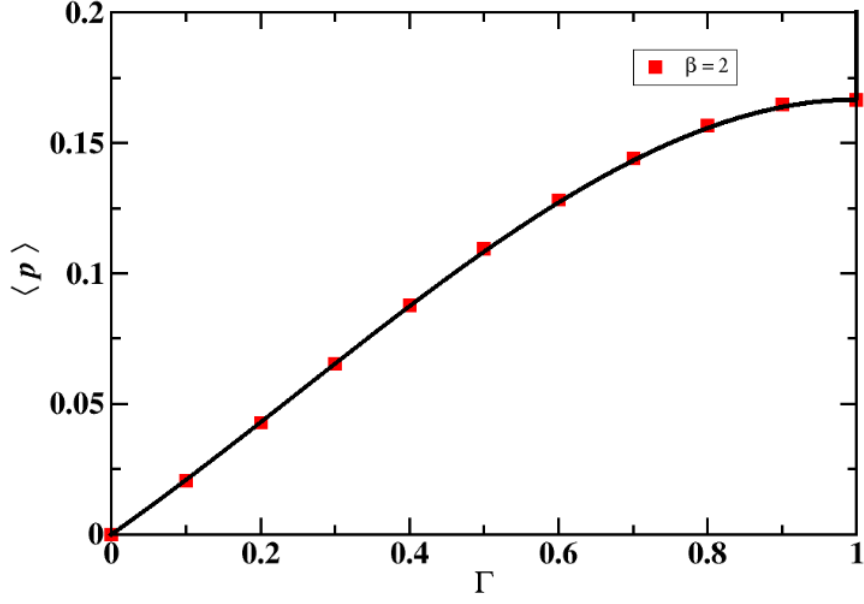
A média da potência do ruído  $\langle p \rangle = \langle \tau(1 - \tau) \rangle$  pode ser calculada

$$\langle p \rangle = \int_0^1 \tau(1 - \tau)P(\tau; \Gamma)d\tau, \quad (4.49)$$

portanto

$$\langle p \rangle = \frac{\Gamma((\Gamma^3 + \sqrt{(-2 + \Gamma)^2(2 - \Gamma(2 + \Gamma))}))}{12(-1 + \Gamma)^2},$$

a figura (4.30) mostra a comparação dos dois métodos.

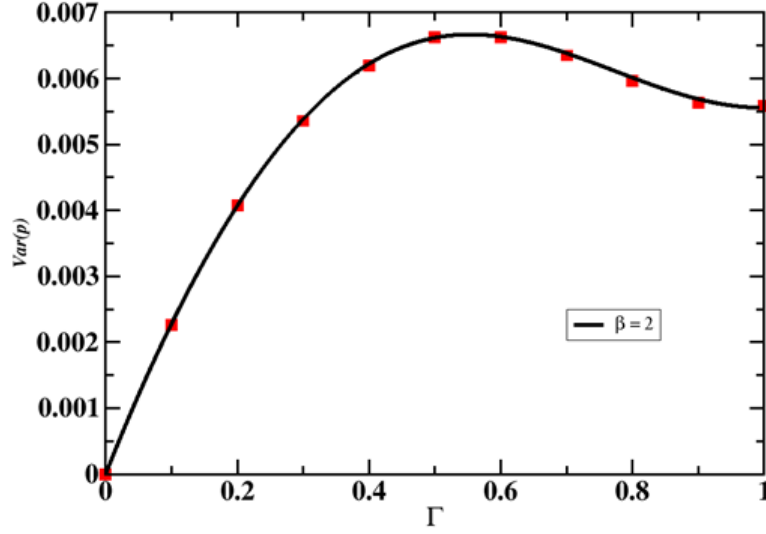


**Figura 4.30** Média da potência do ruído de disparo para  $N_1 = N_2 = 1$  com  $\beta = 2$  e  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$  arbitrária.

A variância da potência do ruído de disparo  $Var(p) = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$

$$\begin{aligned}
 Var(p) = & \Gamma \left( \frac{((\Gamma^2)^{3/2}(210 - 630\Gamma + 966\Gamma^2 - 882\Gamma^3 + 471\Gamma^4 - 135\Gamma^5 + 16\Gamma^6))}{(1260(-1 + \Gamma)^5)} \right. \\
 - & \left. \frac{((( -2 + \Gamma)^2)^{3/2}(4 - 12\Gamma + 18\Gamma^2 - 16\Gamma^3 + 45\Gamma^4 - 39\Gamma^5 + 16\Gamma^6))}{(1260(-1 + \Gamma)^5)} \right) \\
 - & \frac{(\Gamma^2((\Gamma^2)^{3/2}(15 + \Gamma(-15 + 4\Gamma)) + \sqrt{(-2 + \Gamma)^2(6 - \Gamma(12 + \Gamma - 7\Gamma^2 + 4\Gamma^3))})^2)}{(3600(-1 + \Gamma)^6)},
 \end{aligned}$$

a expressão de  $Var(p)$  é testada através dos resultados numéricos como mostra a figura (4.31).



**Figura 4.31** Variância da potência do ruído de disparo para  $N_1 = N_2 = 1$  com  $\beta = 2$  e  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$  arbitrária.

De acordo com a referência [40] para  $\beta = 1$ ,  $N_1 = N_2 = 1$  e  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$

$$P(g; \Gamma) = \frac{\Gamma^3}{2\sqrt{g}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{|(e^{-i\varphi} + \sqrt{1-\Gamma}\sqrt{1-g})(e^{-i\psi} - \sqrt{1-\Gamma}\sqrt{1-g}) - (1-\Gamma)g|^3} \frac{d\varphi d\psi}{(2\pi)^2}.$$

Para o acoplamento ideal do guia 2, ou seja,  $\Gamma_2 = 1$  a referência [40] apresenta

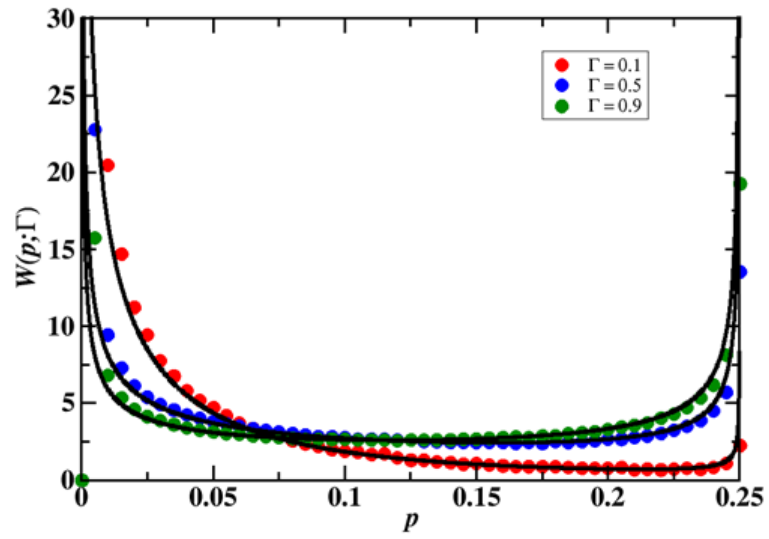
$$P(g; \Gamma) = \frac{\Gamma^{3/2}}{2\sqrt{g}} {}_2F_1\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 1; (1-\Gamma)(1-g)\right), \quad (4.50)$$

essa expressão para  $P(g; \Gamma)$  é um caso particular da generalização feita na seção 4.1 com  $0 \leq g \leq 1$ .

Usando a equação (4.50) as propriedades da Delta de Dirac utilizadas até aqui

$$W(p; \Gamma) = \frac{\Gamma^{3/2}}{2\sqrt{2}\sqrt{p}\sqrt{1-4p}} \left[ \sqrt{1-\sqrt{1-4p}} {}_2F_1\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 1; \frac{1}{2}(-1+\sqrt{1-4p})(\Gamma-1)\right) \right. \\ \left. + \sqrt{1+\sqrt{1-4p}} {}_2F_1\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 1; -\frac{1}{2}(-1+\sqrt{1-4p})(\Gamma-1)\right) \right]$$

a figura (4.32) mostra a comparação com a abordagem hamiltoniana, onde  $0 \leq p \leq 0.25$ .



**Figura 4.32** Distribuição da potência do ruído de disparo para  $N_1 = N_2 = 1$  com  $\beta = 1$ ,  $\Gamma_2 = 1$  e  $\Gamma_1 = \Gamma$  arbitrária.



---

### Conclusões e Perspectivas

---

Nesse trabalho estudamos o comportamento dos observáveis de transporte de uma cavidade balística caótica conectada a dois terminais. Abordamos o problema numericamente e analiticamente.

Numericamente, estudamos as propriedades de transporte através do formalismo de Landauer-Buttiker, deduzimos a fórmula de Mahaux-Weidenmuller testando a abordagem hamiltoniana através dos resultados exatos conhecidos na literatura, quando  $M \rightarrow \infty$  verificamos que a simulação estava correta. Então usamos esta abordagem para testar os resultados analíticos inéditos. Para as distribuições dos observáveis o Hamiltoniano tinha dimensão  $(200 \times 200)$  e foram obtidos 1 milhão de amostras. Para a média e variância o Hamiltoniano tinha dimensão  $(30 \times 30)$ , sendo que foram obtidos 100 mil amostras.

Analiticamente, deduzimos o Núcleo de Poisson mostrando que o mesmo gera os ensembles circulares. Para generalizar a distribuição da condutância  $\beta$ , partimos do Núcleo de Poisson, consideremos o contato do guia 2 ideal assim escrevemos  $P(\mathcal{S})$  em função das matrizes de transmissão e reflexão. Para escrever a distribuição de probabilidade em função da matriz de reflexão utilizamos a integral de Ingham-Siegel que tem resultado na literatura. Fizemos uma decomposição de valores singulares para a matriz de reflexão e usamos a medida de Haar conhecida na literatura encontrando a função densidade de probabilidade conjunta dos autovalores de reflexão para  $N_1 \leq N_2$ . Com  $N_1 = 1$  encontramos a distribuição da condutância em função da hipergeométrica de argumento matricial para qualquer  $\beta$ , onde o contato do guia 1 tem barreira de tunelamento  $\Gamma$ . A partir do resultado encontrado para condutância encontramos a média e a variância da condutância, ainda encontramos a distribuição da potência do ruído de disparo e as suas média e variância, também encontramos a distribuição da assimetria e curtose com suas respectivas média e variância. Fazendo abordagem analítica distinta as anteriores encontramos o mesmo resultado exato para casos que são específicos da generalização.

Para o problema onde a cavidade tem  $\Gamma_1 = \Gamma_2$  e  $N_1 = N_2$  reproduzimos os resultados analíticos para condutância, onde comparamos com os resultados consolidados no limite

$\Gamma \ll 1$ . A partir desses resultados calculamos expressões analíticas da distribuição, média e variância da potência do ruído de disparo. Como esses resultados são inéditos, testamos com a abordagem Hamiltoniana e verificamos que concondam completamente.

Para um ponto quântico que tem as simetrias de reversão temporal e rotação de spin com  $N_1 = 1$  e  $N_2 = 2$ , os autovalores de condutância ficam mais distribuídos próximo de zero, a medida que aumentamos o valor de  $\Gamma$  os autovalores passam a ser distribuídos próximo de um. A média também aumenta a quando  $\Gamma$  aumenta, assim como a variância, mas a curva da variância é menos linear do que a da média. A média da potência do ruído de disparo tende a valores próximo de 1.75 quando  $\Gamma$  aproxima de 1. No caso  $N_1 = 1$  e  $N_2 = 4$  quando aumentamos a barreira de tunelamento aumenta as flutuações. A variância tem um pico em  $\Gamma \cong 0.25$ , diminui consideravelmente em  $\Gamma = 0.6$  e tem seu valor máximo em  $\Gamma = 1$ .

Para uma cavidade balística caótica que não tem simetria de reversão temporal com  $N_1 = 2$  e  $N_2 = 3$  os autovalores de condutância aumenta quando aumentamos  $\Gamma$ , para  $\Gamma = 0.15$  a condutância tem um pico em  $\Gamma = 0.1$ . Da mesma forma quando aumentamos  $\Gamma$  a potência do ruído de disparo também aumenta.

Esses comportamentos a respeito da condutância e da potência do ruído de disparo descritos acima também são observados quando  $\beta = 4$ . Para  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$  e  $N_1 = N_2 = 1$  a média da condutância é maior para  $\beta = 4$  e menor para  $\beta = 1$ , sendo que tem o comportamento quando  $\Gamma_2 = 1$  e  $\Gamma \leq 1$ . Na variância ocorre o mesmo até  $\Gamma = 0.6$ , quando  $\Gamma$  fica próximo de 1 inverte.

O trabalho ainda pode ser bastante explorado tanto numericamente quanto analiticamente. Pode-se fazer os cálculo para  $N_1 > N_2$ . Estudar o emaranhamento a parti da distribuição dos autovalores de reflexão. Explorar o modelo de acoplamento no domínio do tempo e frequência. Encontrar as expressões exatas das distribuições, médias e variâncias da assimetria e curtose.

---

## Integral de Ingham-Siegel

---

Para o cálculo da integral

$$\mathcal{I} = \int d[t] \delta(tt^\dagger + rr^\dagger - \mathbf{I}_{N_1}) \quad (\text{A.1})$$

vamos introduzir uma representação integral para função delta de argumento matricial.

Se  $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}$  é uma matriz hermitiana  $M \times M$ , definimos

$$\delta(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^M \delta(\mathbf{A}_{ii}) \prod_{i < j} \delta(\text{Re} \mathbf{A}_{ij}) \delta(\text{Im} \mathbf{A}_{ij}) \quad (\text{A.2})$$

Usando a representação

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} dk \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{A}) &= \frac{1}{(2\pi)^M} \prod_{j=1}^M \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\mathbf{A}_{jj}\mathbf{H}_{jj}} \frac{1}{(2\pi)^{2M(M-1)/2}} \\ &\times \prod_{j < k} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\text{Re} \mathbf{A}_{jk} \text{Re} \mathbf{H}_{jk}} d(\text{Re} \mathbf{H}_{jk}) \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\text{Im} \mathbf{A}_{jk} \text{Im} \mathbf{H}_{jk}} d(\text{Im} \mathbf{H}_{jk}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{A}) &= \frac{1}{(2\pi)^{M^2}} \int \prod_j d\mathbf{H}_{jj} \prod_{j < k} d(\text{Re} \mathbf{H}_{jk}) d(\text{Im} \mathbf{H}_{jk}) \\ &\times \exp \left[ -i \left( \sum_j \mathbf{A}_{jj} \mathbf{H}_{jj} + \sum_{j < k} (\text{Re} \mathbf{A}_{jk} \text{Re} \mathbf{H}_{jk} + \text{Im} \mathbf{A}_{jk} \text{Im} \mathbf{H}_{jk}) \right) \right] \quad (\text{A.4}) \end{aligned}$$

Por outro lado, se  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{H}$  são Hermitianas

$$\begin{aligned}
Tr(\mathbf{AH}) &= \sum_{ij} \mathbf{A}_{ij} \mathbf{H}_{ji} \\
&= \sum_i \mathbf{A}_{ii} \mathbf{H}_{ii} + \sum_{i<j} (\mathbf{A}_{ij} \mathbf{H}_{ji} + \mathbf{A}_{ji} \mathbf{H}_{ij}) \\
&= \sum_i \mathbf{A}_{ii} \mathbf{H}_{ii} + \sum_{i<j} (\mathbf{A}_{ij} \mathbf{H}_{ji} + \mathbf{A}_{ij}^* \mathbf{H}_{ji}^*) \\
&= \sum_i \mathbf{A}_{ii} \mathbf{H}_{ii} + \sum_{i<j} Re(\mathbf{A}_{ij} \mathbf{H}_{ji}) \\
&= \sum_i \mathbf{A}_{ii} \mathbf{H}_{ii} + \sum_{i<j} (Re \mathbf{A}_{ij} Re \mathbf{H}_{ji} - Im \mathbf{A}_{ji} Im \mathbf{H}_{ji}) \\
Tr(\mathbf{AH}) &= \sum_i \mathbf{A}_{ii} \mathbf{H}_{ii} + \sum_{i<j} (Re \mathbf{A}_{ij} Re \mathbf{H}_{ji} + Im \mathbf{A}_{ij} Im \mathbf{H}_{ij}) \tag{A.5}
\end{aligned}$$

De A.4 e A.5, temos

$$\delta(\mathbf{A}) = \frac{1}{(2\pi)^{M^2}} \int d[\mathbf{H}] e^{-iTr(\mathbf{AH})} \tag{A.6}$$

Inserindo A.6 na integral em A.1

$$\mathcal{I} = \int d[t] \delta(t^\dagger t + r^\dagger r - \mathbf{I}_{N_1}) = \frac{1}{(2\pi)^{N_1^2}} \int d[t] d[\mathbf{H}] e^{-iTr(t^\dagger t + r^\dagger r - \mathbf{I}_{N_1}) \mathbf{H}} \tag{A.7}$$

Trocando a ordem das integrais:

$$\mathcal{I} = \frac{1}{(2\pi)^{N_1^2}} \int e^{iTr[(\mathbf{I}_{N_1} - rr^\dagger) \mathbf{H}]} \underbrace{\int d[t] e^{-iTr(tt^\dagger \mathbf{H})}}_J \tag{A.8}$$

Cálculo da integral gaussiana:

$$J = \int d[t] e^{-iTr(t^\dagger \mathbf{H} t)} \tag{A.9}$$

como  $\mathbf{H}$  é hermitiana, pode ser diagonalizada por uma transformação unitária:

$$\mathbf{H} = \mathbf{U}^\dagger \mathbf{D} \mathbf{U}; \mathbf{D} = \text{diag}(h_1, \dots, h_{N_1})$$

$$J = \int d[t] e^{-iTr[t^\dagger \mathbf{U}^\dagger \mathbf{D} \mathbf{U} t]}$$

Definindo a matriz  $\tilde{t} = \mathbf{D} \mathbf{U} t$  o jacobiano desta transformação é

$$J = |\det \mathbf{U}|^{2N_1}$$

como  $\mathbf{U}$  é unitária  $|\det \mathbf{U}| = 1$ . Desta forma, a integral fica:

$$J = \int d[\tilde{t}] e^{-iTr(\tilde{t}^\dagger \mathbf{D} \tilde{t})}$$

$$\begin{aligned}
Tr(\tilde{t}^\dagger \mathbf{D} t) &= \sum_{ijk} (\tilde{t}^\dagger)_{jk} \overbrace{\mathbf{D}_{ki}}^{d_i \delta_{ki}} t_{ij} \\
&= \sum_{ij} d_i |\tilde{t}_{ij}|^2
\end{aligned}$$

Logo

$$J = \prod_{i=1}^{N_1} \prod_{j=1}^{N_2} \int_{-\infty}^{+\infty} d(Re\tilde{t}_{ij}) e^{-id_i(Re\tilde{t}_{ij})^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d(Im\tilde{t}_{ij}) e^{-id_i(Im\tilde{t}_{ij})^2} \quad (\text{A.10})$$

### A.1 Integral de Fresnel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-iax^2}$$

Considere a integral no plano complexo

$$\begin{aligned}
\oint dz e^{-iaz^2} &= \int_R^0 dx e^{-iax^2} + \int_0^R e^{-i\pi/4} dr e^{-iaR^2} e^{-i\pi/2} \\
&+ \int_{-\pi/4}^0 Re^{i\theta} id\theta e^{-iaR^2} e^{2i\theta}
\end{aligned}$$

De acordo com o teorema de Cauchy essa integral é nula

$$0 = - \int_0^R dx e^{-iax^2} + e^{-i\pi/4} \int_0^R dr e^{-aR^2} + \underbrace{\int_{-\pi/4}^0 Re^{i\theta} e^{-iaR^2} e^{2i\theta} id\theta}_{\tilde{J}}$$

Vamos mostrar que a contribuição de  $\tilde{J}$  é nula no limite  $R \rightarrow \infty$

$$|\tilde{J}| = R \int_{-\pi/4}^0 e^{aR^2 \sin 2\theta} d\theta = \frac{R}{2} \int_{-\pi/2}^0 e^{aR^2 \sin 2\theta} d\theta = \frac{R}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-aR^2 \sin \theta} d\theta$$

$$|\tilde{J}| \leq \frac{R}{2} \int_{\pi/2}^0 e^{-2aR^2 \theta/\pi} d\theta = \frac{R}{2} \left( -\frac{\pi}{2aR^2} e^{-2aR^2/\pi} \right) \Big|_0^{\pi/2}$$

$$|\tilde{J}| \leq \frac{\pi}{4aR} (1 - e^{-aR^2}) \underset{R \rightarrow \infty}{\Rightarrow} 0$$

Portanto, no limite  $R \rightarrow \infty$ , temos

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty dx e^{-iax^2} &= e^{-i\pi/4} \int_0^\infty dr e^{-aR^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-i\pi/4}, a > 0 \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{ia}}.
\end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Portanto A.10 fica:

$$\begin{aligned}
 J &= \prod_{i=1}^{N_1} \prod_{j=1}^{N_2} \frac{\pi}{id_i} = \prod_{j=1}^{N_2} \frac{\pi}{i(d_1 d_2 \cdots d_{N_1})} \\
 &= \prod_{j=1}^{N_2} \frac{\pi}{i \det \mathbf{H}} \\
 &= \left( \frac{\pi}{i \det \mathbf{H}} \right)^{N_2}.
 \end{aligned} \tag{A.12}$$

Dessa forma

$$\int d[t] e^{-iTr(t^\dagger \mathbf{H} t)} = \left( \frac{\pi}{i \det \mathbf{H}} \right)^{N_2}. \tag{A.13}$$

Dessa forma, a integral A.8 fica

$$\mathcal{I} = \frac{1}{(2\pi)^{N_1^2}} \left( \frac{\pi}{i} \right)^{N_2} \int d[\mathbf{H}] \frac{e^{iTr[(\mathbf{I}_{N_1} - rr^\dagger)\mathbf{H}]} }{(\det \mathbf{H})^{N_2}}. \tag{A.14}$$

Esta integral não é bem definida em  $\mathbf{H} = 0$ . Este problema é resolvido com a substituição  $\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H} - i\mu \mathbf{I}_{N_1}$  no denominador. Dessa forma, a menos de um fator constante, obtemos

$$\boxed{\mathcal{I} = \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \int \frac{e^{iTr[\mathbf{H}(\mathbf{I}_{N_1} - rr^\dagger)]}}{[\det(\mathbf{H} - i\mu \mathbf{I}_{N_1})]^{N_2}} d[\mathbf{H}].} \tag{A.15}$$

Esta é a **Integral de Ingham-Siegel** e tem resultado na literatura [70].

$$\boxed{\mathcal{I} \propto [\det(\mathbf{I}_{N_1} - rr^\dagger)]^{N_2 - N_1}; N_2 \geq N_1.} \tag{A.16}$$

---

## Outros Resultados Via Função Hipergeometrica de Argumento Matricial

---

### B.1 Média da Assimetria

A média da assimetria pode ser calculada fazendo

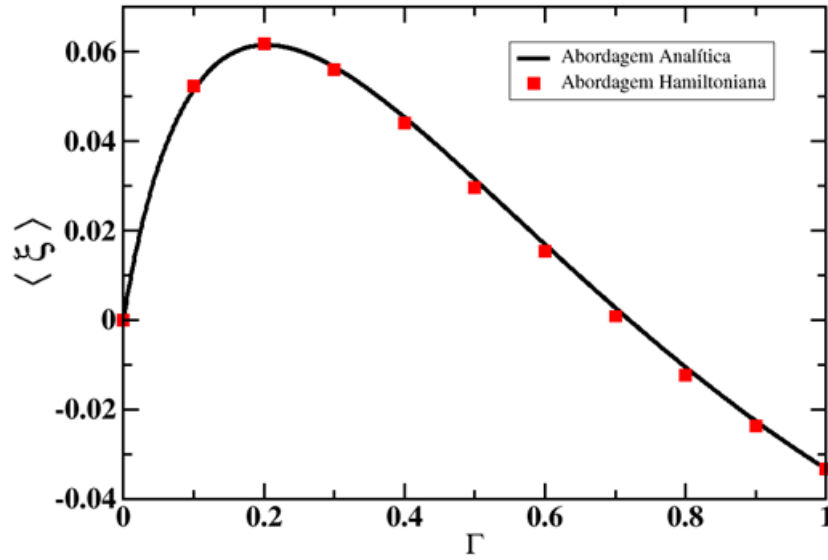
$$\begin{aligned} \langle \xi \rangle &= \int_0^1 \tau(1-\tau)(1-2\tau)^{\frac{\beta N_2}{2}} \tau^{(\beta/2)(N_2-2/\beta)} \Gamma^{(\beta N_2/2+1)} \\ &\times {}_2\mathcal{F}_1(\beta N_2/2+1, \beta N_2/2+1; 1; (1-\Gamma)(1-\tau)) d\tau. \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

- **Caso**  $\beta = 1$ ,  $N_1 = 1$  e  $N_2 = 4$

Calculando a integral B.1 para esse caso, temos o seguinte resultado

$$\langle \xi \rangle = 2\Gamma^3 \left( -\frac{((1+5\Gamma)(-1+\Gamma(19+6\Gamma)))}{(2(-1+\Gamma)^4\Gamma^2)} + \frac{((31+\Gamma(37+4\Gamma))\text{Log}[\Gamma])}{(-1+\Gamma)^5} \right)$$

a figura B.1 mostra o teste dos métodos.



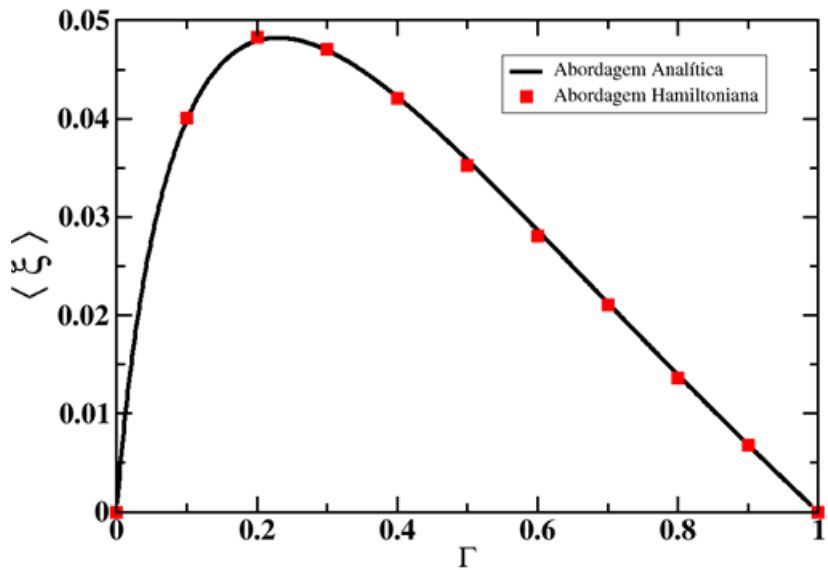
**Figura B.1** Média da assimetria para  $N_2 = 4$ ,  $\beta = 1$  e  $\Gamma$  arbitrária. Sendo  $10^5$  realizações e hamiltoniano de dimensão 30.

- **Caso**  $\beta = 2$ ,  $N_1 = 1$  e  $N_2 = 1$

Fazendo o cálculo da equação B.1 para esse caso, temos a seguinte média de assimetria

$$\langle \xi \rangle = -\frac{(\Gamma(-1 + \Gamma(-12 + \Gamma(9 + 4\Gamma))) - \Gamma(7 + \Gamma(10 + \Gamma)))\text{Log}[\Gamma])}{(-1 + \Gamma)^4}$$

a figura B.2 mostra a comparação dos métodos.



**Figura B.2** Média da assimetria para  $N_2 = 1$ ,  $\beta = 2$  e  $\Gamma$  arbitrária. Sendo  $10^5$  realizações e hamiltoniano de dimensão 30.

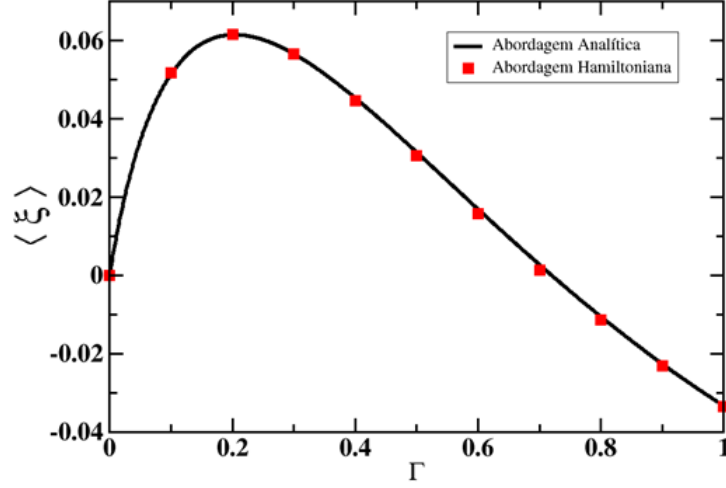


- **Caso**  $\beta = 4$ ,  $N_1 = 1$  e  $N_2 = 1$

Resolvendo a equação B.1 para esse caso, temos a seguinte média de assimetria

$$\langle \xi \rangle = 2\Gamma^3 \left( -\frac{(1+5\Gamma)(-1+\Gamma(19+6\Gamma))}{2(-1+\Gamma)^4\Gamma^2} + \frac{(31+\Gamma(37+4\Gamma))\text{Log}[\Gamma]}{(-1+\Gamma)^5} \right)$$

a figura B.3 mostra a comparação dos métodos.



**Figura B.3** Média da assimetria para  $N_2 = 1$ ,  $\beta = 4$  e  $\Gamma$  arbitrária. Sendo  $10^5$  realizações e hamiltoniano de dimensão 30.

## B.2 Variância da Assimetria

Podemos encontrar variância da assimetria fazendo

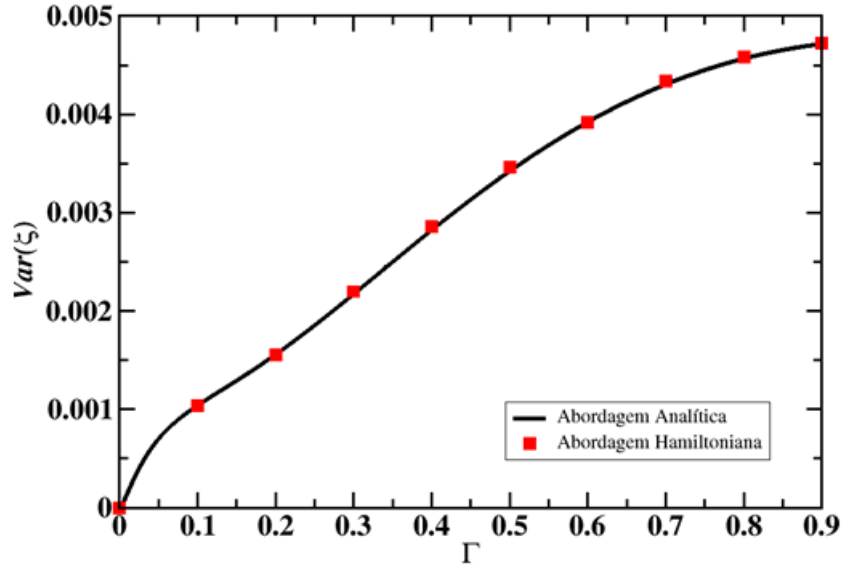
$$\begin{aligned} Var(\xi) = & \int_0^1 (\tau(1-\tau)(1-2\tau))^2 \frac{\beta N_2}{2} \tau^{(\beta/2)(N_2-2/\beta)} \Gamma^{(\beta N_2/2+1)} \\ & \times {}_2F_1(\beta N_2/2+1, \beta N_2/2+1; 1; (1-\Gamma)(1-\tau)) d\tau - \langle \tau(1-\tau)(1-2\tau) \rangle^2. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

- **Caso**  $\beta = 1$ ,  $N_1 = 1$  e  $N_2 = 2$

Resolvendo a equação B.2 para esse caso, podemos encontrar a seguinte variância da assimetria

$$\begin{aligned} Var(\xi) = & -\frac{\Gamma^2(-1+\Gamma(-12+\Gamma(9+4\Gamma))-\Gamma(7+\Gamma(10+\Gamma))\text{Log}[\Gamma])^2}{(-1+\Gamma)^8} - \frac{1}{(15(-1+\Gamma)^7)} 2\Gamma^2 \\ & ((-1+\Gamma)(61+\Gamma(431+\Gamma(486+\Gamma(101+\Gamma)))) - 15(1+2\Gamma)(1+\Gamma(13+\Gamma(9+\Gamma)))\text{Log}[\Gamma]) \end{aligned}$$

a figura B.4 mostra a comparação dos métodos.



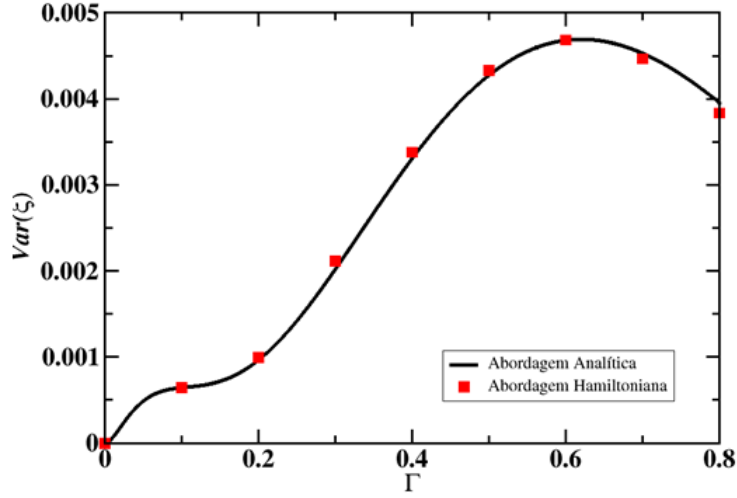
**Figura B.4** Variância da assimetria para  $N_2 = 2$ ,  $\beta = 1$  e  $\Gamma$  arbitrária. Sendo  $10^5$  realizações e hamiltoniano de dimensão 30.

- **Caso**  $\beta = 2$ ,  $N_1 = 1$  e  $N_2 = 3$

Resolvendo a equação B.2 para esse caso, podemos encontrar a seguinte variância da assimetria

$$Var(\xi) = \frac{1}{5(-1+\Gamma)^9} \Gamma^2 (-10 + \Gamma(430 + \Gamma(19877 + 58375\Gamma - 6850\Gamma^2 - 55490\Gamma^3 - 15705\Gamma^4 - 627\Gamma^5))) + 60\Gamma^2 (113 + \Gamma(819 + 2\Gamma(702 + \Gamma(352 + \Gamma(47 + \Gamma)))))) \text{Log}[\Gamma] \\ \frac{\Gamma^2 (-(-1+\Gamma)(2 + \Gamma(-23 + \Gamma(175 + \Gamma(839 + 207\Gamma)))) + 6\Gamma^3(97 + \Gamma(94 + 9\Gamma)) \text{Log}[\Gamma])^2}{4(-1+\Gamma)^{12}}$$

a figura B.5 testa o resultado analítico.



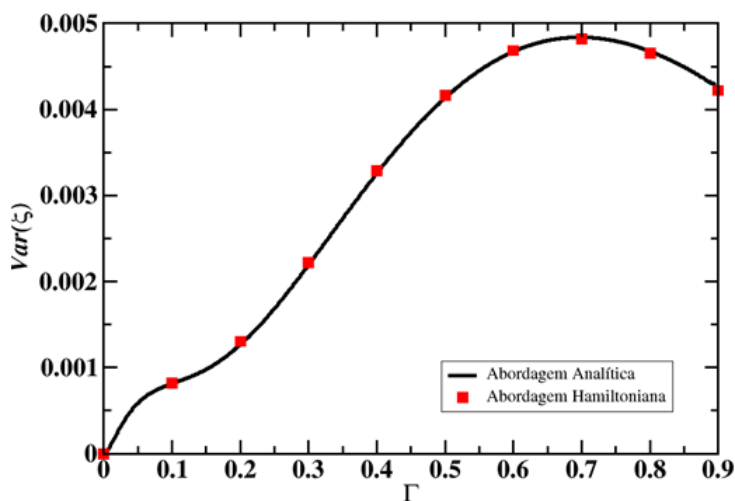
**Figura B.5** Variância da assimetria para  $N_2 = 3$ ,  $\beta = 2$  e  $\Gamma$  arbitrária. Sendo  $10^5$  realizações e hamiltoniano de dimensão 30.

- **Caso**  $\beta = 4$ ,  $N_1 = 1$  e  $N_2 = 1$

Fazendo o cálculo da equação B.2 para esse caso, temos a seguinte variância da assimetria

$$\begin{aligned}
 Var(\xi) &= 2\Gamma^3 \left( -\frac{1}{30(-1+\Gamma)^8} (-1774 - 5035\Gamma + 13040\Gamma^2 + 21130\Gamma^3 + 5230\Gamma^4 + 169\Gamma^5) \right. \\
 &+ \frac{3 + 160\Gamma + 798\Gamma^2 + 928\Gamma^3 + 279\Gamma^4 + 16\Gamma^5}{2(-1+\Gamma)^8\Gamma} \\
 &+ \left. \frac{2\Gamma(42 + 405\Gamma + 816\Gamma^2 + 442\Gamma^3 + 58\Gamma^4 + \Gamma^5)\text{Log}[\Gamma]}{2(-1+\Gamma)^8\Gamma} \right) \\
 &- 4\Gamma^6 \left( -\frac{((1+5\Gamma)(-1+\Gamma(19+6\Gamma)))}{2(-1+\Gamma)^4\Gamma^2} + \frac{(31+\Gamma(37+4\Gamma))\text{Log}[\Gamma]}{(-1+\Gamma)^5} \right)^2
 \end{aligned}$$

a figura B.6 mostra a comparação do dois métodos.



**Figura B.6** Variância da assimetria para  $N_2 = 1$ ,  $\beta = 4$  e  $\Gamma$  arbitrária. Sendo  $10^5$  realizações e hamiltoniano de dimensão 30.

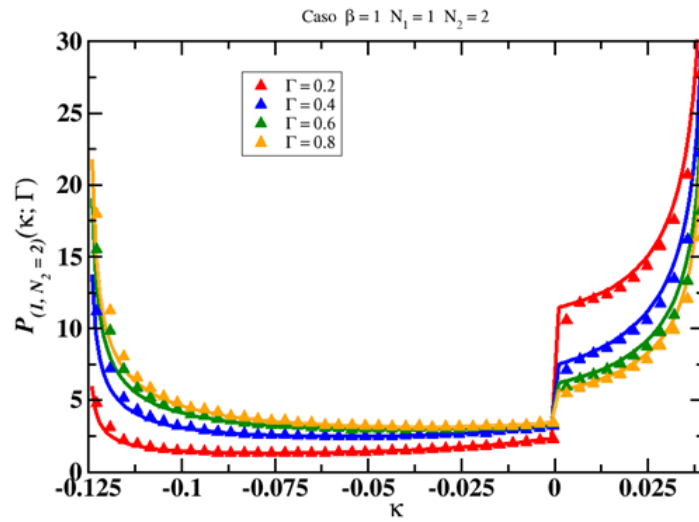
## B.3 Curtose

### B.3.1 Distribuição

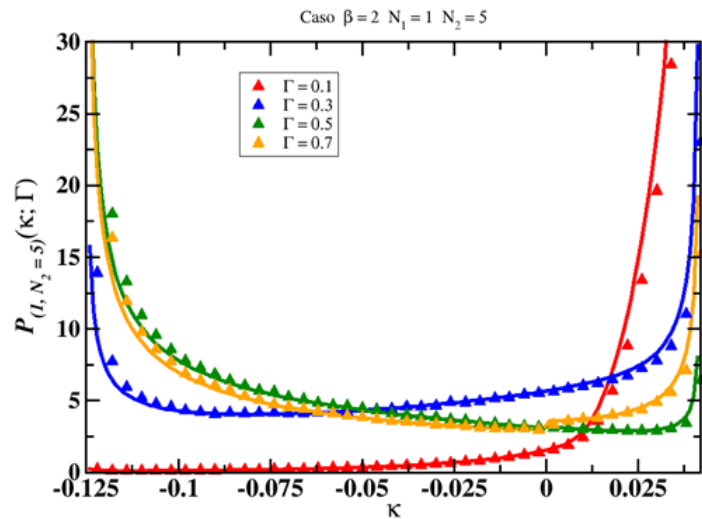
A **curtose** fornece uma medida do achatamento ou agudeza da função em relação à distribuição normal. F.d.ps com alta curtose tem um pico agudo e caudas cheias ou gordas, enquanto distribuições com baixa curtose tem um pico mais arredondado e caudas finas ou magras. Sendo dada por

$$\begin{aligned}
 P(\kappa; \Gamma) &= \int_0^1 \delta(\tau(1-\tau)(1-6\tau+6\tau^2)) \frac{\beta N_2}{2} \tau^{(\beta/2)(N_2-2/\beta)} \Gamma^{(\beta N_2/2+1)} \\
 &\times {}_2F_1(\beta N_2/2+1, \beta N_2/2+1; 1; (1-\Gamma)(1-\tau)) d\tau.
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

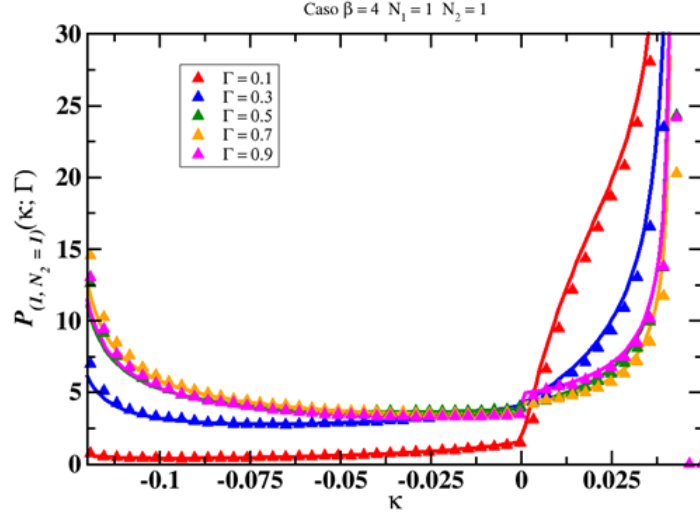
Integrando a equação B.3 de forma numérica e comparando os dois métodos como mostra as figuras B.7, B.8 e B.9, temos os resultados para os seguintes casos:



**Figura B.7** Distribuição da curtose  $N_2 = 2$ ,  $\beta = 1$  e  $\Gamma$  arbitrária. Sendo  $10^5$  realizações e hamiltoniano de dimensão 200.



**Figura B.8** Distribuição da curtose  $N_2 = 5$ ,  $\beta = 2$  e  $\Gamma$  arbitrária. Sendo  $10^5$  realizações e hamiltoniano de dimensão 200.



**Figura B.9** Distribuição da curtose  $N_2 = 1$ ,  $\beta = 4$  e  $\Gamma$  arbitrária. Sendo  $10^5$  realizações e hamiltoniano de dimensão 200.

### B.3.2 Média

Devido  $N_1 = 1$  então  $\langle \kappa \rangle = \langle \tau(1-\tau)(1-6\tau+6\tau^2) \rangle$ , a média da curtose pode ser calculada fazendo

$$\begin{aligned} \langle \kappa \rangle &= \int_0^1 \tau(1-\tau)(1-6\tau+6\tau^2) \frac{\beta N_2}{2} \tau^{(\beta/2)(N_2-2/\beta)} \Gamma(\beta N_2/2+1) \\ &\times {}_2F_1(\beta N_2/2+1, \beta N_2/2+1; 1; (1-\Gamma)(1-\tau)) d\tau. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

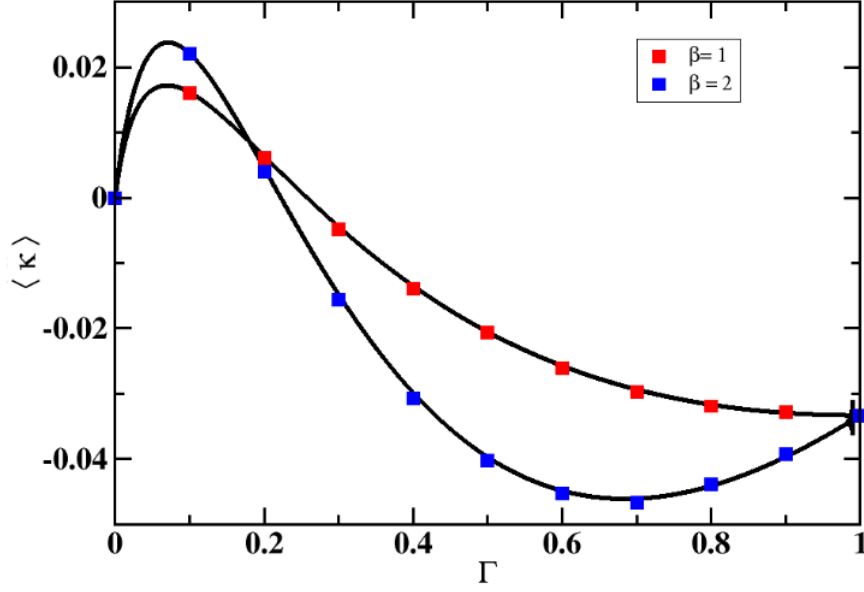
Para  $N_2 = 2$  e  $\beta = 1$ , temos a seguinte média

$$\langle \kappa \rangle = \frac{\Gamma(-1 + \Gamma(-38 + \Gamma(-12 + \Gamma(46 + 5\Gamma)))) - \Gamma(15 + \Gamma(55 + \Gamma(25 + \Gamma))) \text{Log}[\Gamma]}{(-1 + \Gamma)^5},$$

já para  $\beta = 2$

$$\begin{aligned} \langle \kappa \rangle &= -\frac{\Gamma(-(-1 + \Gamma)(-1 + \Gamma(27 + \Gamma(523 + 7\Gamma(83 + 10\Gamma))))}{(-1 + \Gamma)^6} \\ &+ \frac{2\Gamma^2(115 + \Gamma(330 + \Gamma(147 + 8\Gamma))) \text{Log}[\Gamma]}{(-1 + \Gamma)^6}, \end{aligned}$$

a Fig. B.10 mostra a comparação entre a simulação e o resultado analítico.



**Figura B.10** Média da curtose  $N_2 = 2$  e  $\Gamma$  arbitrária. Sendo  $10^5$  realizações e hamiltoniano de dimensão 30.

### B.3.3 Variância

Como  $N_1 = 1$  então  $Var(\kappa) = Var(\tau(1-\tau)(1-6\tau+6\tau^2))$ , a variância da curtose pode ser encontrada fazendo

$$Var(\kappa) = \int_0^1 (\tau(1-\tau)(1-6\tau+6\tau^2))^2 \frac{\beta N_2}{2} \tau^{(\beta/2)(N_2-2/\beta)} \Gamma^{(\beta N_2/2+1)} \times {}_2F_1(\beta N_2/2+1, \beta N_2/2+1; 1; (1-\Gamma)(1-\tau)) d\tau - \langle \kappa \rangle^2. \quad (B.5)$$

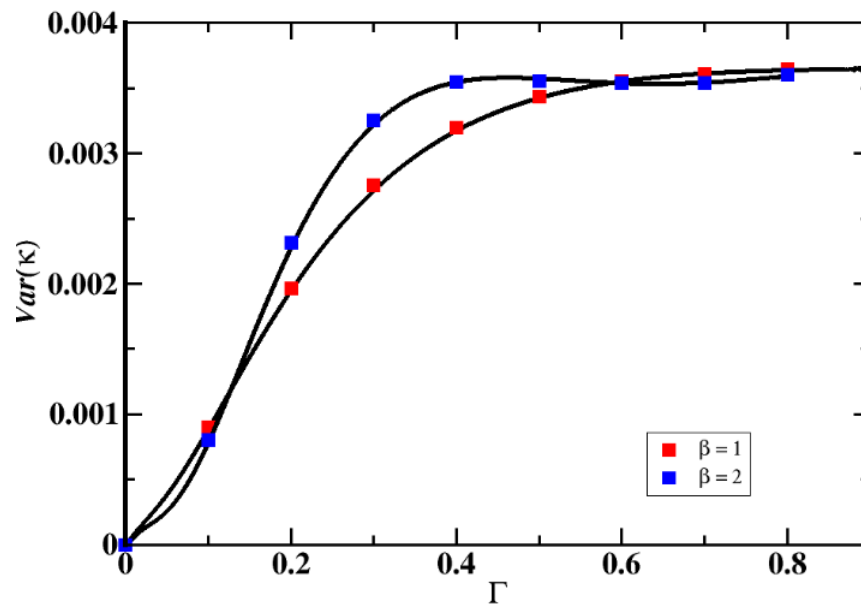
Para  $N_2 = 2$  e  $\beta = 1$ , a variância é seguinte

$$Var(\kappa) = -\frac{1}{(-1+\Gamma)^{10}} \Gamma^2(-1+\Gamma(-38+\Gamma(-12+\Gamma(46+5\Gamma)))) - \Gamma(15 + \Gamma(55+\Gamma(25+\Gamma))) \text{Log}[\Gamma]^2 - \frac{1}{105(-1+\Gamma)^9} 2\Gamma^2((-1 + \Gamma)(508+\Gamma(10833+\Gamma(45462+\Gamma(49312+\Gamma(13962+\Gamma(879+4\Gamma)))))) - 105(1+\Gamma(37+\Gamma(258+\Gamma(504+\Gamma(299+\Gamma(51+2\Gamma)))))) \text{Log}[\Gamma],$$

para  $\beta = 2$

$$Var(\kappa) = \frac{1}{105(-1+\Gamma)^{10}} \Gamma^2(315+\Gamma(78136+\Gamma(1009862-\Gamma(-2544864+\Gamma(-78400 + \Gamma(2527840+\Gamma(1082886+\Gamma(99512+1339\Gamma))))))) + 210\Gamma(90 + \Gamma(2073+\Gamma(11136+\Gamma(19255+\Gamma(10+\Gamma)(1163+\Gamma(118+\Gamma)))))) \text{Log}[\Gamma] - \frac{1}{(-1+\Gamma)^{12}} \Gamma^2(-(-1+\Gamma)(-1+\Gamma(27+\Gamma(523+7\Gamma(83+10\Gamma)))) + 2\Gamma^2(115+\Gamma(330+\Gamma(147+8\Gamma))) \text{Log}[\Gamma]^2,$$

a Fig. B.11 testa os resultados analíticos através da simulação.



**Figura B.11** Variância da curtose  $N_2 = 2$  e  $\Gamma$  arbitrária. Sendo  $10^5$  realizações e hamiltoniano de dimensão 30.



---

## Referências Bibliográficas

---

- [1] Y. MURAYAMA - **Mesoscopic systems: fundamentals and applications**, Wiley. VCH, (2001).
- [2] NA YOUNG KIM - **Correlated electron transport in one-dimensional mesoscopic conductors**, Phd. Thesis, Stanford University (2006).
- [3] C. W. J. BEENAKKER, H. VAN HOUTEN - **Quantum transport in Semiconductor Nanostructures**, [*Solid State Physics*, **44** : 1(1991)]arXiv:cond-mat/0412664(2004).
- [4] S. DATTA - **Electronic transport in mesoscopic systems**, Cambridge University Press, (1995).
- [5] Y. IMRY - **Introduction to Mesoscopic Physics**, Second Edition, Oxford University Press (2002).
- [6] MANFRED SIGRIST - **Solid State Theory**, Institut für Theoretische HIT K23,8(2013),[Lectures Website <http://www.itp.phys.ethz.ch/education/fz13/sst>].
- [7] DAVID K. FERRY, STEPHEN M. GOODNICK AND JONATHAN BIRD - **Transport in Nanostructures**, Second Edition, Cambridge University Press (2009).
- [8] CLÓVIS C. JÚNIOR - **Ruído no transporte eletrônico em sistemas mesoscópicos**, Dissertação de Mestrado UNICAMP, (2009).
- [9] B. J. VAN WEES ET AL - **Quantized conductance of point contacts in a two-dimensional electron gas**, *Physical Review Letters*, **60**(9) : 848(1988).
- [10] C. E. C. DE SOUSA - **Estatística de contagem em cavidades balísticas caóticas: resultados exatos para todos os ensemble circulares**, Dissertação de Mestrado, UFRPE (2013).
- [11] Y. ALHASSID - **The statistical theory of quantum dots**, *Rev. Mod. Phys.*, **72** (*condmat*)/0102268 : 895 – 968, (2000).

- [12] A. M. CHANG, H. U. BARANGER, L. N. PFEIFFER AND K. W. WEST - **Weak localization in chaotic versus nonchaotic caties: a striking difference in the line shape**, *Phys. Rev. Lett.*, **73** : 2111 – 2114, Oct(1994).
- [13] ] C. W. J. BEENAKKER - **Random-matrix theory of quantum transport**, *Rev. Mod. Phys.*, **69** : 731(1997).
- [14] R. LANDAUER - **Conductance determined by transmission: probes and quantised constriction resistance**, *J. Phys. Condens. Matter*, **1** : 8099, (1989) .
- [15] M. BÜTTIKER, Y. IMRY, R. LANDAUER E S. PINHAS - **Generalized many-channel con- ductance formula with application to small rings**, *Physical Review B*, **31**, 6207(1985).
- [16] C. A. SOUZA FILHO - **Estatística de contagem de carga em cavidades balísticas caóticas**, Dissertação de Metrado, UFRPE (2013).
- [17] J. J. SAKURAI - **Modern Quantum Mechanics (Revised Edition)**, Addison Wesley, 1st edition, September (1993).
- [18] C. W. J. BEENAKKER - **Random-matrix theory of quantum transport**, *Rev. Mod. Phys.*, **69** : (731), (1997).
- [19] AILTON F. DE MACÊDO-JÚNIOR - **Propriedades universais de transporte em pontos quânticos com simetria quiral**, Dissertação de Mestrado, UFPE (2002).
- [20] CLIVE EMARY - **Theory of Nanostructures**, February16 (2009).
- [21] YA. M. BLANTER AND M. BÜTTIKER - **Shot noise in mesoscopic conductors**, *Physics Reports*, **336** : 1 – 166(2000).
- [22] C. BEENAKKER AND C. SCHONENBERGER - **Quantum shot noise**, *Physics Today*, May, page 37, (2003).
- [23] Y. V. NAZAROV - **Quantum Noise in Mesoscopic Physics**, Springer Netherlands, Netherlands (2002).
- [24] Y. V. NAZAROV E Y. M. BLANTER - **Quantum transport: introduction to nanoscience**, Cambridge University Press, Cambridge (2009).
- [25] L. S. LEVITOV E G. B. LESOVIK - **Charge distribution in quantum shot noise**, *JETP Letters*, **58** : 230(1993).
- [26] S. GUSTAVSSON, R. LETURCQ, B. SIMOVIC, R. SCHLESER, T. IHN, P. STU- DERUS, K. ENSSLIN, D. C. DRISCOLL E A. C. GOSSARD - **Counting statis- tics of single-electron transport in a quantum dot**, *Physical Review Letters*, **96** : 076605, (2006).

- [27] P. MOHANTY E R. A. WEBB - **Anomalous Conductance Distribution in Quasi-One-Dimensional Gold Wires: Possible Violation of the One-Parameter Scaling Hypothesis**, *Phys. Rev. Lett.*, **88** : 146601(2002).
- [28] F. HAAKE - **Quantum Signatures of Chaos**, Springer (2001).
- [29] H.-W. LEE, L. S. LEVITOV, AND A. Y. YAKOVETS - **Universal statistics of transport in disordered conductors**, *Phys. Rev. B*, **51** : 40794083,(1995).
- [30] P. W. BROUWER - **On the Random-Matrix Theory of Quantum Transport**, PhD Thesis, Leiden University (1997).
- [31] V.N. PRIGODIM, K. B. EFETOV AND S. IIDA - *Phys. Rev. Lett.*, **71** : 1230(1993).
- [32] H. U. BARANGER AND P. A. MELLO - *Phys. Rev. Lett.*, **73** : 142(1994).
- [33] R. A. JALABERT, J.-L. PICHARD, AND C.W.J.BEENAKKER - *Europhys. Lett.*, **27** : 255(1994).
- [34] M. L. MEHTA - **Random Matrices**, Academic New York (1991).
- [35] R. BLÜMEL AND U. SMICLANSKY - *Phys. Rev. Lett.*, **60** : 477(1988).
- [36] U. SMICLANSKY - **in Chaos and Quantum Physics**, edited by M. J. Giannoni, A. Voros, and J. Zinn-Justin, North-Holland, Amsterdam (1991).
- [37] R.A.JALABERT, A.D.STONE, AND Y.ALHASSID - *Phys. Rev. Lett.*, **68** : 3468(1992).
- [38] P. W. BROUWER AND C. W. J. BEENAKKER - **Conductance distribution of a quantum dot with non-ideal single-channel leads**, *Phys. Rev. B*, **50** : 11263(R) (1994).
- [39] H. BARANGER AND P. A. MELLO - **Short paths and information theory in quantum chaotic scattering: transport through quantum dots**,*Europhys. Lett.*, **33**(6), pp465 – 470, (1996).
- [40] P. A. MELLO AND H. U. BARANGER - **Interference phenomena in electronic transport through chaotic cavities: an information theoretic approach**, *Waves Random Media*, **9** : 105 – 106(1999).
- [41] P. VIDAL AND E. KANZIEPER - *Phys. Rev. Lett.*, **108** : 206806(2012).
- [42] C. H. LEWENKOPF AND H. WEIDENMÜLLER - **Stochastic versus semiclassical approach to quantum chaotic scattering**, *Annals of Physics*, **212** : 53 – 83, (1991).
- [43] P. W. BROUWER - **Generalized circular ensemble of scattering matrices for a chaotic cavity with non-ideal leads**, *Physical Review B*, **51** : (23)16878 – 16884 (1995).

- [44] THOMAS GUHR, AXEL MÜLLER AND HANS A. WEIDNMÜLLER - ***Random Matrix Theories in Quantum Physics: Common Concepts***.
- [45] A. M. O. ALMEIDA AND R. O. VALLEJOS - ***Caos e mecânica quântica***, Revista da CBPF, disponível em <http://portal.cbpf.br/>.
- [46] E. DEVANE - ***Quantum Mechanics and Chaos Theory***, Lectures Notes, October 8, (2010).
- [47] O. BOHIGAS, M. J. GIANNONI AND C. SCHMIT - ***Characterization of chaotic quantum spectra and universality of fluctuation***, *Phys. Rev. Lett.*, **52** : 1 – 4(1984).
- [48] P. J. FORRESTER - ***Log-gases and random matrices***, Princeton University Press, (2010).
- [49] Y. V. FYODOROV AND H. J. SOMMERS - ***Statistics of resonance poles, phases shifts and time delays in quantum chaotic scattering for systems with broken time reversal invariance***, *Journal of Mathematical Physics*, **38** : 1918, (1997).
- [50] J. G. G. DE SOUSA RAMOS - ***Modelo sigma não-linear supersimétrico: aplicações em nanoestruturas caóticas***, Tese de Doutorado, (2010).
- [51] S. ALBERVERIO, F. HAAKE, P. KURASOV, M. KUS AND P. SEBA - *J. Math. Phys.*, **37** : 4888(1996).
- [52] J. J. M. VERBAARSCHOT, H. A. WEIDENMLLER AND M. R. ZIRNBAUER - ***Grassmann integration in stochastic quantum physics: the case of compound-nucleus scattering***, *Phys. Rep.*, **129** : 367, (1985).
- [53] A. M. S. MACÊDO - ***Average conductance coefficients in multiterminal chaotic cavities***, *Phys. Rev. B*, **63** : 115309, (2001).
- [54] F. A. G. ALMEIDA - ***Algoritmos numéricos de matrizes aleatórias aplicados a sistemas mesoscópicos***, Tese de Doutorado, UFPE (2010).
- [55] V. N. PRIGODIN K. B. EFETOV AND S. IIDA - *Phys. Rev. Lett.*, **71** : 1230(1993).
- [56] P. A. MELLO AND N. KUMAR - ***Quantum Transport in Mesoscopic Systems: Complexity and Statistical***, Oxford: Oxford University Press (2004).
- [57] F. J. DYSON - ***Statistical theory of energy levels of complex systems I***, *T. Math. Phys.*, **3** : 140, (1962).
- [58] A. F. MACEDO-JUNIOR AND A. M. S. MACEDO - *Nucl. Phys. B*, **752** : 439(2006).
- [59] D. V. SAVIN AND H-J. SOMMERS - *Phys. Rev. B*, **73** : 081307(2006).
- [60] M. NOVAES - *Phys. Rev. B*, **75** : 073304(2007).

- [61] H-J. SOMMERS, W. WIECZOREK AND D. V. SAVIN - *Acta Phys. Pol. A*, **112** : 691(2007).
- [62] D. V. SAVIN, H-J. SOMMERS AND W. WIECZOREK - *Phys. Rev. B*, **77** : 125332(2008).
- [63] P. VIVO AND E. VIVO - *J. Phys. A: Math. Theor.*, **41** : 122004(2008).
- [64] M. NOVAES - *Phys. Rev. B*, **78** : 035337(2008).
- [65] C. A. SOUZA-FILHO, A. F. MACEDO-JUNIOR AND A. M. S. MACÊDO - *J. Phys. A: Math. Theor.*, **47** : 105102(2014).
- [66] K. RICHTER AND M. SIEBER - *Phys. Rev. Lett.*, **89** : 206801(2002).
- [67] G. BERKOLAIKO AND J. KUIPERS - *Phys. Rev. E*, **85** : 045201(2012).
- [68] P. A. MELLO, P. PEREYRA AND T. H. SELIGMAN - *Ann. Phys. (N.Y)*, **161** : 254(1985).
- [69] K. ZYCKOWSKI AND H-J. SOMMERS - ***Truncations of random unitary matrices***, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **33** : 2045 (2000).
- [70] P.J.FORRESTER - *J.Phys. A*, **39** : 6861(2006).
- [71] GREGORIO MALAJOVICH - ***Álgebra Linear***, Terceira Revisão, 23 de março de (2010).
- [72] CARL DEAN MEYER - ***Matrix analysis and applied linear algebra***, Aditora SIAM (2000).
- [73] A. JAROSZ, P. VIDAL AND E. KANZIEPER - ***Random matrix theory of quantum transport in chaotic cavities non-ideal leads*** *arXiv.*, 1412 – 7970 (2014).
- [74] I. G. MACDONALD - ***Symmetric Functions and Hall Polynomials***, Clarendon Press, Oxford (1995).
- [75] K. I. GROSS AND D. ST. P. RICHARDS - *Journal of Approximation Theory*, **59** : 224 – 246(1989).
- [76] EUGENE BUTKOV - ***Mathematical Physics***, Addison Wesley Publishing Company (1968).
- [77] ARFKEN, G.B. WEBER, H.J. - ***Mathematical Methods***, 7nd. Ed., Academic Press, New York. (2012).